Metrikai dimenzió, (mérték)egység

Egy mérhető mennyiségnek alapvető jellemzője a nagysága (értéke). A metrikában a (mérő)számnak önmagában, a (mérték)egység nélkül, nincs jelentése: valamely mennyiség nagyságát a *szám* (a mért érték numerikus része) és az *egység* **szorzata** adja.[1]

Az **egység** a mennyiség speciális értéke, amit referenciaként használunk. A mérendő mennyiség és az egység tehát *azonos* metrikai dimenziójú és *egynemű* mennyiség!

1. Hét független **alap**egységből (és más, előzetesen ezekből definiált egységekből) lehet a *származtatott egység*eket létrehozni,[2] a mennyiségek definiáló egyenlete[3] alapján. Számos ezek közül külön, speciális nevet is kapott.

Például: a villamos ellenállás egysége az *ohm* [Ω]. Az Ohm törvényből ($R = U/I$) kiindulva és a zárójelbe tett nem alapegységeket (*V: volt, W: watt, J: joule, N: newton*) a definiáló összefüggésekkel helyettesítve

$$\Omega = \frac{(V)}{A} = \frac{(W)/A}{A} = \frac{(J)/s}{A^2} = \frac{(N)\cdot m}{A^2\cdot s} = \frac{kg\cdot m^2}{A^2\cdot s^3} = kg\cdot m^2\cdot A^{-2}\cdot s^{-3}$$

kapjuk az egység meghatározását az alapegységekből. (Ami ugyan nem egy „szívderítő” kifejezés, de jól mutatja az *alap*egységektől való függést: a dimenziót)

A *speciális név* hasznos, mert segíti

- az egység egyszerű leírását/megadását,
- más egységgel való kombinálásnál (új egység származtatásnál) a világos értelmezést,

és lehetővé teszi

- az egység többszörösét / törtrészét jelölő *prefixum* használatát.[4, 5]

$$1.2\ \mathrm{M\Omega}\ (= 1.2\cdot 10^6\ \Omega = 1200000\ \Omega)$$

$$(I = U/R\ =)\ 5\ \mathrm{V} / 1\ \mathrm{k\Omega} = 5\ \mathrm{mA}\quad [\mathrm{k} = 10^3,\ \mathrm{m} = 10^{-3}]$$

2. Az *azonos* metrikai dimenzió, ami végül a definiáló egyenlet algebrai egyszerűsítéséből adódik, nem jelenti azt, hogy a mennyiségek is azonosak. Ilyenkor a valódi jelentést a definiáló összefüggés határozza meg.

Például: (a) Jól értelmezett mennyiség egy gépkocsi „fogyasztása 100 km-ként”, ami SI egységben (V: üzemanyag térfogat, L: távolság)

$$F = \frac{V}{L} = \frac{\ell_1^3}{\ell_2} \qquad \left[\frac{m^3}{m} = m^2\right],$$

dimenziója „terület” (ℓ_1 az ekvivalens térfogatú kocka éle, ℓ_2 a megtett távolság).

---

[1] A mérés *választott* egységhez **hasonlítja** a mérendőt, tudni kell tehát, hogy mekkora az egység, mert annak értéke befolyásolja a szám értékét. (Ahogyan a viccben is: „Mi mennyi?”)
A metrikai „szorzat szabály” (a „Maxwell tény”) alapján kapjuk a mért értéket.

[2] A SI egységek *koherens* egységek: egy mennyiség egységét az alapegységekből ugyanaz (!) az egyenlet határozza meg, mint ami magát a mennyiséget definiálja. Így (és ez igen előnyös) a mennyiséget meghatározó összefüggés nemcsak a *mért érték*re, hanem a puszta *mérőszám*okra is érvényes (ha azok SI egységben adottak).

[3] Megfigyelésekből leszűrt, mennyiségeket összekapcsoló törvény.

[4] Ez fontos *dimenzió nélküli* mennyiségeknél.

[5] Sok nullánál könnyű tévedni!

A definiált érték persze *nem* terület. (Az egyszerűsített metrikai dimenzió „ekvivalens terület” ≈ keresztmetszet; ezt az „érdekes” egységet nem is igen értené a vásárló …).

(b) A „lehullott csapadék” mennyiségét mm egységben adják meg a meteorológiai jelentésekben. SI egységben (*V* az adott térfogat meghatározott *T* területen)

$$C = \frac{V}{T} = \frac{\ell_1^{\,3}}{\ell_2^{\,2}} \qquad \left[\frac{m^3}{m^2} = m\right],$$

egyszerűsített dimenziója valóban „hosszúság” (de nem igazán „távolságot” reprezentál, bár könnyű elképzelni a lehullott víz „mélységét” egy medencében).

Az eltérően definiált, tehát *nem* egynemű, ám azonos dimenziójú mennyiségeket *nem* lehet összehasonlítani!

3. A mindennapi életben *meglepő* – de jól értelmezhető – egységeket is használunk, amelyek nem SI szabvány szerintiek („törvényen kívüliek”).

Például: arra a kérdésre, hogy „milyen messze” van a mozi, a válasz lehet „15 perc séta” vagy „2 perc biciklivel”. A távolságot tehát idő-egységgel fejeztük ki, *feltételezve* egy **adott** sebességet (az $s = \mathbf{v}\cdot t$ összefüggés alapján).[6]

4. *Dimenzió nélküli* mennyiség[7] nagysága puszta szám és nem igényli, hogy megnevezzük az ’egy’séget, ami: **1** (az 1-es szám, a metrikai „szorzat szabály” értelmében). Bár nem a „szokásos értelemben” vett egység, gyakran van külön neve. Ez a *speciális név*, a definícióra utalva, megszünteti a félreérthetőséget és lehetővé teszi prefixum használatát.

Például: a (sík)szög SI egysége a *radián* [rad], ami speciális név és 1-et jelent, mert a φ szög (két egymást metsző egyenes közötti „terjedelem”: nyílás-szög) nagysága

$$\varphi = \frac{s}{r} \qquad [rad] = \left[\frac{m}{m} = m \cdot m^{-1} = m^0 = 1\right],$$

ahol s a körnek a szöggel befogott íve, r a kör sugara. (A *teljes* körív: $s = K = 2\pi\cdot r$.)
Elég szokatlan, hogy a *radián* a (sík)szög SI egysége, hiszen a napi gyakorlatban a *fok* [°] használatos (és nem valószínű, hogy ez megváltozik). Az ok: rad egységben egyszerűen írhatóak le a matematika trigonometrikus összefüggései, valamint a ciklikus jelenségek (2π reprezentál egy periódust, lásd: szinuszos jel [$\varphi/2\pi = t/T \;\rightarrow\; \varphi = 2\pi f t = \omega t$]).[8]

---

[6] A jelenleg érvényes méter-definíció az *állandó* fénysebességhez köti és terjedési-idő mérésre alapozza a métert.

[7] *Relatív* mennyiség (arány), vagy olyan származtatott mennyiség, amely egységének kiszámításánál – a definiáló egyenletbe helyettesítve az alapegységeket – valamennyi tag „eltűnik”: az **alap**egységek hatványkitevője *nulla*. (Tudjuk a matematikából: $x^0 = 1$.)

[8] A *radián* **2π rész**re osztja a *K* kör-kerületet, míg a megszokott *fok* **360 rész**re. Lehetne persze **egy-rész**re is osztani a kört, ez a *fordulat* ([rev], revolution). A konverzió (az eltérő egységek közötti reláció):

$$2\pi \text{ rad} = 360° = 1 \text{ rev}.$$

Például: (1/4) rev = 90° = (π/2) rad, és 1° = (1/360) rev, ill. 1° = (π/180) rad = 17.5 mrad.
Mondhatni: a *fok* a gyakorlat, a *radián* pedig az elmélet (és a SI) egysége. Az 1 rad, ill. 1° nem ugyanazt a fizikai szituációt írja le! (Mert: $K/2\pi = s/\varphi_{rad}$ ill. $K/360° = s/\varphi°$)

Megjegyzés: Az f frekvencia egysége a *hertz* [$Hz = 1/s = s^{-1}$], mivel a „ciklusok száma” dimenzió nélküli. Az ω (= 2πf) körfrekvencia egysége [$rad/s = 1/s = s^{-1}$], mert a *radián* csak speciális név (és 1-et jelent). Bár azonos [s^{-1}] a két mennyiség – alapegységre redukált – metrikai dimenziója, de jól láthatóan eltérően definiált (tehát *nem* egynemű) mennyiségekről van szó.

5. Két *egynemű* mennyiség **arány**ának számértéke *független* az **egység-választás**tól, ez „a relatív mennyiség állandóságának” törvénye.

Jelölje Δn ill. Δm a *kétféle* (eltérő nagyságú, de egynemű) egységet, ezekkel természetesen *eltérő*: N ill. M lesz egy A mennyiség mérőszáma. Könnyen belátható:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 = N_1 \cdot \Delta n = M_1 \cdot \Delta m \quad \rightarrow & \dfrac{N_1}{M_1} = \dfrac{\Delta m}{\Delta n} \\[2ex] A_2 = N_2 \cdot \Delta n = M_2 \cdot \Delta m \quad \rightarrow & \dfrac{N_2}{M_2} = \dfrac{\Delta m}{\Delta n} \end{array}\right\} \quad \left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

Jól látható az **egység-váltás** „inverz arányosságának” törvénye is: ha pl. $\Delta m = \mathbf{k}\cdot\Delta n$, akkor $M_1 = (\Delta n/\Delta m)\cdot N_1 = \mathbf{k}^{-1}\cdot N_1$, vagyis ha az egység $\mathbf{k}$ ($= \Delta m/\Delta n$) faktorral módosul, akkor a mérőszám $\mathbf{k}^{-1}$ faktorral *megváltozik*.

Például: V = 90 [km/h] sebesség érték mennyi [m/s] egységben? (km = 10^3 m, h = 60·60 s)

$$90[km/h] = 90\cdot\frac{1000}{3600}[m/s] = 90\cdot\frac{1}{3.6}[m/s], \quad \text{vagyis } N_1 = 90,\ \mathbf{k} = 3.6$$

A relatív nagyságok állandóságából következik, hogy a **származtatott mennyiség**et definiáló függvény (egyenlet) típusa csakis „hatvány-forma” lehet:

$$S = c\cdot A^a \cdot B^b \cdots$$

ahol A, B ... az S mennyiséget meghatározó mennyiségek, a, b … kitevők (előjeles számok), c konstans (lehet dimenziós is).

Egyváltozós esetre: $S = f(A)$ és az a kérdés, *milyen f() függvény* lehet a kapcsolat?

A mért értékek: $S = N\cdot\Delta s$ ill. $A = M\cdot\Delta a$ (ahol N, M a mérőszámok, Δs, Δa az egységek). Az egyenletnek a mérőszámokra is igaznak kell lennie ($N = f(M)$), ezzel $f(M)\cdot\Delta s = f(M\cdot\Delta a)$, és $M = 1$ (azaz $A = \Delta a$) esetén $\Delta s = f(\Delta a) / f(1)$, vagyis $f(M\cdot\Delta a) = [f(M)\cdot f(\Delta a)] / f(1)$.

Ez azt jelenti (átírva a változókat), hogy az $f(xy) = [f(x)\cdot f(y)] / f(1)$ egyenlet megoldását keressük. A megoldás:

$f(x) = c\cdot x^a$, ahol a kitevő (előjeles szám), c konstans (dimenziós is lehet),

erről helyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk.

Megjegyzés: ha az A mennyiség **dimenzió nélküli** (puszta szám, vagyis $\Delta a = 1$), akkor *nincs kikötés* az $f()$ függvényre és pl. *sin(), exp(), log()* ... is lehet, ezek argumentumában – mint tudjuk – csakis szám szerepelhet.

A származtatott mennyiség **dimenziója** tehát „az alapmennyiségek dimenzióinak hatványfüggvénye”. (Lásd az 1. pontban: *ohm* egység.)
A mennyiségi egyenletre fennáll „a dimenzió homogenitás” törvénye, magyarán: egy mennyiségi egyenlet mindkét oldalán **azonos** dimenzióknak kell lenniük.

Klasszikus példa: a fizikából tudjuk, hogy egy ℓ [m] hosszúságú, m [kg] tömegponttal jellemzett (matematikai) inga t [s] lengésideje (kis kitérés esetén)

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

független a tömeg értékétől (!), és g [m/s^2] a nehézségi gyorsulás. Az alap-mennyiségek **dimenziója:** $[t]$ = T, $[\ell]$ = L, $[m]$ = M, a származtatotté: $[g] = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$.

(a) Keressük $t = const\cdot\ell^a\cdot m^b\cdot g^c$ alakban a megoldást *(a,b,c* előjeles szám), *dimenzionálisan*

$$\mathrm{T} = 1\cdot\mathrm{L}^a\cdot\mathrm{M}^b\cdot(\mathrm{LT}^{-2})^c = \mathrm{L}^{a+c}\cdot\mathrm{M}^b\cdot\mathrm{T}^{-2c} \quad ((const)^0 = 1, \text{ dimenzió nélküli})$$

A homogenitás törvényéből: $a+c = 0$, $b = 0$, $c = -½$, innen $a = ½$. Azt kaptuk, hogy

$$t = const \cdot \ell^{1/2} \cdot g^{-1/2} = const\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

az analízis megadja a függvény-formát (és megmutatja, hogy a lengésidő dimenzionálisan sem függhet a tömegtől!), de *nem* határozza meg – mert dimenzió nélküli – a *const* értékét (azt kísérlettel kell megállapítani, vagy a fizikai szituáció elemzéséből adódik).

(b) Mérjük az időt a „szívdobbanások ütemével”: 1 [szív] = τ [s], a távolságot „könyökkel”: 1 [könyök] = λ [m], ezzel az *egység-váltás*sal a nehézségi gyorsulás „új egysége”:

$$1\left[m/s^2\right] = \frac{1/\lambda\left[könyök\right]}{1/\tau^2\left[szív^2\right]} = \frac{\tau^2}{\lambda}\left[könyök/szív^2\right]$$

A váltást helyettesítve a kiinduló összefüggésbe és egyszerűsítve

$$\left(1/\tau\right)\cdot t = 2\pi\sqrt{\frac{\left(1/\lambda\right)\cdot \ell}{\left(\tau^2/\lambda\right)\cdot g}} = 2\pi\cdot\left(1/\tau\right)\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

ami t-re ugyanaz az egyenlet [$(1/\tau)$-val egyszerűsítve], mint az eredeti, mert – mint tudjuk – a mennyiségi egyenlet *nem függ* az egység-választástól (ha azok *koherens* rendszer tagjai).

(c) Az eredeti mennyiségi egyenlet átrendezhető

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{t\cdot g^{1/2}}{\ell^{1/2}} = 1$$

formába, ami persze ugyanazt az információt tartalmazza, mint az eredeti, de egy *dimenzió nélküli* csoportban. (Dimenzió nélküli mennyiségeknek vagy azok csoportjainak az értéke *nem függ* az egység-rendszer választásától, így ezek alapvető jelentőségűek.)

Megjegyzés: erre alapozva – elsősorban sokváltozós esetben – *szisztematikusan* célszerű keresni a mennyiségi kapcsolatot. „Ha n dimenziós változó van és k alapmennyiség, akkor n-k független[9] *dimenzió nélküli* csoport képezhető [10] és ebből kapjuk a megoldást”. Illusztratív példánkban 4 változó (t, ℓ, m, g) és 3 alapdimenzió (T, L, M) van, így (szerencsére) n-k = 1. Ez a dimenzió nélküli csoport: $t\cdot\ell^a\cdot m^b\cdot g^c$, vagyis dimenzionálisan $T\cdot L^a\cdot M^b\cdot(LT^{-2})^c = 1$. Ebből $1-2c = 0$, $a+c = 0$, $b = 0$, innen $c = ½$, $a = -½$, visszakapjuk a $const\cdot t\cdot g^{1/2}\cdot\ell^{-1/2} = 1$ formát.

A **metrikai dimenzió** tehát a mennyiség „természete”: a *tulajdonság*, ez az osztályba sorolás (klasszifikáció) *különíti el* egymástól az eltérő mennyiségeket.
Valójában persze a dimenzió egy „formula”, amely az *alapegységektől való függést* definiálja, így önmagában a mennyiség „belső természetéről” nem ad teljes információt, hiszen *nem egynemű*, származtatott mennyiségek is lehetnek *azonos* dimenziójúak.
Ezért a dimenzió vizsgálat, bár korrekt és jól feltárja a kapcsolatokat, nem old(hat) meg teljesen egy [összetett] problémát (ahogy ezt a választott [egyszerű] példa is illusztrálja).

[9] Az s_1, s_2, …s_k mennyiségek *dimenzionálisan függetlenek*, ha egyik sem fejezhető ki a többiek hatvány-szorzataként; másképp fogalmazva: ezen mennyiségeknek nincs olyan hatvány-szorzata, amely dimenzió nélküli. Például: a sebesség ($[v] = L\cdot T^{-1}$), a sűrűség ($[\rho] = M\cdot L^{-3}$) és a nyomás ($[p] = M\cdot L^{-1}\cdot T^{-2}$) dimenzionálisan *nem* függetlenek, mert $[p] = [\rho]\cdot[v]^2$, vagyis $p/(\rho\cdot v^2)$ *dimenzió nélküli* mennyiség.

[10] Ez az átrendezés redukálja a változók számát, így egyszerűsíti a megoldást.