A méréstechnika alapjai

Házi feladat (HF)

7-ből **5 „jó HF megoldás"**

1. Mérje meg (!) a **π** értékét egyenes *vonalzó*val.
   (Modell: **π** = K/D, ahol K: a kör kerülete, ami „legördítéssel" mérhető egyenes *vonalzó*val és D: átmérő. A *mért* adatokból *számítással* kapjuk **π**-t. Pi /szám/)
2. Hogyan lehet 6 liter vizet kimérni, ha csak *két* edényünk van: egy 9 literes és egy 4 literes? A hengeres edények alaplapja azonos nagyságú, faluk *nem* átlátszó és a falon belül *nincs* beosztás, hogy leolvassuk az arányos vízmagasságot!
   (Csak a megoldás elve [virtuálisan öntözgetünk], mert a víz kincs.)
3. Hagyományos analóg (mutatós) órán, *pontosan* (!) mennyi idő múlva fedi egymást *ismét* a kis és nagymutató?
4. (a) Hány „láb" a Föld kerülete? (láb , Föld)

   (b) Mérje meg, hány „saját(!) hüvelyknyi" méretű az A4-es lap? (hüvelyk)
5. „Új sebesség mértékegység": *galilei* = 1 m magasról *leejtett* kő végsebessége.
   Kérdés: 5 galilei hány km/óra?
   (Az energia megmaradást felhasználva: $mgh = ½ mv^2$. Galilei)
6. Milyen sebességgel halad – a realitást is figyelembe véve – a mozifilmen (látszólag) *álló* kerekű postakocsi, ha a kerék átmérője: 1 m és a keréken egyenletes elosztásban 8 küllő van?
   (A film mintagyakorisága: 24 kép/s. Wagon-wheel effect)
7. Bekapcsolva felejtett 40 W-os villanykörte 1 nap alatt hány kWh energiát fogyaszt? (kWh)

***

Metrology Forum: **Just for Fun**

http://metrologyforum.tm.agilent.com/fun_metric.shtml

Understanding the Metric System

1 billion microphones = 1 megaphone
1 million bicycles = 2 megacycles
10 monologs = 5 dialogues
2 monograms = 1 diagram
10 rations = 1 decoration
…..

***

Koppenhágai Egyetem, **fizika** vizsga.

A kérdés: „**Hogyan *mérné* meg egy felhőkarcoló magasságát barométerrel?**”

Az egyik hallgató válasza: „(1) A barométerre rákötünk egy hosszú zsinórt, majd *lelógatjuk* a földig. A zsinór hosszúságának és a barométer magasságának összege megegyezik a felhőkarcoló magasságával.”

A választ a vizsgáztató *nem* fogadta el. A diák *nem* hagyta magát, szerinte a válasz helyes!
Az egyetem kijelölt egy független bírát, aki behívatta magához a hallgatót, hogy az bebizonyíthassa, a fizikai alapismeretek birtokában van.
A diák szótlanul ült, homlokát ráncolva gondolkodott, majd a biztos nógatására belekezdett:

„(2) Nos, az első ötletem az, hogy a barométert *leejtjük* a felhőkarcoló tetejéről. Mérjük a földet éréséig eltelt időt, amiből a magasság kiszámítható. Viszont ez a módszer nem túl szerencsés a barométer szempontjából.

(3) Ha süt a nap, mérhetjük a barométer magasságát, és az *árnyék*át. Majd megmérjük a felhőkarcoló árnyékának hosszát, és aránypárok segítségével kiszámítjuk a magasságát is.

(4) De *ha nagyon tudományosak akarunk lenni*, akkor egy rövid zsinórt kötve a barométerre, ingaként használhatjuk azt. A földön és a tetőn megmérve a gravitációs gyorsulást, kiszámíthatjuk a kért magasság értékét.

(5) Ha van tűz*létra*, akkor megmérhetjük, hogy az épület a barométernél hányszor magasabb, majd a barométer hosszát megmérve egyszerű szorzással megkapjuk a kívánt eredményt.

(6) De ha Ön az *unalmas, bevett módszerre* kíváncsi, akkor a barométert a **légnyomás mérésére** használva, a földön és a tetőn mérhető nyomás különbözetéből is megállapítható a felhőkarcoló magassága.

(7) Itt az egyetemen mindig arra buzdítanak bennünket, hogy próbáljunk **eredeti módszereket** kidolgozni. Ezért kétségtelenül a *legeredetibb* módszer, ha bekopogunk a portáshoz, és azt mondjuk neki:

\`Ha megmondod, milyen magas ez az épület, neked adom ezt a szép új barométert\`.”

A történet csattanója, hogy ezt a renitens diákot Niels Bohrnak hívták, a független bírát pedig Rutherfordnak.

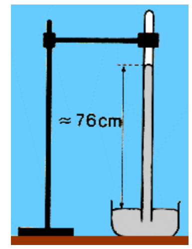
(Ez a *vándortörténet* számos WEB lapon – magyarul és angolul is – megtalálható.)

*

Magasságmérés 'unalmas, bevett módszerrel'

A barométer *légnyomás*mérő, a légnyomás pedig *változik* a magassággal.[1]

(a) A Toricelli kísérlet (1643) jól szemlélteti, hogy van légnyomás.[2] A h magasságú folyadékoszlop súlyából származó p nyomás (a ρ sűrűség felhasználásával)[3]



$$p = \frac{G}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{\rho \cdot V \cdot g}{A} = \frac{\rho \cdot A \cdot h \cdot g}{A} = \rho \cdot h \cdot g\,,$$

ez tart egyensúlyt a külső légnyomással.

<u>Példa</u>: ρ_{higany} = 13595 kg/m^3, g = 9,80655 m/s^2 és h = 0,76 m értékkel
p = 101325 Pa (= 1013,25 mbar = 1 atm = 760 Hgmm (torr)).

(b) Már Pascal felismerte (1648), hogy (ha a higany magasságát a levegő súlyából eredő légnyomás hozza létre, akkor) a tengerszint feletti magasságtól függően a higanyszál magasságának csökkenie kell.[4]
A Δp légnyomás csökkenés a magasság-különbség (Δh) nagyságú levegőoszlop súlyának felel meg:

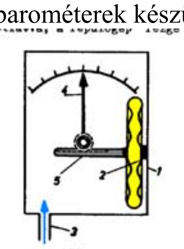
$$\Delta p = \rho_{levegő} \cdot \Delta h \cdot g$$

és így $\Delta p = p_{földszint} - p_{tető}$ mérésével megadható a keresett Δh (ahol $\rho_{levegő}$ = 1.293 kg/m^3, 0°C-on).

Ha $\rho_{levegő}$ = konstans (lenne), akkor a feladatot meg is oldottuk (volna).[5]

---

[1] A barometrikus magasságmérés (bár közvetlen mutató is lehet, de nem túl pontos), azóta kényelmes, amióta aneriod (folyadékmentes), vagyis fémbarométerek készülnek.



A műszer-házban (1) lévő légüres szelence (2) a nyomás hatására összenyomódik. A magasság növekedésével a statikus nyomás (3) csökken, ennek következtében a szelence kitágul és az áttételen (5) keresztül a mutatót (4) elmozdítja, amely egy méterben kalibrált számlap előtt mozog.

[2] A légnyomást normális esetben nem érzékeljük. Gyors változásait azonban igen, de ennek követése testünkben lassú folyamat. (Ha gyorsan jövünk le hegyről autóval, fülünk „bedugul", mert nyomás-különbség lép fel a dobhártya két oldalán.)

[3] A nyomás egysége: *pascal* [Pa = N/m^2], a sűrűség egysége: [kg/m^3]

[4] A hegy lábánál hagyott barométer és a 800 méterrel magasabban lévő barométer között jól mérhető, kb. 8 cm különbség lépett fel.

[5] Azonban $\rho_{levegő}$ nem konstans, hanem a magassággal exponenciálisan változik. (Kb. 5,5 km-ként feleződik. A Himalája csúcsán a normál érték 35%-a, a „ritka levegő" miatt kell oxigénpalack.)
Ennek az izgalmas problémának a megoldása (és egyéb hatások, pl. a hőmérséklet figyelembe vétele) a <u>légkörfizikusok</u> <u>dolga</u>.
Kis Δh esetén élhetünk a fenti közelítéssel.

Mérőszám, mértékegység, mérési bizonytalanság

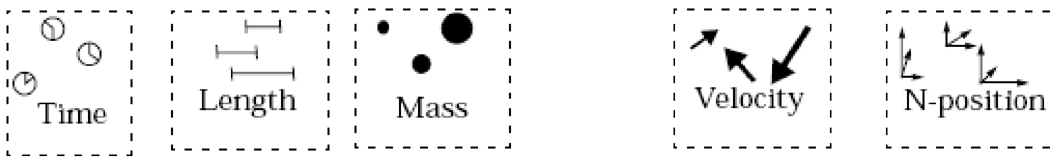
Mérés: *ahol a (természet)filozófia és a matematika összeér.*

Műszer: *ahol találkozik a valóság és a tudás.*

A mérés nem gondolatkísérlet.

A **mérés** gyakorlati, kalibrált eszközt használó, objektív művelet, amely megadja egy jól definiált (mérendő) mennyiség ismeretlen nagyságának relatív (ismert egységhez viszonyított) értékét (ún. **egység-alapú** paradigma). A mérés: *arány* „felfedezése” – összehasonlítással. Csakis *egynemű* mennyiségek hasonlíthatók össze.

Skalár (nagyság) Vektor (nagyság és irány)



Az ’anyagmennyiség (amount of stuff, QoM: quantity of matter)’ pl. megadható mint tömeg (vas), térfogat (víz), terület (szőnyeg), hossz (kötél), számosság (molekulák) – fontos tehát tudni, hogy ’mit is mérünk’ (milyen ’anyagról’ van szó)!

A mérés-szó eltérő jelentésű [lehet] a különböző tudományágakban; a szubjektív ítélet-alkotások (felmérések: szavazás, teszt-válasz, véleményalkotás) a „mérés” elnevezéssel annak igazoló / jósló erejét kívánják eljárásuknak tulajdonítani.

A mérőeszköz nem varázsdoboz, amely „csak úgy” kidob egy számot.

A **mérőszám** a mérendő mennyiség relatív nagyságának ’matematikai tükörképe’. A (mérő)számot az egység értelmezi „szimbolikus szorzat”formájában. (Ez az ’ártatlan’ formula jó néhány ’körmönfont’ feltételezést rejt, aminek feltárásával [→ méréselmélet] indokolható, hogy ’vannak dolgok, amik nem mérhetők’, pl. szépség.)

A reprezentáló szám lehetővé teszi, hogy számítással helyettesítsünk gyakorlati manipulációt (pl. „mekkora polc kell adott számú, ’megmért [ismert] vastagságú’ könyv-höz?”). Ez nem „szám-misztika” és nem hasonlítható a régi kultúráknak a „nevek mágikus erejébe” vetett hitéhez.

A mértékegységet nem mérjük.

A **mértékegység** definiált érték, nincs „igazság” kritériuma, csak használhatósága és validitása. Az egység a mérendő mennyiséggel egynemű, célszerűen kiválasztott, fix érték.

Az egység-használat történelmileg jóval megelőzte a mennyiségek formális fogalmának, majd a méréselméletnek a kialakulását. (’Nem tudták, de tették.’)
Előfordul, hogy különnemű mennyiségeknek azonos elnevezésű (de persze eltérő jelentésű!) az egysége, pl. *fok* [º] (síkszög ill. hőmérséklet).

A mérőszám az egységtől függ, egység-váltással megváltozik ugyan a (mérő)szám, mégis ugyanazt a mért értéket jelenti.

Csakis *egynemű* mennyiségek *azonos egységű* mérőszámai adhatók össze.

A mérési bizonytalanság (régebben: hiba) nem azt jelenti, hogy érvénytelen / rossz / elvetendő a mért érték.

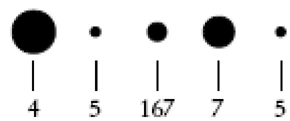
Az elkerülhetetlen **mérési bizonytalanság** egy szűk (jól becsülhető) intervallum: az a mért érték körüli tartomány, amelyen belül van („szinte biztosan”, nagy valószínűséggel) a mérendő értéke. Ez az adat nélkülözhetetlen **része** a mérési eredménynek, és ismeretünk korlátozott (becsülhető pontosságú) voltát jelenti.

A mérőeszköz nem „varázsdoboz”, ami „csak úgy” kidob egy számot.
A *mérőszám* a (mérendő)mennyiség relatív nagyságának ’numerikus tükörképe’.

Mennyiség nagyságának reprezentálása számmal

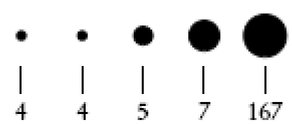
Mennyiségek nagyságának és a (reprezentáló) számoknak a struktúra-*azonossága* (az empirikus [konkrét] és numerikus [absztrakt] tartományok között relációk/műveletek *összekapcsolása*) a közvetlen mérés elvi alapja. Illusztratív példa:

(a) Összehasonlítva a **TÖMEG**eket, az **eltérő** nagyságúakat *eltérő* számokkal jelöljük, de – magától értetődően – ha két tömeg **azonos** nagyságú (pl. az összehasonlításhoz használt kétkarú mérleg egyensúlyban van), akkor *ugyanazt* a számot rendeljük hozzá:



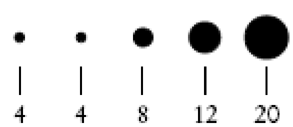
Az nem tűnik megfelelő választásnak, hogy a legnagyobb szám *nem* a legnagyobb tömeget jelöli, viszont van információ arról, hogy vannak azonos nagyságú tömegek. A számok itt csak elkülönítik, *megjelölik* a különböző tömegeket (mint pl. a futball játékosokat a mez-számok, ahol persze egy csapaton belül *nincsenek azonos* számok).

(b) Rendezzük nagyság szerint (az összehasonlítás alapján) a tömegeket, és a **nagyobb** tömeghez *nagyobb* számot rendeljünk:

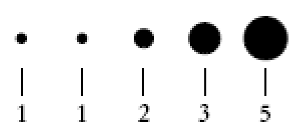


Itt a számok már *jól tükrözik* a nagyság szerinti azonosságot (egyenlő) és az eltérést (nagyobb/ kisebb), de a számok még *nem* adják meg a tömegek helyes *arányát* – tehát még nem használtunk ki minden lehetőséget, ami a „számokban rejlik”: *hányszor* nagyobb az egyik tömeg a másiknál (pl. „láthatóan” az első két tömeg fele a harmadiknak).

(c) Kombináljuk a tömegeket, és ha – a rendezett sorban – egyik tömeg két másik (fizikai) **egyesítése/együttese** (pl. azokat kétkarú mérleg azonos serpenyőjébe tesszük), akkor – logikusan – olyan számot rendeljünk hozzá, amely a két összetevőhöz rendelt szám (matematikai) *összege* (itt a harmadiktól kezdve az előző kettő összege):



vagy



Így már *helyesen reprezentálják* a számok a nagyságok egyenlőségét, eltérését és arányát is. A jobboldali ábrán, ahol pl. a legkisebb tömeg nagyságának értékét **egység**nek *választottuk*, a számok **mérőszám**ok, vagyis a (mérő)szám és (mérték)egység *szorzata* a tömeg **mért érték**e. (A baloldali ábrán az egység értéke az előbbi negyede.)

A relációk itt *közvetlenül* „felfedezhetők” (pl. kétkarú mérleg egyensúlyban van, ha az első két tömeget az egyik, a harmadikat pedig a másik serpenyőbe tesszük).

A nagyságok **arányai** *függetlenek* a választott egységtől, ez a „relatív mennyiségek állandóságának” törvénye. A **MÉRÉS** adja meg az *ismeretlen* nagyság értékét (*ismert* egységhez viszonyított arányát).

[Ábrák: T. Sider, Properties (2011)]

A matematikában, logikában van IGEN/NEM, a *méréstechniká*ban csak: TALÁN.
Ezért jellemezni kell a mérés minőségét is (*korrekt-e* az eredmény).

Mérési bizonytalanság

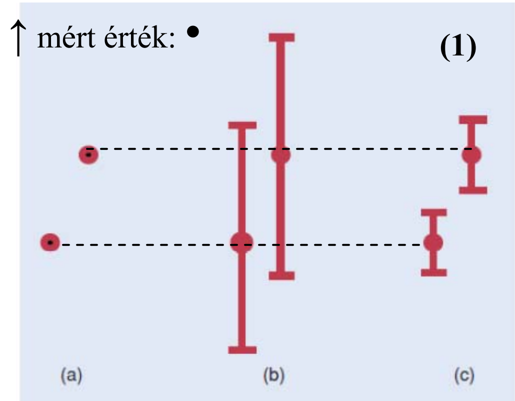
A mért érték és a mérendő aktuális értékének eltérése (különbsége) a (mérési) hiba[1], és kis *hiba* nagy *pontosság*ot jelent: azt **minősít**ik, hogy a két adat „mennyire van közel egymáshoz", mennyire „megbízható" a mérés. A hiba megadásához persze tudni kell(ene) az aktuális értéket – de ha azt ismernénk, miért is mérnénk?!

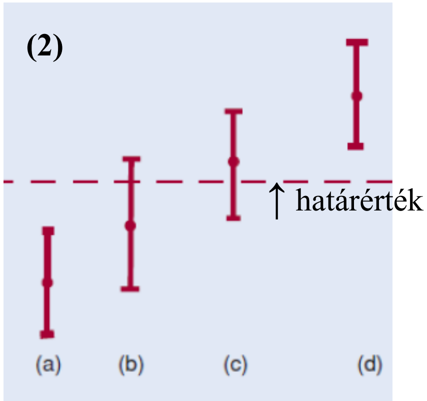
Az aktuális értéket a mért érték közelíti, ennek a „korlátozott ismeretnek" a **mérték**ére becslés a *mérési bizonytalanság* (ami tehát nem teljes bizonyosságú, de nagy megbízhatóságú adat) és megadásához nem kell ismerni az aktuális értéket!

A mérési bizonytalanság meghatározásának nemzetközileg elfogadott, szabványos technikája van (**GUM**: Guide to the expression of Uncertainty in Measurement), amelynek az a filozófiája, hogy először azonosítja és modellezi az összes fontos összetevőt, elvégzi a lehetséges korrekciót, majd statisztikai vagy más tapasztalati módszerrel *becsli* az eredő **mérési bizonytalanság**ot: azt a **mért érték körüli tartományt (intervallumot)**[2], amelyen *belül* van („majdnem biztosan", nagy *valószínűség*gel) a mérendő aktuális (de persze ismeretlen, exakt) értéke. Ez a specifikáció ad *bizalmat* az eredmény iránt: minél kisebb (szűkebb tartományú) a *bizonytalanság*, annál nagyobb (több, pontosabb) a *tudás*unk a mérendőről.
„Csakis annak a mérésnek van bizonytalansága, amelyikét meghatározták."

Két példa (miért is fontos a mért értékhez társított mérési bizonytalanság):

(1) Különböző mérőeszközökkel mért adatok összevetésénél, csak a bizonytalansági intervallum **(„hiba-sáv")** megadásával – tehát (b) és (c) esetben – dönthető el, hogy a mért értékek közötti eltérés szignifikáns-e (c), avagy az átlapolódás miatt, ekvivalensnek tekinthető-e a két adat (b).





(2) Határérték komparálásnál (Go/NOgo): az (a) és (d) eset teljesen egyértelmű, míg a (b) és (c) eset „elfogadható" (accept) vagy „elutasítható" (reject) – függően a döntés egyéb feltételeitől (pl. életvédelem, gazdaságosság, ár…)[2].

---

[1] Vigyázat: „mérési hiba (error)", és *nem* meghibásodás (mistake),
a „(mérési) bizonytalanság" szakkifejezés, és *nem* a köznapi/naiv értelemben vett jelentésű

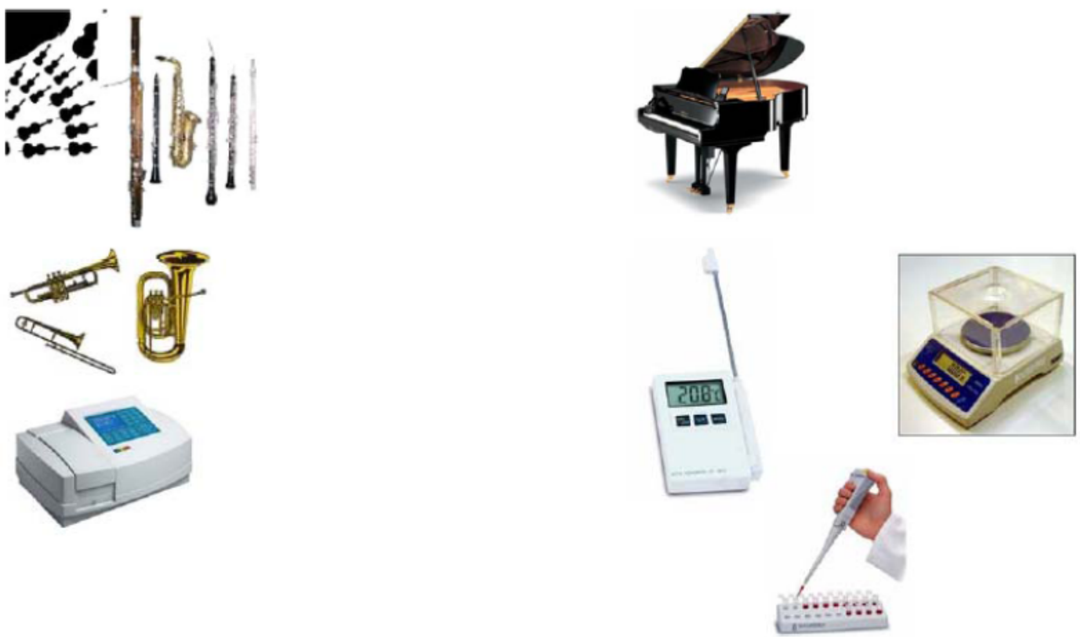
[2] „±1 hibakorlát", biscuit1, biscuit2

Megjegyzés:
A „miért is mérnénk, ha a mérendő aktuális értékét ismernénk” kérdésre speciális válasz: ha hitelesítjük[3] / kalibráljuk[4] a mérőeszközt, akkor *ismerjük* a mérendőt. Ez a minősítési, mérési bizonytalanságot „feltérképező” (vagy csak néhány paramétert beállító) folyamat történhet közvetlenül a mérés előtt, vagy stabil eszköz esetén korábban – szabályos időközönként is, esetleg külső szakértő / akkreditált[5] labor igénybevételével.

Szemléletes hasonlattal élve: ugyanaz a helyzet, mint amikor koncert előtt a zenekar tagjai referencia hanghoz igazítva „behangolják” (zenei)eszközeiket, kivéve pl. a zongorát (amit korábban, ha szükséges, egy szakértő hangol).

Measuring and musical instruments grouped according to when and who performs calibration and tuning

Measuring and musical instruments that are calibrated/tuned	Measuring and musical instruments that are calibrated/tuned
Each time just before the measurement/performance	On a regular base, when needed
By an analyst/by a musician	By external laboratory/expert



[Ábra: A. Majcen, Accred Qual Assur (2009)]

---

[3] Az eszköz **hitelesítése** során a *mérésügyi hatóság* műszaki vizsgálattal ellenőrzi és tanúsító jellel és/vagy hitelesítési bizonyítvánnyal igazolja, hogy az eszköz megfelel a hitelesítési engedélyében foglalt követelményeknek.
A *joghatással járó* mérés csak a mérési feladat elvégzésére alkalmas **hiteles** mérőeszközzel (hiteles anyagmintával), vagy használati etalonnal **ellenőrzött** mérőeszközzel lehet végezni.
(Joghatással jár a mérés, ha annak eredménye az állampolgárok és/vagy jogi személyek jogát vagy jogi érdekeit érinti, különösen, ha a mérési eredményt mennyiség és/vagy minőség tanúsítására - a szolgáltatás és ellenszolgáltatás mértékének megállapítására - vagy hatósági ellenőrzésre és bizonyításra használják fel; továbbá az élet- és egészségvédelem, a környezetvédelem és a vagyonvédelem területén.)

[4] A **kalibrálás** (*nem* hatósági tevékenység) azoknak a műveleteknek az összessége, amelyekkel (meghatározott feltételek mellett) megállapítható az összefüggés a mérőeszköz vagy a mérőrendszer *értékmutatása*, illetve a mérendő mennyiségnek mértékkel vagy anyagminta által *megtestesített*, vagy használati etalonnal *megvalósított* (aktuális) értéke között.

[5] minőség-hitelesített

„A mérés célja a *bizonyosság*,
de legalább is a bizonytalanság csökkentése."

ALAPEGYENLET: ADDITÍV MODELL (HÁROM EKVIVALENS ALAK)

Abszolút hiba: *H*

$$\boxed{x + H = N \bullet \Delta x}$$

x: *ismeretlen* mérendő, **A**nalóg (folytonos) **jel**
H: abszolút hiba, csak tartománya becsülhető, aktuális értéke *ismeretlen*
N: (meg)ismert mérőszám, EGÉSZ szám, **D**igitális (diszkrét) **adat**
Δx: ismert (választott) mértékegység

A **MÉRT ÉRTÉK**: $\boxed{m = N \bullet \Delta x}$, és a szorzás (•) *formális*, ha a mért érték *megjelenítés* (digitális kijelzés = display) a cél, azt **tizedespont és dimenzió** megadása helyettesíti; *valóságos*, ha pl. beavatkozó *jel*ként kell a mért érték, azt fizikai eszköz: **D/A átalakító** valósítja meg; x, H, Δx egynemű (és azonos dimenziójú) mennyiségek.

Példák (mért érték megjelenítés): $f = \boxed{92.1\ \text{MHz}}$ (vagyis a mérőszám $N = 921$, $\Delta f = 0.1$ MHz = 100 kHz a *legkisebb helyérték* értéke [a mérték*egység*] és M = 10^6, k = 10^3 ún. prefixum); $u = \boxed{0.05\ \text{V}}$ ($N = 5$, a vezető nullákat *nem* mértük, $\Delta u = 10$ mV és m =10^{-3}).

Kérdés: $N = 25$ és $\Delta t = 10$ ns (n = 10^{-9}) esetén $t = \boxed{?}$ (display)

Hibaterjedés: *összeadás és kivonás* műveletnél az abszolút hibák összegződnek. (Elvileg a hibák „kiejthetik" egymást, de ezt *nem* tudjuk!)[1] Csakis egynemű, azonos mérték-egységű mennyiségek adhatók össze.

Példa: $x_1 = 23 \pm 0.3$ cm és $x_2 = 17 \pm 0.3$ cm, ezzel $x_1 + x_2 = 40 \pm 0.6$ cm

Relatív hiba: *h*

$$\boxed{x \cdot (1 + h) = m}, \quad \text{ahol} \quad h = \frac{H}{x} \approx \frac{H}{m}, \quad \text{mert} \quad h << 1 \ (\text{azaz} \ x \approx m)$$

Szokásosan a relatív hibát **%-ban adjuk** meg (h•100); az egyenletben h nem % értékben szerepel!

Hibaterjedés: *szorzás és osztás* műveletnél a relatív (%-os) hibák összegződnek. (Eltekintünk a másodrendű kicsiny tagtól, vagyis a hiba hibájától.)[1]

Példa: $s = 15$ m, 2% és $t = 5$ s, 1% − ezekkel az adatokkal $v = s/t = 3$ m/s, 3%. (Megjegyzés: 3% esetén $h = 3 \cdot 10^{-2} = 0.03 << 1$.)

Szám hiba: *c*

$$\boxed{\left(\frac{x}{\Delta x}\right) + c = N}, \quad \text{ahol} \quad c = \frac{H}{\Delta x} \quad \text{és} \quad \textbf{min} \ |\mathbf{c}| < \mathbf{1/2}$$

A mérés *arány* „felfedezése" (pontosabban: az EGÉSZ rész, a mérőszám megadása − az egységgel történő összehasonlítással), az ezt megvalósító fizikai eszköz: **A/D átalakító**, ami tehát osztást realizál.

Jellegzetes a ±1 hibakorlát (|c| < 1), amely pl. „kapuzott esemény-számlálás" (időtartam ill. frekvencia mérés) esetén lép fel.

---

[1] Csak hibakorlát becsléseket tekintünk.

Az alapegyenlet jól szemlélteti, hogy egy folytonos mennyiség nagyságát megadó *valós* arány csak *diszkrét* számként: **mérőszám**ként ismerhető meg, amit az előzetesen kiválasztott, mesterséges nagyság: a mérték*egység,* és a becsült *hiba-sáv* értelmez!

A szám egyedül *nem* mérési eredmény és *van* mérési bizonytalanság. Különösen digitális kijelzésnél, pontosnak hihetjük a mért értéket, valójában ennek környezetében van (mégpedig a hiba-sávnak megfelelően) a mérendő aktuális értéke.

A mérésnek (az egységgel történő összehasonlításnak) egyik – de csak egyik! – rész-művelete lehet a 'számlálás', mint pl. „kapuzott esemény-számlálás" (időtartam ill. frekvencia mérésnél). A mérés referenciája egynemű (és azonos dimenziójú) a mérendő mennyiséggel. Egység-váltás lehetséges, az „új" mérőszám ugyanazt az értéket jelenti (pl. 72 km/h = 20 m/s).

Ezzel szemben, a diszkrét entitások (elemi részek, részecskék /pl. levegő szennyezettség/, objektumok, események, …) **darabszám**a közvetlen (le)számlálással adódik (tehát nincs elméleti, csak esetleg gyakorlati probléma), vagyis a számosság értéke pontos[2] és megvan a maga sajátos, természetes *egységé*: az '1' szám (1 entitás[3], ami *nem* osztható).

A közvetlen számlálás tehát nem ekvivalens a méréssel.

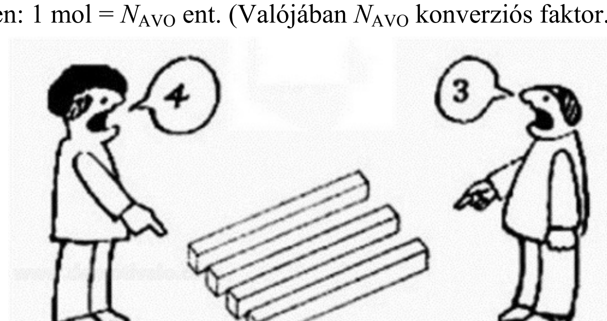
A (le)számlálás (vagyis a számosság) *bizonyosság*a[4] és a mérés *bizonytalanság*a a diszkrét entitás és a folytonos mennyiség különbözőségét tükrözi.

---

[2] Feltéve, hogy nem extrém nagy számosságról van szó.
Például a kémia használja a (makro- és mikro-világot összekötő) $N_{\mathrm{AVO}} \sim 6\cdot 10^{23}$ „egység-csomagot".

[3] Tekinthető tehát akár *dimenziós* mennyiségként is (a makroszkópikus minta számossága), a dimenzió: „ent" (az entitás *egység*e, konkrét esetben: pcl = number of particles, mcl = number of molecules, cnt = counts, cyl = cycles, …).

Ebben az értelmezésben: 1 mol = N_{AVO} ent. (Valójában N_{AVO} konverziós faktor.)



Megjegyzés (az extrém nagy számú *diszkrét* entitás *folytonos* mennyiségként való értelmezéséhez / észleléséhez): ha van érzékelhető különbség egyetlen (vagy néhány) entitás hozzáadásával, akkor az számosság, ha nincs, akkor nagyság. Mint például a *homokdomb-paradoxon* esetén: egyetlen vagy néhány (sőt több) homokszem még biztosan nem domb, de egy ponton túl (extrém sok homokszemnél) már igen. Kérdés persze: hol van ez a pont?

[4] Igen nagy értékű számosság esetén már valós a hiba lehetősége (pl. stadion beléptetésnél kettős számlálás vagy kihagyás), és így akár adható (többnyire szubjektív becsléssel) bizonytalanság hozzárendelés.

Metrizálási (számszerűsítési) mátrix:

A mérés **objektív**, **(mérő)eszközt használó** művelet, amely e két alapvető vonásával különül el más „számszerűsítési” műveleltől.

A köznyelv a „mérést” ennél tágabb értelemben használja. Gyakran mindenféle felmérést, vizsgálódást, adatfelvételt is így neveznek, holott az ide besorolt „értékelő becslés” (véleményalkotás) vagy „preferencia vizsgálat” (egyéni véleménytől függő előnyben részesítés, véleménykutatás) pusztán sorrendet („rang-skálát”) próbál megállapítani szubjektív, lélektanilag befolyásolt értékítélettel.

AZ EREDMÉNY ELŐÁLLÍTÁSA	AZ EREDMÉNY MEGÍTÉLÉSE/ÉRTÉKLÉSE **egységes (objektív)**	eltérő (személy függő)
mérőeszköz	**MÉRÉS**	-
„élő műszer” (szakértő személy)	értékelő becslés	preferencia vizsgálat

---

Szenzorok Miller-indexe:

Az érzékelők sokfélesége közötti *tájékozódást* segíti, első lépésként, az energia-átalakításra alapozott és a működtető (ún. segéd)energiát is tekintő durva osztályozás, amely a kristálytanban honos ún. Miller-index (x,y,z) mintájára rendszerezi a különféle érzékelőket.

Az index az érzékelőket a bemeneti (x), kimeneti (y) és segéd (z) **energia** hármas alapján csoportosítja:

energia fajta	***x***	***y***	***z***
mechanikai	+		+
termikus	+		+
villamos	+	+	+
mágneses	+		+
sugárzási	+		+
kémiai (biológiai)	+		+
			(0)

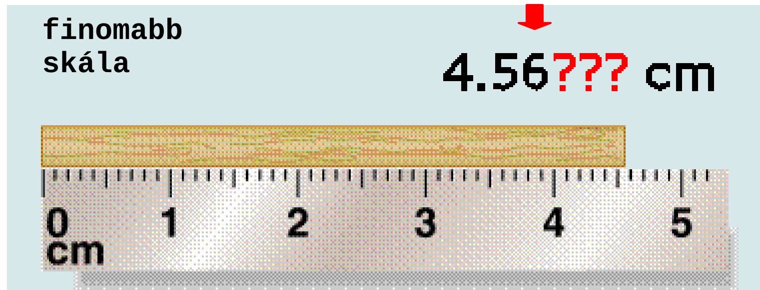
Példa: nyúlásmérő bélyeg – (*mech, vill, vill*)

Arányaiban domináns az y = *villamos* kimeneti energiájú érzékelők csoportja, a kedvező jel és adat feldolgozási és továbbítási lehetőségek miatt, ezért csak ezt jelöli a táblázat (bár fontos hányad a *mechanikai*, ill. *optikai* (sugárzási) kimenet is).

Speciálisan $z = 0$ az ún. aktív érzékelő, amely nem külső, hanem a bemeneti energiából nyeri a működéshez szükséges energiát.

A Miller-index szemléletes csoportosítás, de nem elégé részletes. További, egymásra épülő alosztályok (az információt hordozó jel, a működést leíró hatásmechanizmus, az alkalmazott technológia, az integráltsági és intelligencia fok, az alkalmazási terület, a pontosság stb. szerinti bontás) segíthetnek az eligazodásban és választásban.

Távolság mérés:



Ha a becsült számjegy (⬇) nulla, azt is meg kell adni!

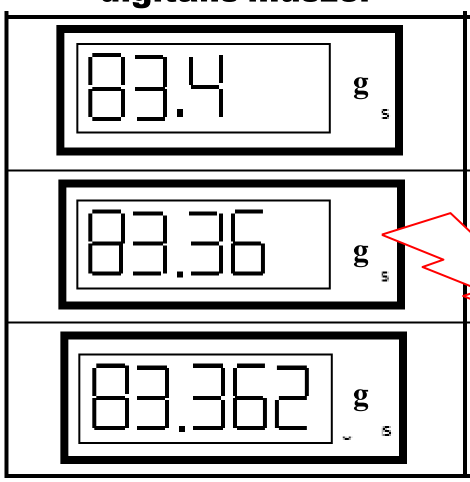
Tömeg mérés:

a mérési bizonytalanság egyik komponense:

digitális műszer

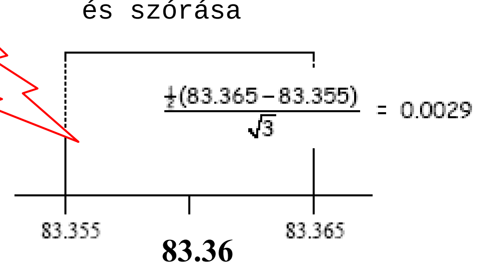
egyre
javuló
felbontás

„durva” és „finom”
(analitikai) mérleg



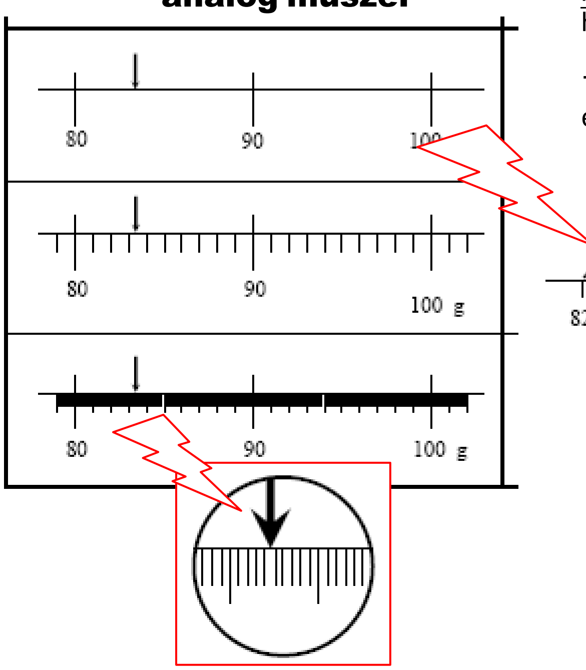
Egyenletes
hiba-eloszlás

felbontás korlát(±**1/2**)
és szórása



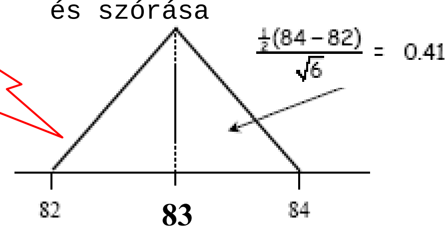
analóg műszer

egyre
finomabb
skála



Háromszög (Simpson)
hiba-eloszlás

leolvasás korlát(±**1**)
és szórása



Egy hossz-paradoxon:

Konkrét térképi elemek (partvonal, folyó) mérésénél már régen felfigyeltek arra, hogy a méretarány[1] nagymértékben befolyásolja a mérési eredményeket. Az első ilyen mérést még Penck végezte 1894-ben, az Isztriai-félsziget partvonalának egy részére.
(A kifejezés Steinhaustól származik, aki a Visztula folyó part-vonalára végzett Penckhez hasonló hosszméréseket.)

Gyakran nehéz a mérendő pontos definiálása is (mely tengerszinthez viszonyítunk, apály-dagály, egy tölcsértorkolat esetében hol végződik a folyó és hol kezdődik a tenger…).

Az Isztriai-félsziget partvonala

méretarány	**mért hossz (km)**
1:15 000 000	**105**
1:3 700 000	132
1:1 500 000	157.6
1:750 000	199.5
1:300 000	190.6
1:75 000	**223.81**

Mekkora a nanométer:

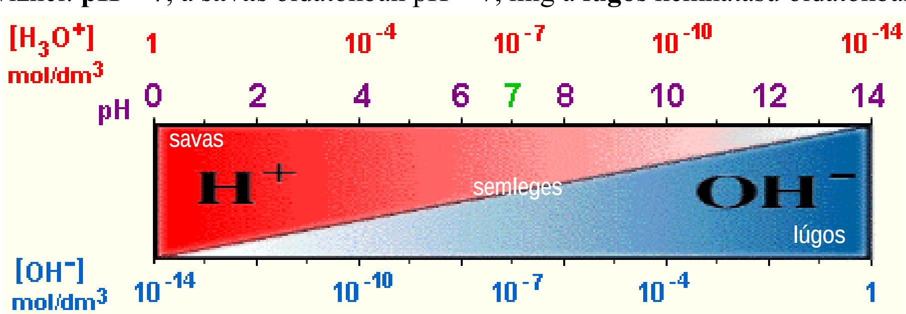
Naponta a kézen a köröm kb. tized mm (= $0.1 \cdot 10^{-3}$ m)-t nő.
Kérdés: mennyit nő a köröm 1 s alatt?

$$\frac{0.1 \cdot 10^{-3}[m]}{24 \cdot 60 \cdot 60[s]} = \frac{10^{-7}}{86.4} = \frac{100}{86.4} \cdot 10^{-9} \approx 1 \cdot 10^{-9} = 1\ [nm/s]$$

Válasz: „két szívdobbanás között” kb. 1 nm-t nő a köröm (a kézen, ennél legalább egy nagyságrenddel kevesebbet a lábon).

A pH skála:

Segítségével egyszerűen adható meg vizes oldatnál a **SAVASSÁG** (aciditás) vagy **LÚGOSSÁG** mértéke (Sørensen, 1909). Vizes oldatban a H_2O molekulák egy kis része H_3O^+ és OH^- ionokra disszociált[2] alakban található. **SEMLEGES** kémhatású, kémiailag tiszta vizes oldatban e két ion **koncentrációja** egyenlő: $[H_3O^+] = [OH^-] = 1 \cdot 10^{-7}$ [mol/dm^3].
A $[H_3O^+]$ arány logaritmusának (-1)-szeresét az un. *hidrogén-kitevő*t („pondus Hidrogenii”, hidrogén exponens)[3] jelöli a pH („pé-Há”): **pH = - log (H_3O^+/1 [mol/dm^3])**.
Így tiszta víznél: **pH = 7**, a **savas** oldatokban pH < 7, míg a **lúgos** kémhatású oldatokban pH > 7.



A (dimenzió nélküli) skálán a koncentráció **<u>10-szeres</u>** <u>megváltozás</u>ának (tehát 1 nagyságrendi változásnak!) felel meg <u>1 pH eltérés</u>. **A pH = 0 <u>nem</u> azt jelenti, hogy az oldat nem savas, épp ellenkezőleg!** Becsléséhez gyakran használnak *indikátor*anyagot, amely meghatározott pH értéknél megváltoztatja a színét („átcsap”).

---

[1] A térképen egységnyi hosszúság, rendszerint 1 cm, a valóságban hány centiméternek felel meg.
[2] Disszociáció = két (vagy több) részre bomlás
[3] power of Hydrogen = a hidrogén ereje

Gumiabroncs jelölések:

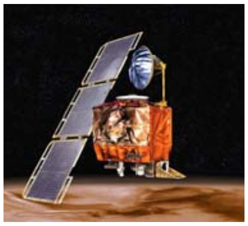
Példa: **P220/60 R16 80V**

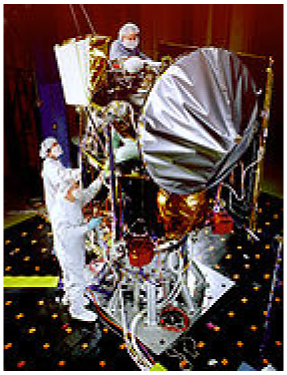
P: személyautó (Passanger car)
220: szélesség **mm**-ben
60: az oldalfal magasság és a szélesség **aránya %**-ban (oldalfal magasság: **?**)[4]
R: Radiál típus
16: felni átmérő **inch**-ben (inch = 2.54 **cm**), amire az abroncs való
80: terhelhetőségi **index szám** („80": max. súly abroncsonként 450 kg)
V: sebesség-határ betűjel („V": max. 240 km/h)

Angolszász mértékegységek

A tudomány **metrikus** és a közélet **angolszász** hosszúság egységei meglehetős zavart jelentenek Amerikában. Elképesztő példa erre a Mars Climate Orbiter űrmisszió (1999, a bolygó térképezésére és a légkör tanulmányozására), amely a NASA hivatalos elemzése szerint főként azért veszett oda, mert 57 **mérföld**[5] helyett 57 **km** magasan léptették be a Mars légkörébe.
A jelentés persze ennél *diplomatikusabban* fogalmaz: egyrészt közli a tényt, hogy 90 km magasság helyett 57 km-en lépett be a légkörbe, másrészt pedig hibaként felrója, hogy nem váltottak át bizonyos mennyiségeket angolszászról metrikus egységekre.

A Mars légköre ritka: a felszíni légnyomás mindössze 0,75%-a a földinek: 7,5 mbar,[6] szemben a földi 1013 mbar-ral (1 atm-val). A légkörének 95%-a széndioxid, 3%-a nitrogén, 1,6%-a argon és nyomokban van oxigén és víz.





The Mars Climate Orbiter was intended to enter orbit at an altitude of 140–150 km (460 000-500 000 ft)[7] above Mars. However, a navigation error caused the spacecraft to reach as low as 57 km (190 000 ft). The spacecraft was destroyed by atmospheric stresses and friction at this low altitude. **The navigation error arose because a NASA subcontractor (Lockheed Martin) used Imperial units (pound-seconds) instead of the metric system.** Following this incident, NASA reverted back (!) to using Imperial units as their only system of measurement, starting with the Mars Rovers in 2004.

---

[4] (220/100)·60 = 132 mm
[5] 1 angol mérföld (mile) = 1760 yards = 1609,3 m
1 yard = 3 láb (feet) = 36 hüvelyk (inches) = 0,9144 m
[6] 1 mbar = 100 Pa (pascal)
[7] 1 ft = 30,48 cm (ft: foot, láb)

FREKVENCIA MÉRÉS: RECIPROK MÓDSZER

1. Periódikus események gyakorisága (*f* frekvenciája) az ismétlődések időtávolsága (a *T* periódusidő) ismertében *számítható* (reciprok-képzéssel: f [Hz]= $1/T$[s]).

A frekvencia *közvetlenül* is mérhető a fellépő események meghatározott (τ) ideig történő (le)számlálásával, de „ritka” ismétlődés („kis” frekvencia) hosszú τ időtartamot kíván (elfogadható nagyságú mérőszámhoz, mert a mértékegység $\Delta f = 1/\tau$).

Például: a szívdobbanások átlagos üteme percenként 60 (= másodpercenként 1), vagyis $f_{szív} \approx 1$ [Hz], ezért érzékelünk/számlálunk „hosszú” ideig (legalább egy percig).

2. Kis frekvencia méréséhez előnyösebb a *reciprok* módszer, mert – bár összetettebb eljárás – jóval rövidebb mérési idő mellett is nagyobb felbontású eredményt ad.

Legyen a **MÉREND**ő frekvencia $f = \mathbf{98.7}$ Hz, és a display-szóhossz $d = \mathbf{5}$ digit.

(a) Periódusidő mérésnél legyen $n = \mathbf{1}$ (a mért periódusok száma),[1] az időmérés referenciája (órajele) pedig $f_0 = 1$ MHz = $\mathbf{10^6}$ Hz. Így ($n = 1$ esetén) a mértékegység $\Delta T = 1/f_0$, és ezzel a mérendő arány:

$$\frac{T}{\Delta T} = \frac{f_0}{f} = 10131.71...$$

Ennek egész része a periódus-mérőszám, s mivel a **±1** számlálási hiba *háromszög (Simpson)* eloszlású, ezért az eredmény (71%-os eséllyel)[2]

$$N_i = 10132.$$

(b) A frekvencia számítás metrikai egyenlete[3]

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N_i \cdot \Delta T} = \left(\frac{1}{N_i} \cdot 10^k\right) \cdot \left(\frac{f_0}{10^k}\right) = N \cdot \Delta f_{REC}$$

A mérési adat osztásának (reciprok-képzésének) eredménye, ami 1-nél kisebb,

$$\frac{1}{N_i} = 0.000098697196...$$

Az osztás szóhossza „nem korlátos”, **5** digites kijelzéshez most a tizedes pontot $k = \mathbf{9}$ értékkel[4] lehet (jobbra) eltolni (vagyis a hányadost 10^k-nal szorozni, hogy megkapjuk a frekvencia mérőszámot)

$$N_5 = 98697,$$

aminek mértékegysége

$$\Delta f_{REC} = (f_0/10^k) = (10^6/10^9) \text{ Hz} = 10^{-3} \text{ Hz} = \mathbf{0.001} \text{ Hz}.$$

A nyers **MÉRÉSI ADAT** tehát

$$f_{mért} = N_5 \cdot \Delta f_{REC} = \mathbf{98.697} \text{ Hz}.$$

---

[1] Mérhetnénk több, egymást követő periódus tartamát is (n >1, egész), de ez a legkisebb mérési idő.

[2] $N_i = 10131$ (29%-os esélyű) mérőszámmal is végezzük el a számítást.

[3] Egyszerű aritmetikai „trükk” (10^k-nal való szorzás/osztás) segít, hogy megkapjuk az frekvencia egész mérőszámát és az azt értelmező mértékegységet. (Az osztás *előtt* k értéke ismeretlen!)

[4] Ha a display-szóhossz: d, akkor – v számú *vezető nullát* elnyomva (!) – lehet $k = \text{v} + d$.

(c) Ellenőrizzük, hogy a mérésből „örökölt" számlálási hiba miatt vajon megengedhető-e ez a Δf_{REC} felbontás? (Vagy lehetne-e még nagyobb is a display szóhossza?)
Tudjuk, hogy az egység célszerű értékére a korlát

$$\Delta f_{REC} \geq \frac{(1/f_0)}{\tau} \cdot f = \frac{\text{"}\mathit{idő\_alap}\text{"}}{\text{"}\mathit{mérési\_idő}\text{"}} \cdot \text{"}\mathit{mérendő\_frekvencia}\text{"}$$

Helyettesítve az adatokat (ahol a „*mérési_ idő*" ≈ T = 1/f és f ≈ 100 Hz = 10^2 Hz):

$$\Delta f_{REC} \geq (1/10^6) \cdot 10^2 \cdot 10^2 \text{ Hz} = 10^{-2} \text{ Hz} = \mathbf{0.01} \text{ Hz}$$

Csak d = **4** digit kijelzés célszerű ebben az esetben (és nem a kiinduló d = 5), így a **MÉRT ÉRTÉK**[5]

$$f_{mért} = N_4 \cdot \Delta f_{REC} = \mathbf{98.69} \text{ Hz.}$$

(d) Ilyen („század Hz-es") felbontású eredményhez *közvetlen* frekvencia mérési módszernél jóval nagyobb mérési időre (τ kapuidőre) lenne szükség, hiszen $\Delta f = 1/\tau$ miatt τ = 100 s = $\underline{10^2 \text{ s}}$ kellene.
Ezzel szemben *reciprok* módszernél a „mérési_idő" ≈ T = 1/f ≈ 1/100[Hz] = 0.01 s = $\underline{10^{-2} \text{ s}}$! Ez *négy* nagyságrenddel kedvezőbb (nem számítva a reciprok-képzés műveleti időtartamát). Növekvő frekvenciával ez az előny ugyan fokozatosan csökken, de egészen $f \leq f_0$ értékig érvényes. Tehát a „kis" frekvencia-jelző valójában elég nagy frekvenciát jelent. (*Kérdés*: miért f_0 a kritikus frekvencia?)

(e) *Átlag* periódusidő (n > 1, egész) méréssel – a mérési idő rovására – tovább javítható a felbontás,[6] hiszen a választott f_0 (= $\mathbf{10^6}$ Hz = 1 MHz) referencia értékkel a reciprok módszer „**6 digit/sec**" felbontási képességű! (Érdemes ezt ellenőrizni, a mérésnél n = 100 periódus érték választásával.)

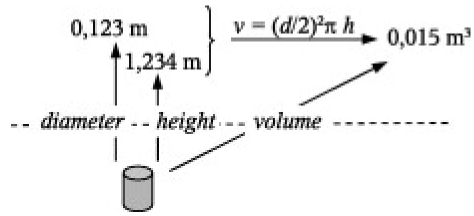
---

[5] Kerekítés helyett itt is egyszerű *csonkítás*sal adtuk meg az adatot.

[6] n > 1 esetben a ±1 számlálási hiba nem egyetlen, hanem több, egymást követő, összefüggő periódusra vonatkozik, így a relatív hiba lecsökken.
Az n = 1 esetet nevezhetjük *pillanatérték* mérésnek is (mert beszélhetünk-e frekvenciáról, ha nem zajlott le legalább egy periódus?).

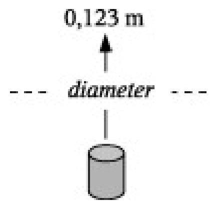
Tömör, hengeres test térfogata (v: *volume*)

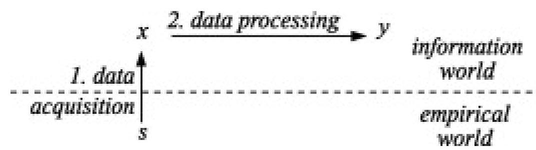
(1) **geometriai modell:** „szabályos test”
Az átmérő (d: *diameter*) és a magasság (h: *height*) mérésével <u>számítható</u> a térfogat. Feltételezzük, hogy az alaplap kör (és π értékét ismerjük).



Megjegyzések:

(a) az átmérő (vagy magasság) mérése ún. <u>közvetlen</u> mérés (*1. data acquisition*). Ezekből az adatokból számítjuk (*1. és 2. data processing*) a mérendőt: ún. *közvetett* mérés





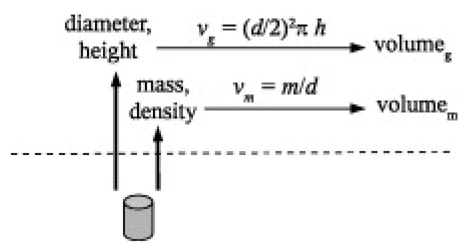
(b) a (közvetlen) mérés a kapocs a jelenségek valós világa (*empirical world*) és a tudás virtuális világa (*information world*) között
(c) **mérési bizonytalanság** (relatív hibakorlát becslés, *eltekintve* a modell-hibától, hogy ti. a valóságos test mennyire „deformált”, lényegesen eltér-e a modelltől): legyen h_d az átmérő, h_h a magasság mérésének relatív hibakorlátja, a metrika s(1+h) = x alapegyenletét felhasználva a mért érték relatív hibakorlátja

$$h_v \approx \mathbf{2}\cdot h_d + h_h$$

mert $h_d \ll 1$ és $h_h \ll 1$ (eltekintünk a másod- és harmadrendűen kicsi tagoktól)

(2) **mechanikai modell:** „egynemű anyag”
Tömeg (m: *mass*) méréssel és a sűrűség (d: *density*) ismeretében <u>számítható</u> a térfogat.

Kérdés: honnan ismerjük a sűrűség adatot?
Válasz: azonos anyagú, ismert (!) térfogatú test tömegének korábbi méréséből.



Megjegyzések:

(a) a kétféle modell (empirikusan) független és így (modell szinten) $v_g = v_m$
(b) Adjunk v_m-re relatív hibakorlát becslést!
(c) a választott modell határozza meg a szükséges méréstechnikai apparátust, a konkrét mérés tárgya a modell valamely paramétere, az eredmény értelmezése kapcsolódik a modellhez (ami pontossági korlátot is szab(hat) a mérési eljárásra)
(d) az, hogy két független módszerrel is megadható a mért érték (és ezek összevethetők, megfelelnek egymásnak), alkalmas validálásra (mérési módszer érvényesítő ellenőrzésére)

[Ábrák: L. Mari et al., Measurement 42 (2009)]

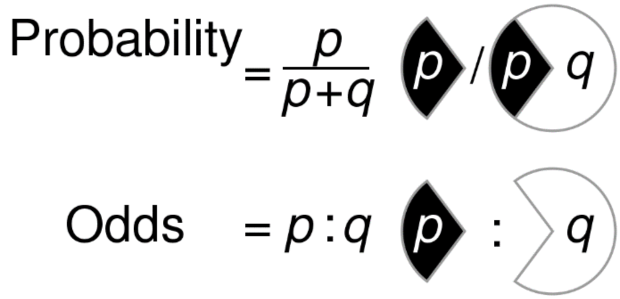
Amikor a (mérési) módszer definiálja a mérendőt

“Mi az IQ? Az, amit az IQ-teszt mér!”

Először röviden az esélyről (ami a “fogadási tét” arányszáma).

Az **esély** (O : **odds**) a *kedvező*/megvalósuló (wins/success) esemény-szám **aránya** a nem-megvalósuló/*kedvezőtlen* (losses/failure) események számához. Valószínűséggel (relatív gyakorisággal) kifejezve, pl. kockával a „6-os dobás” *esély*e

$$O = \frac{1}{5} = \frac{1/6}{5/6} = \frac{p}{q} = \frac{p}{1-p} \qquad (p+q=1)$$

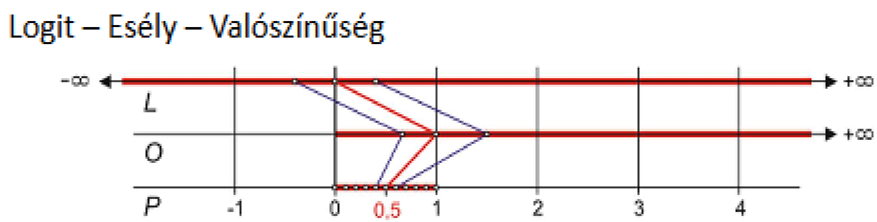


és megfordítva, ennek *valószínűség*e

$$p = \frac{O}{1+O} = \frac{1}{6}$$

Csak *kicsi* esély *közelíthető* valószínűséggel (pl. ha O = 1% =1/100, akkor p = 1/101 $\approx$ O).

Logit (log of odds - "**log**istic un**it**", L): az *esély* (természetes alapú) logarimusa (analógiaként: az *arány* dB “egység”ben történő megadására gondoljunk)



Az *esélyek aránya* logit “egység”ben különbség (“távolság”)

$$\log\left(\frac{p_1/(1-p_1)}{p_2/(1-p_2)}\right) = \log\left(\frac{p_1}{1-p_1}\right) - \log\left(\frac{p_2}{1-p_2}\right)$$

(tehát ún. intervallum skála, mint pl. amit hőmérséklet mérésnél használunk).

De hogyan kerül a csizma az asztalra?

Pszichológiai teszteknél az egyén *képessége* (f) és egy kérdés *nehézsége* (k) **arány**át gyakran, mint a [Rasch modell](#) esetén, az eséllyel teszik egyenlővé

$$\frac{f}{k} = \frac{p}{1-p}, \quad \text{vagyis} \quad p = \frac{f/k}{1+f/k}$$

a pozitív (helyes) válasz valószínűsége (p) az f/k értékkel arányos (és $f = k$ esetén $p = 0.5$).

A kérdés nehézségét a modell az alapján definiálja, milyen képesség-szintű személy válaszol rá helyesen $p = 0.5$ valószínűséggel (*átlagos* képességű személy $p = 0.5$ valószínűséggel ad helyes választ).

A mérendő (*f*: képesség → Θ) és a „műszer paraméter” (*k*: nehézség → δ) aránya *logit* „egység”ben

$$L = ln(f/k) = ln(f) - ln(k) = \Theta - \delta$$

Kérdéses *f* és *k* direkt összehasonlítása, hiszen ezek a tulajdonságok *nem* egyneműek.
Viszont, a kérdés *nehézsége* interpretálható úgy, hogy az nem más, mint az a *minimális képesség*, amely a pozitív (helyes) válaszhoz szükséges.
Mivel a modell a személy-képességet és a kérdés-nehézséget egymáshoz viszonyítva definiálja, a skálának nincs abszolút nulla pontja. 1 *logit* megfelel $\Theta - \delta = 1$ értéknek.

A képességet és a kérdés nehézségét a teszt adatokból kell becsülni: **a (mérési) művelet definiálja tehát a mérendőt** („a teszt mér valamit, nevezzük azt képességnek”).

A *helyes* válasz valószínűsége $\boldsymbol{p = \exp(\Theta - \delta) / (1+ \exp(\Theta - \delta)) = \exp(\Theta - \delta) / K}$.

A mérendő (Θ) ilyen formában történő megadása (a konkrét mérési egyenlet helyett) a méréstechnikában szokatlan, és az is, hogy azt empirikus táblázatból (teszt adatokból) kell megadni.

Ha ***a*** személy (Θ_a képességgel) *helyesen* válaszol δ nehézségű kérdésre, viszont ***b*** személy (Θ_b képességgel) *nem*, ennek együttes valószínűsége: $p_{ab} = p_a (1-p_b) = \exp(\Theta_a - \delta) / K_a K_b$, mivel feltételezhető a függetlenség.
Fordított esetben (***b*** válaszol helyesen és ***a*** nem): $p_{ba} = \exp(\Theta_b - \delta) / K_a K_b$, így arányuk $p_{ab} / p_{ba} = \exp(\Theta_a - \Theta_b)$, vagyis $\Theta_a - \Theta_b = ln(p_{ab}) - ln(p_{ba})$. Két személy képességének „log távolsága” becsülhető relatív gyakorisággal, ami azt jelenti, hogy a képesség és a nehézség paraméter(ek) szeparálható(k).

A műszer paraméterek (= a k_i kérdés nehézségek) függetlennek tekinthetők egymástól, ezért egy ***a*** személynél a p_{ai} valószínűségek összegezhetők (succes probability = total raw score).

A módszerrel-definiált mérendő (vagyis az, hogy művelet-specifikus az eredmény) és hogy a”műszer kalibráció” (k_i becslése) a teszt adatokból történik, különösen az anyagtudományok (mint anyag-keménység), a biológia (pl. fájdalom-fokozatok), a kémia (oktánszám) területén gyakori.
Mivel nincs igazi „referencia módszer”, a bizonytalanság becslés „szürke terület”.

Metrikai dimenzió, (mérték)egység

Egy mérhető mennyiségnek alapvető jellemzője a nagysága (értéke). A metrikában a (mérő)számnak önmagában, a (mérték)egység nélkül, nincs jelentése: valamely mennyiség nagyságát a *szám* (a mért érték numerikus része) és az *egység* **szorzata** adja.[1]

Az **egység** a mennyiség speciális értéke, amit referenciaként használunk. A mérendő mennyiség és az egység tehát *azonos* metrikai dimenziójú és *egynemű* mennyiség!

1. Hét <u>független</u> **alap**egységből (és más, előzetesen ezekből definiált egységekből) lehet a *származtatott egység*eket létrehozni,[2] a mennyiségek definiáló egyenlete[3] alapján. Számos ezek közül külön, speciális nevet is kapott.

<u>Például</u>: a villamos ellenállás egysége az *ohm* [Ω]. Az Ohm törvényből ($R = U/I$) kiindulva és a zárójelbe tett nem alapegységeket (*V: volt, W: watt, J: joule, N: newton*) a definiáló összefüggésekkel helyettesítve

$$\Omega = \frac{(V)}{A} = \frac{(W)/A}{A} = \frac{(J)/s}{A^2} = \frac{(N)\cdot m}{A^2 \cdot s} = \frac{kg \cdot m^2}{A^2 \cdot s^3} = kg \cdot m^2 \cdot A^{-2} \cdot s^{-3}$$

kapjuk az egység meghatározását az alapegységekből. (Ami ugyan nem egy „szívderítő" kifejezés, de jól mutatja az *alap*egységektől való függést: a dimenziót)

A *speciális név* hasznos, mert segíti

- az egység egyszerű leírását/megadását,
- más egységgel való kombinálásnál (új egység származtatásnál) a világos értelmezést,

és lehetővé teszi

- az egység többszörösét / törtrészét jelölő *prefixum* használatát.[4, 5]

$$1.2\ \mathrm{M}\Omega\ (= 1.2\cdot 10^6\ \Omega = 1200000\ \Omega)$$

$$(I = U/R\ =)\ 5\ \mathrm{V} / 1\ \mathrm{k}\Omega = 5\ \mathrm{mA}\ \ [\mathrm{k} = 10^3, \mathrm{m} = 10^{-3}]$$

2. Az *azonos* metrikai dimenzió, ami végül a definiáló egyenlet <u>algebrai</u> <u>egyszerűsítés</u>é-ből adódik, nem jelenti azt, hogy a mennyiségek is azonosak. Ilyenkor a valódi jelentést a definiáló összefüggés határozza meg.

<u>Például</u>: (a) Jól értelmezett mennyiség egy gépkocsi „fogyasztása 100 km-ként", ami SI egységben (*V*: üzemanyag térfogat, *L*: távolság)

$$F = \frac{V}{L} = \frac{\ell_1^{\ 3}}{\ell_2} \qquad \left[\frac{m^3}{m} = m^2\right],$$

dimenziója „terület" (ℓ_1 az ekvivalens térfogatú kocka éle, ℓ_2 a megtett távolság).

---

[1] A mérés *választott* egységhez **hasonlítja** a mérendőt, tudni kell tehát, hogy mekkora az egység, mert annak értéke befolyásolja a szám értékét. (Ahogyan a viccben is: „Mi mennyi?")
A metrikai „szorzat szabály" (a „Maxwell tény") alapján kapjuk a <u>mért</u> <u>érték</u>et.

[2] A SI egységek *koherens* egységek: egy mennyiség egységét az alapegységekből ugyanaz (!) az egyenlet határozza meg, mint ami magát a mennyiséget definiálja. Így (és ez igen előnyös) a mennyiséget meghatá-rozó összefüggés nemcsak a *mért érték*re, hanem a puszta *mérőszám*okra is érvényes (ha azok SI egységben adottak).

[3] Megfigyelésekből leszűrt, mennyiségeket összekapcsoló törvény.

[4] Ez fontos *dimenzió nélküli* mennyiségeknél.

[5] Sok nullánál könnyű tévedni!

A definiált érték persze *nem* terület. (Az egyszerűsített metrikai dimenzió „ekvivalens terület” ≈ keresztmetszet; ezt az „érdekes” egységet nem is igen értené a vásárló …).

(b) A „lehullott csapadék” mennyiségét mm egységben adják meg a meteorológiai jelentésekben. SI egységben (*V* az adott térfogat meghatározott *T* területen)

$$C = \frac{V}{T} = \frac{\ell_1^{\,3}}{\ell_2^{\,2}} \qquad \left[\frac{m^3}{m^2} = m\right],$$

egyszerűsített dimenziója valóban „hosszúság” (de nem igazán „távolságot” reprezentál, bár könnyű elképzelni a lehullott víz „mélységét” egy medencében).

Az eltérően definiált, tehát *nem* egynemű, ám azonos dimenziójú mennyiségeket *nem* lehet összehasonlítani!

3. A mindennapi életben *meglepő* – de jól értelmezhető – egységeket is használunk, amelyek nem SI szabvány szerintiek („törvényen kívüliek”).

<u>Például</u>: arra a kérdésre, hogy „milyen messze” van a mozi, a válasz lehet „15 perc séta” vagy „2 perc biciklivel”. A távolságot tehát idő-egységgel fejeztük ki, *feltételezve* egy **adott** sebességet (az $s = \boldsymbol{v} \cdot t$ összefüggés alapján).[6]

4. *Dimenzió nélküli* mennyiség[7] nagysága puszta szám és nem igényli, hogy megnevezzük az ’egy’séget, ami: **1** (az 1-es szám, a metrikai „szorzat szabály” értelmében). Bár nem a „szokásos értelemben” vett egység, gyakran van külön neve. Ez a *speciális név*, a definícióra utalva, megszünteti a félreérthetőséget és lehetővé teszi prefixum használatát.

<u>Például</u>: a (sík)szög SI egysége a *radián* [rad], ami speciális név és 1-et jelent, mert a φ szög (két egymást metsző egyenes közötti „terjedelem”: nyílás-szög) nagysága

$$\varphi = \frac{s}{r} \qquad [rad] = \left[\frac{m}{m} = m \cdot m^{-1} = m^0 = 1\right],$$

ahol *s* a körnek a szöggel befogott íve, *r* a kör sugara. (A *teljes* körív: $s = K = 2\pi \cdot r$.)
Elég szokatlan, hogy a *radián* a (sík)szög SI egysége, hiszen a napi gyakorlatban a *fok* [°] használatos (és nem valószínű, hogy ez megváltozik). Az ok: rad egységben egyszerűen írhatóak le a matematika trigonometrikus összefüggései, valamint a ciklikus jelenségek (2π reprezentál egy periódust, lásd: szinuszos jel [$\varphi/2\pi = t/T \;\rightarrow\; \varphi = 2\pi f t = \omega t$]).[8]

---

[6] A jelenleg érvényes méter-definíció az *állandó* fénysebességhez köti és terjedési-idő mérésre alapozza a métert.

[7] *Relatív* mennyiség (arány), vagy olyan származtatott mennyiség, amely egységének kiszámításánál – a definiáló egyenletbe helyettesítve az alapegységeket – valamennyi tag „eltűnik”: az **alap**egységek hatványkitevője *nulla*. (Tudjuk a <u>matematiká</u>ból: $x^0 = 1$.)

[8] A *radián* **2π rész**re osztja a *K* kör-kerületet, míg a megszokott *fok* **360 rész**re. Lehetne persze **egy-rész**re is osztani a kört, ez a *fordulat* ([rev], revolution). A konverzió (az eltérő egységek közötti reláció):

$$2\pi \text{ rad} = 360° = 1 \text{ rev}.$$

Például: (1/4) rev = 90° = (π/2) rad, és 1° = (1/360) rev, ill. 1° = (π/180) rad = 17.5 mrad.
Mondhatni: a *fok* a gyakorlat, a *radián* pedig az elmélet (és a SI) egysége. Az 1 rad, ill. 1° nem ugyanazt a fizikai szituációt írja le! (Mert: $K/2\pi = s/\varphi_{rad}$ ill. $K/360° = s/\varphi°$)

Megjegyzés: Az *f* frekvencia egysége a *hertz* [$Hz = 1/s = s^{-1}$], mivel a „ciklusok száma” dimenzió nélküli. Az ω (= 2πf) körfrekvencia egysége [$rad/s = 1/s = s^{-1}$], mert a *radián* csak speciális név (és 1-et jelent). Bár azonos [s^{-1}] a két mennyiség – alapegységre redukált – metrikai dimenziója, de jól láthatóan eltérően definiált (tehát *nem* egynemű) mennyiségekről van szó.

5. Két *egynemű* mennyiség **arány**ának számértéke *független* az **egység-választás**tól, ez „a relatív mennyiség állandóságának” törvénye.

Jelölje Δn ill. Δm a *kétféle* (eltérő nagyságú, de egynemű) egységet, ezekkel természetesen *eltérő*: N ill. M lesz egy A mennyiség mérőszáma. Könnyen belátható:

$$\left.\begin{array}{lll} A_1 = N_1 \cdot \Delta n = M_1 \cdot \Delta m & \rightarrow & \dfrac{N_1}{M_1} = \dfrac{\Delta m}{\Delta n} \\ & & \\ A_2 = N_2 \cdot \Delta n = M_2 \cdot \Delta m & \rightarrow & \dfrac{N_2}{M_2} = \dfrac{\Delta m}{\Delta n} \end{array}\right\} \quad \left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \left(\frac{M_1}{M_2}\right)$$

Jól látható az **egység-váltás** „inverz arányosságának” törvénye is: ha pl. $\Delta m = \mathbf{k}\cdot\Delta n$, akkor $M_1 = (\Delta n/\Delta m)\cdot N_1 = \mathbf{k}^{-1} \cdot N_1$, vagyis ha az egység $\mathbf{k}$ ($= \Delta m/\Delta n$) faktorral módosul, akkor a mérőszám $\mathbf{k}^{-1}$ faktorral *megváltozik*.

Például: V = 90 [km/h] sebesség érték mennyi [m/s] egységben? (km = 10^3 m, h = 60·60 s)

$$90[km/h] = 90 \cdot \frac{1000}{3600}[m/s] = 90 \cdot \frac{1}{3.6}[m/s],$$ vagyis $N_1 = 90$, $\mathbf{k} = 3.6$

A relatív nagyságok állandóságából következik, hogy a **származtatott mennyiség**et definiáló függvény (egyenlet) típusa csakis „hatvány-forma” lehet:

$$S = c \cdot A^a \cdot B^b \cdots$$

ahol A, B ... az S mennyiséget meghatározó mennyiségek, a, b … kitevők (előjeles számok), c konstans (lehet dimenziós is).

Egyváltozós esetre: $S = f(A)$ és az a kérdés, *milyen f() függvény* lehet a kapcsolat?

A mért értékek: $S = N\cdot\Delta s$ ill. $A = M\cdot\Delta a$ (ahol N, M a mérőszámok, Δs, Δa az egységek). Az egyenletnek a mérőszámokra is igaznak kell lennie ($N = f(M)$), ezzel $f(M)\cdot\Delta s = f(M\cdot\Delta a)$, és $M = 1$ (azaz $A = \Delta a$) esetén $\Delta s = f(\Delta a) / f(1)$, vagyis $f(M\cdot\Delta a) = [f(M)\cdot f(\Delta a)] / f(1)$.

Ez azt jelenti (átírva a változókat), hogy az $f(xy) = [f(x)\cdot f(y)] / f(1)$ egyenlet megoldását keressük. A megoldás:

$f(x) = c\cdot x^a$, ahol a kitevő (előjeles szám), c konstans (dimenziós is lehet),

erről helyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk.

Megjegyzés: ha az A mennyiség **dimenzió nélküli** (puszta szám, vagyis $\Delta a = 1$), akkor *nincs kikötés* az *f()* függvényre és pl. *sin(), exp(), log()* ... is lehet, ezek argumentumában – mint tudjuk – csakis szám szerepelhet.

A származtatott mennyiség **dimenziója** tehát „az alapmennyiségek dimenzióinak hatványfüggvénye”. (Lásd az 1. pontban: *ohm* egység.)

A mennyiségi egyenletre fennáll „a dimenzió homogenitás” törvénye, magyarán: egy mennyiségi egyenlet mindkét oldalán **azonos** dimenzióknak kell lenniük.

Klasszikus példa: a fizikából tudjuk, hogy egy ℓ [m] hosszúságú, m [kg] tömegponttal jellemzett (matematikai) inga t [s] lengésideje (kis kitérés esetén)

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

független a tömeg értékétől (!), és g [m/s^2] a nehézségi gyorsulás. Az alap-mennyiségek **dimenziója:** $[t] = \mathrm{T}$, $[\ell] = \mathrm{L}$, $[m] = \mathrm{M}$, a származtatotté: $[g] = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$.

(a) Keressük $t = const\cdot\ell^a\cdot m^b\cdot g^c$ alakban a megoldást *(a,b,c* előjeles szám), *dimenzionálisan*

$$\mathrm{T} = 1\cdot\mathrm{L}^a\cdot\mathrm{M}^b\cdot(\mathrm{LT}^{-2})^c = \mathrm{L}^{a+c}\cdot\mathrm{M}^b\cdot\mathrm{T}^{-2c} \quad ((const)^0 = 1, \text{ dimenzió nélküli})$$

A homogenitás törvényéből: $a+c = 0$, $b = 0$, $c = -½$, innen $a = ½$. Azt kaptuk, hogy

$$t = const \cdot \ell^{1/2} \cdot g^{-1/2} = const\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,,$$

az analízis megadja a függvény-formát (és megmutatja, hogy a lengésidő dimenzionálisan sem függhet a tömegtől!), de *nem* határozza meg – mert dimenzió nélküli – a *const* értékét (azt kísérlettel kell megállapítani, vagy a fizikai szituáció elemzéséből adódik).

(b) Mérjük az időt a „szívdobbanások ütemével”: 1 [szív] = τ [s], a távolságot „könyökkel”: 1 [könyök] = λ [m], ezzel az *egység-váltás*sal a nehézségi gyorsulás „új egysége”:

$$1\left[m/s^2\right] = \frac{1/\lambda\left[\textit{könyök}\right]}{1/\tau^2\left[\textit{szív}^2\right]} = \frac{\tau^2}{\lambda}\left[\textit{könyök}/\textit{szív}^2\right]$$

A váltást helyettesítve a kiinduló összefüggésbe és egyszerűsítve

$$\left(1/\tau\right)\cdot t = 2\pi\sqrt{\frac{\left(1/\lambda\right)\cdot\ell}{\left(\tau^2/\lambda\right)\cdot g}} = 2\pi\cdot\left(1/\tau\right)\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,,$$

ami t-re ugyanaz az egyenlet [($1/\tau$)-val egyszerűsítve], mint az eredeti, mert – mint tudjuk – a mennyiségi egyenlet *nem függ* az egység-választástól (ha azok *koherens* rendszer tagjai).

(c) Az eredeti mennyiségi egyenlet átrendezhető

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{t\cdot g^{1/2}}{\ell^{1/2}} = 1$$

formába, ami persze ugyanazt az információt tartalmazza, mint az eredeti, de egy *dimenzió nélküli* csoportban. (Dimenzió nélküli mennyiségeknek vagy azok csoportjainak az értéke *nem függ* az egység-rendszer választásától, így ezek alapvető jelentőségűek.)

<u>Megjegyzés</u>: erre alapozva – elsősorban sokváltozós esetben – *szisztematikusan* célszerű keresni a mennyiségi kapcsolatot. „Ha n dimenziós változó van és k alapmennyiség, akkor n-k független[9] *dimenzió nélküli* csoport képezhető [10] és ebből kapjuk a megoldást”. Illusztratív példánkban 4 változó (t, ℓ, m, g) és 3 alapdimenzió (T, L, M) van, így (szerencsére) n-k = 1. Ez a dimenzió nélküli csoport: $t\cdot\ell^a\cdot m^b\cdot g^c$, vagyis dimenzionálisan $\mathrm{T}\cdot\mathrm{L}^a\cdot\mathrm{M}^b\cdot(\mathrm{LT}^{-2})^c = 1$. Ebből $1\text{-}2c = 0$, $a+c = 0$, $b = 0$, innen $c = ½$, $a = -½$, visszakapjuk a $const\cdot t\cdot g^{1/2}\cdot\ell^{-1/2} = 1$ formát.

A **metrikai dimenzió** tehát a mennyiség „természete”: a *tulajdonság*, ez az <u>osztályba sorolás</u> (klasszifikáció) *különíti el* egymástól az eltérő mennyiségeket.
Valójában persze a dimenzió egy „formula”, amely az *alapegységektől való függést* definiálja, így önmagában a mennyiség „belső természetéről” nem ad teljes információt, hiszen *nem egynemű*, származtatott mennyiségek is lehetnek *azonos* dimenziójúak.
Ezért a dimenzió vizsgálat, bár korrekt és jól feltárja a kapcsolatokat, nem old(hat) meg teljesen egy [összetett] problémát (ahogy ezt a választott [egyszerű] példa is illusztrálja).

---

[9] Az s_1, s_2, …s_k mennyiségek *dimenzionálisan függetlenek*, ha egyik sem fejezhető ki a többiek hatvány-szorzataként; másképp fogalmazva: ezen mennyiségeknek nincs olyan hatvány-szorzata, amely dimenzió nélküli. <u>Például</u>: a sebesség ($[v] = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}$), a sűrűség ($[\rho] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-3}$) és a nyomás ($[p] = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{T}^{-2}$) dimenzionálisan *nem* függetlenek, mert $[p] = [\rho]\cdot[v]^2$, vagyis $p/(\rho\cdot v^2)$ *dimenzió nélküli* mennyiség.

[10] Ez az átrendezés redukálja a változók számát, így egyszerűsíti a megoldást.

Mit mond a dimenzió analízis a rézhengerben eső mágnesről?

Ami klasszikus varázslat (kísérleti tapasztalat!)

> "**Lenz törvénye** fontos, *indukciós* törvény,
> Mágneses mezőben hogyan megy az *örvény*:
> Az indukált áram irányát úgy hordja,
> Hogy *akadályozza*, aki létre hozta."

- ha *nem mágnest* ejtünk le egy rézcsőben , akkor a test **szabadon** esik (mintha a rézcső ott sem lenne),
- addig egy *erős mágnes* (meglepően, az indulás után igen hamar) **állandó (v) sebességgel** esik és így lényegesen megnő az esési idő!

Megjegyzendő, hogy az örvény (vagy Foucault) áram közismert alkalmazása a villanyóra:

http://www.hit.bme.hu/~papay/edu/KommTech/4_amper.pdf

(1) Két erő hat az m tömegű mágnesre: a gravitáció és a mágneses fékezés: $m \cdot g = k \cdot v$, ahol k a mágneses csillapítási tényező (dim k = kg/s), amelynek meghatározásához az elektomágneses elmélet teljes fegyvertára kell(ene).

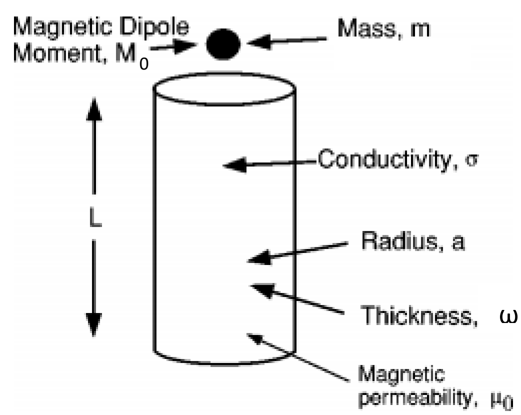
E helyett egyszerűbben kapunk eredményt a *dimenzió analízis* segítségével (ami annak "erejét" is mutatja.)

http://www.hit.bme.hu/~papay/edu/KommTech/Dimenzio.pdf

(2) Több tényező befolyásolja k értékét (ami arányos a csőben fellépő örvényárammal):

a cső átmérője (sugár: a), falvastagsága (ω), anyagának vezetőképessége (σ), a mágneses permeabilitás (μ_0), a mágneses dipól momentum (M_0).
Természetesen k nem függ a cső L hosszától, a mágnes m tömegétől és a g gravitációs gyorsulástól.

A teljes analízis (amit tanulságos áttekinteni) **itt** található (S.R. Bistafa, 2012).



Az eredmény:

$$k = c\,\frac{\mu_0^2 \sigma M_0^2 \omega}{a^4}$$

A c konstans dimenzió analízissel *nem* adható meg, azt kísérlettel kell megállapítani. (Lásd az idézett munkában: $c \approx 28.76$, ami jól közelíti az elméleti $c \approx 22.76$ értékket.)

Háromszög (Simpson) hiba-eloszlás

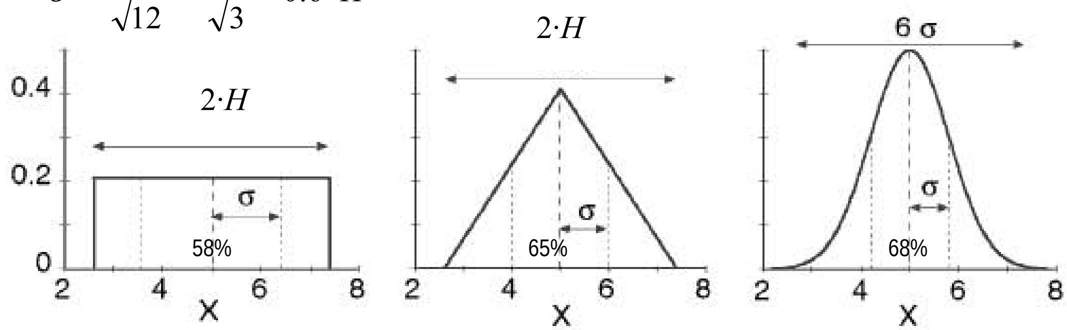
1. Specifikációs adatokból történő **mérési bizonytalanság** becsléshez minden meghatározó hiba-komponensnek a **σ szórás** értékére van szükség, ami a **±*H*** specifikált hibakorlátból adható meg. Feltételezzük, hogy a hibák *szimmetrikus* eloszlásúak.

(a) Ha a **±*H* hibakorlát** <u>adott</u> (vagyis 2·*H* a hiba terjedelme) <u>és</u> nagyobb valószínűséggel „várható” kisebb hiba (kevésbé valószínű, hogy aktuális értéke a tartomány szélén lehet), akkor *háromszög* eloszlás feltételezhető, míg ha ilyen ismeret/információ nincs, akkor *egyenletes* (négyszög alakú) eloszlás a modell (ami „konzervatívabb”, nagyobb szórású becslés).

(b) Ha a **±*H*** hiba **99.7%-os** (vagy 95%-os) **megbízhatósági intervallumú** (bizalmi szintű), tehát „**± 3σ** (vagy ± 2σ)” értékkel <u>adott</u> – vagyis 6·σ (vagy 4·σ) a hiba terjedelme, akkor a modell *normális* (harang görbe alakú) eloszlás.[1]

$$\sigma = \frac{2 \cdot H}{\sqrt{24}} = \frac{H}{\sqrt{6}} \approx 0.4 \cdot H$$

$$\sigma = \frac{2 \cdot H}{\sqrt{12}} = \frac{H}{\sqrt{3}} \approx 0.6 \cdot H$$



azonos (m = 5) várható érték, hasonló terjedelmű szóródás
Egyenletes, háromszög (Simpson) és normális (Gauss) eloszlás
(a görbe alatti terület: 1)

(c) A ***H*** <u>fél</u>szélességből[2] (ill. normális eloszlásnál a bizalmi szintet is ismerve) a táblázat összegzi **σ** számítását.

Például: *digitális* műszer **felbontás** korlátja (a ±½ tartományban) egyenletes, *analóg* műszer kevésbé éles **leolvasás** korlátja (a ±1 skála-osztáson) háromszög eloszlással modellezhető.

Eloszlás típus	***H*** osztója (σ értékéhez)
egyenletes	$\sqrt{3}$
háromszög	$\sqrt{6}$
normális (99.7%)	3
normális (95%)	2

[1] Az eloszlások σ szórásának kiszámítása (ill. a négyszög, háromszög és harang-görbe egyenletének felírása, stb.) a <u>matematikusok</u> <u>dolga</u>.
Az ábra feltünteti, hogy a „ ± σ tartomány” (= 2·σ terjedelem) az esetek hány %-át tartalmazza.
A *normális* eloszlás nem korlátos (matematikai modell!), de nagy hiba fellépése igen kicsi (≈ 0) valószínűségű. Precíz méréseknél szokásos a „hat szigma” módszer (→ 12·σ hiba-terjedelem, 99.9997%-os bizalmi szint).

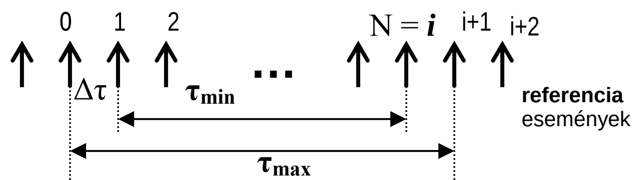
[2] *Relatív* hiba megadásnál a ± jel gyakran nem is szerepel a hibaspecifikációban.

2. *Háromszög* eloszlású a digitális **időtartam** (Start, Stop) **mérés**nél használt alapmódszer: „a mérendő idővel kapuzott referencia-esemény számlálás" ún. **±1** számlálási hibája (count error). Az egyenletes referencia-események $\Delta\tau$ távolsága a mértékegység.

(a) Miért ±1 a hiba <u>terjedelme</u>?

Az eljárás idődiagramja[3] közvetlenül megmutatja, hogy a megfigyelt N = *i* (egész) mérőszámot csakis $\boldsymbol{\tau_{min}} \le \boldsymbol{\tau} \le \boldsymbol{\tau_{max}}$ értékű $\boldsymbol{\tau}$ időtartam generálhatta:

$$\boldsymbol{\tau_{min}} = (i\text{-}1)\cdot\Delta\tau \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\tau_{max}} = (i+1)\cdot\Delta\tau$$



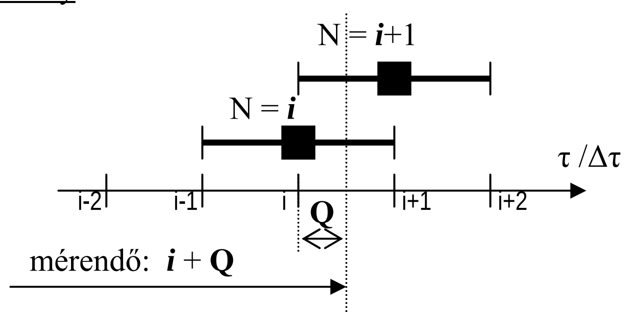
A minimális értéknél: <u>még</u> <u>éppen</u> számlálásra kerül az „1" <u>és</u> „*i*" jelű esemény, míg a maximális értéknél: <u>nem</u> számlálódik a „0" <u>és</u> „*i*+1" jelű referencia-esemény. Ha tehát a $\boldsymbol{\tau}$ szélességű kapujel „ *i*" számú eseményt „fog közre", akkor N = *i*. Mindkét szélsőséges eset persze igen kicsi valószínűségű!

Az egyenlőtlenségbe helyettesítve a határokat, átrendezéssel

$$-1 \le \left(\frac{\tau}{\Delta\tau}\right) - i \le 1\,,$$

vagyis a **c** = $(\tau /\Delta\tau) - i$ számlálási hiba [az egységre normált mérendő $(\boldsymbol{\tau} /\boldsymbol{\Delta\tau})$[4] és a mért érték (***i***) eltérése] korlátos: |**c**| < 1, azaz a **HIBAKORLÁT**: **±1**.

Az N = *i* megfigyelésből (a mérésből) tehát csak azt tudjuk, hogy a – fent megállapított – <u>mért érték</u> <u>körüli</u> <u>tartomány</u>ban volt a mérendő:



(b) Mit mondhatunk a hiba <u>eloszlásá</u>ról?

Legyen az aktuális mérendő értéke $(\boldsymbol{\tau} /\boldsymbol{\Delta\tau}) = \boldsymbol{i} + \mathbf{Q}$, ahol *i* egész szám és $0 \le \mathbf{Q} < 1$ (a törtrész). Ezt az előző ábrán be is rajzoltuk.

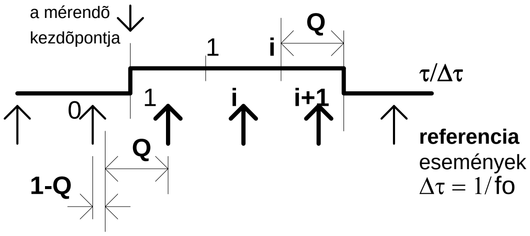
Látható, hogy csakis N = ***i*** <u>vagy</u> N= ***i*+1** mérőszámot kaphatunk ilyen értékű mérendőnél (és más érték *nem* adódhat!).

---

[3] Könnyű ideális eseményeket (= ideális számlálandó referencia órajeleket) rajzolni az ábrán. Valójában véges felfutású és a számláláshoz szükséges szélességű impulzusokkal van dolgunk. Amíg pl. a „közvetlen kapuzás" okozta pulzus-csonkítás megfelelő áramköri felépítéssel kivédhető, addig az esemény fellépés (a véges-szint átlépés komparálás) és ugyanígy a Start és a Stop idő-hibája is része a mérési bizonytalanságnak. Ezeket itt nem elemezzük.

[4] A $\Delta\tau$ mértékegységre <u>normált</u> bemenetet, a valós értékű arányt tekintjük mérendőnek (és nem magát a τ időtartamot). <u>Ezért</u> puszta szám (**±1**) a hibakorlát.

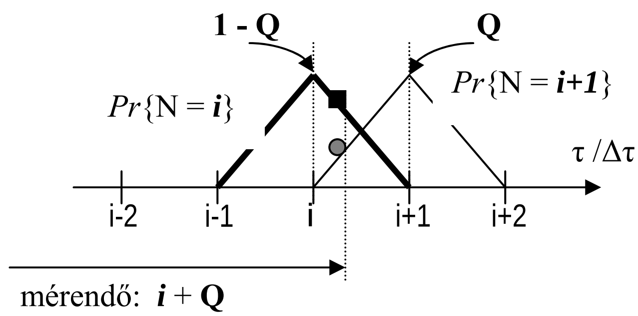
De mitől függ, hogy éppen melyik érték lép fel (a kettő közül?)
Válasz: ezt „a mérendő kezdőpontjának” aktuális (a referencia órajelhez viszonyított) helyzete dönti el és a törtrész (**Q**) befolyásolja (az ábrán ***i*** = 2):



<u>Ha</u> a kezdőpont a referencia(óra)-periódus **Q**-val jelzett részében lép fel (mint az ábrán), akkor N = ***i +1***, egyébként pedig (<u>ha</u> az **1-Q** részben van a Start, akkor) N = ***i*** mérőszám a mérés eredménye.
Mivel nincs ismeretünk arról, hogy két referencia esemény között hol lép fel a Start, feltételezzük – ebben a tartományban – a kezdőpont *egyenletes* eloszlását.[5] A geometriai arányokból a két eset valószínűsége:

$$Pr\{\mathrm{N} = \mathbf{i}\} = \mathbf{1\text{-}Q} \quad \text{és} \quad Pr\{\mathrm{N} = \mathbf{i+1}\} = \mathbf{Q}, \qquad \text{ahol } 0 \le \mathbf{Q} < 1$$

Felrajzolva mindkét **Q**-függést („*i*” értéke az origó!), kapjuk a hiba-eloszlásra a **HÁROMSZÖG** formát (kiterjesztve két szomszédos szakaszra is a rajzot):



Ha tehát „*i*” érték közelében van a (τ /Δτ) mérendő, azaz **Q** kicsi, akkor az N = ***i*** mérőszám sokkal valószínűbb (mint az N = *i*+1). Ebből persze *nem* jósolható meg, hogy egy mérésnél mi jön ki, az eredmény véletlen.

(c) <u>Példa</u>: legyen a mérendő időtartam τ = 28.3 μs és a mértékegység Δτ = 10 μs (azaz a referencia események gyakorisága f_0 = (1/Δτ) = 100 kHz). Ebből a *normált* mérendő értéke (τ /Δτ) = **2.83** = 2 + 0.83, így ***i*** = 2 és **Q** = 0.83.

Egy mérésnél a mérőszám N = **3** (83%-os eséllyel) **vagy** N = **2** (17%-os eséllyel).

3. És itt meglódulhat a fantáziánk: mit kapunk, ha ilyen feltétel mellett pl. 100 mérést végzünk és ennek *átlagát* vesszük? (Tudjuk: az átlagolás csökkenti a bizonytalanságot.) 100 esetből várhatóan (!) 83 esetben: **3**, míg 17 esetben: **2** az egyedi mérések eredménye, ezek átlaga: (83·**3** + 17·**2**)/100 = **283**/100 = **2.83** (ennek egysége Δτ = 10 μs, így a mért érték: 2.83•10 μs = 28.3 μs), tehát átlagolással a mérendő *törtrésze is* becsülhető!

[5] Ez azt jelenti, hogy a referencia-esemény sorozat (az órajel) és a mérendő kezdőpontja (a Start) <u>nincs szinkron</u> kapcsolatban. Ez feltételezhető, mivel a referencia és a mérendő különálló forrás.
Ha viszont mégis csak fennáll (valamilyen okból) a szinkron kapcsolat, akkor *ismételt* kísérleteknél mindig azonos (!) mérőszám adódik (tehát az itt kapott hiba-eloszlás *nem* használható).

Valójában ez a konkrét (átlag)érték csak ritkán adódhat (hiszen az esély *csak valószínű,* de nem biztos), és különböznek az egyes átlagolások eredményei is.
Érdemes a statisztikai átlagolást egy kissé részletesebben is elemezni, hogy ennek az eredménynek a *szóródására* is kapjunk adatot.

Végezzünk az előbbi feltétellel $\boldsymbol{n}$ számú, egymástól *független* mérést. A j-edik egyedi mérésnél a mérőszám értéke:

$$N_j = \boldsymbol{i} + b_j, \text{ ahol } b_j = \mathbf{0} \text{ vagy } \mathbf{1}, \text{ és } Pr\{b_j = \mathbf{0}\} = \mathbf{1\text{-}Q}, \quad Pr\{b_j = \mathbf{1}\} = \mathbf{Q}$$

A mérések <u>átlaga</u>:

$$N_a = \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} N_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(i + b_j\right) = i + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j = i + \frac{1}{n}\cdot\beta$$

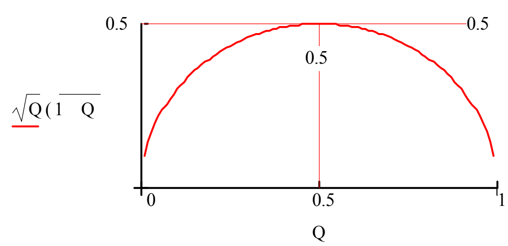
A <u>matematikus</u> <u>mondja</u>: β *binomiális* eloszlású valószínűségi változó (mert β éppen azt adja meg, hogy *két* lehetséges kimenetelből hány esetben valósult meg az egyik: a **Q** valószínűségű $b_j = \mathbf{1}$ esemény).
β aktuális értéke *egész* szám: $0 \le \beta \le n$, várható értéke: $m_\beta = n\cdot\mathbf{Q}$, szórásnégyzete pedig: $(\sigma_\beta)^2 = n\cdot\mathbf{Q}\cdot(1\text{-}\mathbf{Q})$.
Az átlagérték becslés tehát *torzítatlan*, mert N_a <u>várható értéke</u>

$$m_a = i + \frac{1}{n}\cdot m_\beta = i + Q$$

és ez éppen a mérendő (ahogyan ezt már az előző példában is „józan ésszel" beláttuk), N_a <u>szórása</u> pedig

$$\sigma_a = \frac{1}{n}\cdot\sigma_\beta = \frac{\sqrt{Q\cdot(1-Q)}}{\sqrt{n}} \le \frac{1/2}{\sqrt{n}},$$

tehát egy méréshez képest $\sqrt{n}$ -szer *lecsökken* (ez ismert "ökölszabály" a statisztikus átlagolásnál), a felső becslés az alábbi ábrából olvasható ki:



Az átlagolással kapott <u>mért érték</u>:

$$\tau \approx N_a\cdot\Delta\tau = \left(i + \frac{\beta}{n}\right)\cdot\Delta\tau = \underbrace{\left(n\cdot i + \beta\right)}_{E}\cdot\underbrace{\frac{\Delta\tau}{n}}_{e}$$

ahol "*E* (= egész)" az új **mérőszám**, és "*e*" az új **mértékegység**, ami *n*-szer *jobb*!

Maga az egyedi méréseket végző számláló akkumulálja (szummázza) az *E* átlagot (tehát a realizálás egyszerű), *n*-nel a végeredmény könnyen skálázható.

<u>Megjegyzés</u>: az *egység* (*felbontás*) $\boldsymbol{n}$-szer, a *bizonytalanság (szórás)* azonban csak $\sqrt{n}$ **-**szer javul (növekvő *n*-nel egyre bizonytalanabbak a legkisebb helyértékű jegyek).

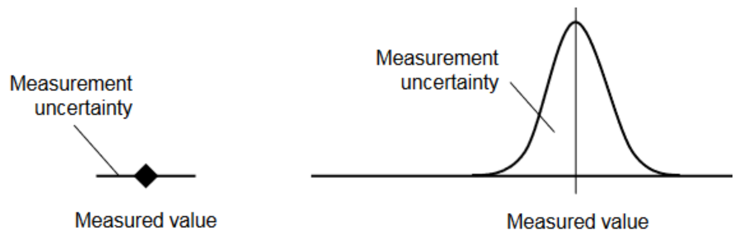
<u>Tanulság</u>: "zajos" (ingadozó) értékekből – pl. átlagolással, a mérési idő rovására – az „eredeti felbontáson túl" is kihámozható információ.

Határérték-túllépés komparálás

A *mérési bizonytalanság* (**σ**: szórás) jelöli ki azt a ± *H* **hibasáv**ot (az ***m*** *mért érték* körül, szimmetrikusan), amelyben a mérendő *aktuális* (valódi, ismeretlen!) értéke található, nagy valószínűséggel.

H (**fél**szélesség) értéke a hiba**eloszlás**tól függ

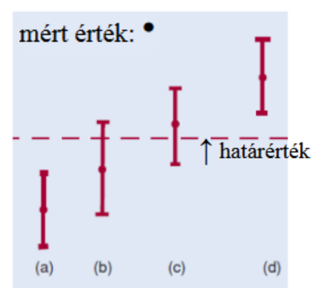
- négyszög (egyenletes) $H = \sqrt{3}\sigma$
- háromszög (Simpson) $H = \sqrt{6}\sigma$
- normális (Gauss) $H = 3\sigma$ (**korlát!**, 99.7%-os megbízhatóság)



http://www.hit.bme.hu/~papay/edu/KommTech/Simpson.pdf

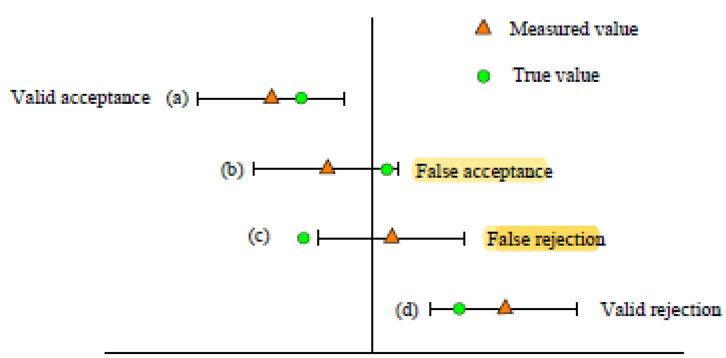
Határérték (limit) komparálásnál (Go/NOgo):

- az (a): Go és (d): NOgo eset teljesen egyértelmű,
- míg a (b) és (c) eset „elfogadható” (*accept*) vagy „elutasítható” (*reject*) – függően a döntés egyéb feltételeitől (pl. életvédelem, gazdaságosság, ár...)

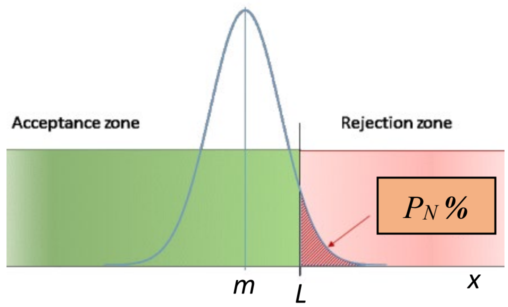


http://www.hit.bme.hu/~papay/edu/KommTech/DenominateNumber.pdf

Ha ugyanis a hibasávba esik a limit, akkor *rossz döntés* is hozható: (b) a “vevő” rizikója az, hogy *nem* elfogadható mért értéket is jónak minősít, míg (c) az “eladó” rizikója, hogy elvet elfogadható értéket. (Az ábrán (c) esetben az ismertlen, valódi érték kívül esik a hibasávon, ami csak igen kis valószínűséggel fordulhat elő! Standard JCGM 106)



(1) A hibaeloszlás felhasználásával adható meg a *határérték-**túllépés** P_N% valószínűsége*. Ezt összevetve a minimálisan elfogadható *döntési D_N% szint*tel kapunk megbízható döntési információt: ha $P_N\% \geq D_N\%$, akkor **nem** elfogadható mértékben lép(het)i túl a mért érték a limitet: **NOgo**. D_N% a maximálisan tolerálható rizikótól függ (hogy ti. rossz döntést hozzunk).



A *túllépés* P_N valószínűsége (a "terület")

$$P_N = \int_L^F f(x-m)dx$$

f(x) a mérés hibájának sűrűségfüggvénye : *négyszög, háromszög vagy normális* (mint az ábrán),
m mért érték (*H* **fél**szélesség-értékű hibasávval),
L limit (**fix** határérték),
$F = m + H$ a hibasáv felső korlátja.

Ez a "terület" (integrál) *négyszög és háromszög* eloszlásnál egyszerűen **terület-arány**ból adható meg. *Normális* hibaeloszlás esetén **táblázat**ból számítható P_N értéke.

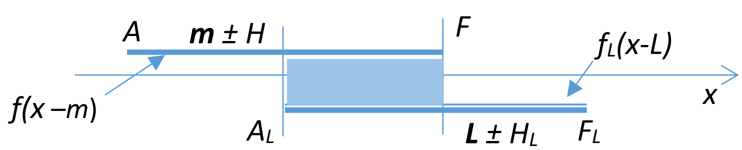
A teljes hibasávra a teljes "terület": 1 (vagyis 100%), és az $A = m - H$ alsó hibasáv korláttól L-ig $\boldsymbol{P} = 1 - P_N$, ez az *elfogadás* (**Go**) valószínűsége.
Ha $m = L$, akkor $P_N = 0.5$ (vagyis 50 % a túllépés valószínűsége), és $F < L$ esetén $P_N = 0$.

(2) Gyakran az *L* határérték is *mérési adat*, tehát $\boldsymbol{\sigma_L}$ mérési bizonytalanságú és így $H_L = k\cdot \sigma_L$ **fél**szélességű hibasávval terhelt, ahol *k* a *mért L* limit $f_L(x)$ hibaeloszlásától függ: *négyszög, háromszög vagy normális*. Ekkor két, $m \pm H$ és $L \pm H_L$ szélességű, többnyire részben átlapolódó intervallumot kell összevetni!

Ha nincs átfedés, akkor a döntés egyszerű: $F\ (= m + H) < A_L\ (= L - H_L)$ esetén Go, míg $A > F_L$ esetben egyértelműen NOgo.

Átfedésnél az *átlapolódó* "terület(ek)" együttes $\boldsymbol{P_K}$ valószínűsége [a valószínűségek ÉS (szorzat) kapcsolata] a "*döntés-képtelenség*" mértéke, és különösen éles helyzetben, pl. biztonság, egészségügy esetén írható elő olyan D_K döntési küszöb, amelyet ez a P_K valószínűség **nem** léphet túl.

Egy példa:



ahol a $\boldsymbol{P_K}$ "*döntés-képtelenség*" valószínűsége

$$P_K = \left(\int_{A_L}^{F} f(x-m)dx\right) \cdot \left(\int_{A_L}^{F} f_L(x-L)dx\right)$$

f(x) az *m* mért érték hibájának sűrűségfüggvénye: *négyszög, háromszög vagy normális* ,
m mért érték (*H* **fél**szélesség-értékű hibasávval),
F = *m* + *H* a mért érték hibasávjának felső korlátja,
$f_L(x)$ a mért *L* limit hibájának sűrűségfüggvénye: *négyszög, háromszög vagy normális* ,
L **mért limit** (H_L **fél**szélesség-értékű hibasávval),
$A_L = L - H_L$ a mért *L* limit hibasávjának alsó korlátja,

az *elfogadás* (vagyis a nem-túllépés) ***P*** valószínűsége pedig, a szükséges normalizálással,

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_{A}^{A_L} f(x-m)dx + \int_{F}^{F_L} f_L(x-L)dx\right)$$

A = *m* - *H* a mért érték hibasávjának alsó korlátja,
$F_L = L + H_L$ a mért *L* limit hibasávjának felső korlátja.

A valószínűségek: a "területek" (integrálok) *négyszög és háromszög* eloszlásnál egyszerűen **terület-arány**ból adhatók meg, *normális* hibaeloszlás esetén **táblázat**ból számíthatók. A mért érték és a mért limit hibájának sűrűsűségfüggvénye eltérő lehet.

(3) Az *m* mért érték és a (mért) *L* limit egynemű (azonos dimenziójú) és azonos mértékegységű mennyiség. A mérési eredmény(ek) megadásának *szükséges* része a mérési bizonytalanság becslése (→ mért adat és becsült hibasáv), így – mérés feltételeitől függően – a hiba valószínűségi sűrűségfüggvénye hozzárendelhető (az esetek többségében *normális* eloszlás). A mérési bizonytalanság kiértékelése persze nem rutin feladat és nem pusztán matematika, megköveteli a mérendő és a mérési módszer alapos ismeretét.

A mérési bizonytalanság meghatározásának és kifejezési formájának előírása (Standard JCGM 100: szabványban rögzített normatíva, műveleti definiciók), és tegyük hozzá: a kreativitás és a józan ész biztosítja a mérések egységességét és erre támaszkodva a döntések megbízhatóságát.

http://www.hit.bme.hu/~papay/edu/KommTech/5_A.pdf

A mért érték hibaeloszlása „kódolja" a mérést/kiértékelést végző személy tudását és gyakorlati ismereteit, ő alkotja meg a mérés modelljét és felelős az eredmény minőségéért.

A mindennapi életben számos esetben, mint pl. környezetvédelem, egészségügy, ipari folyamat-irányítás területén szükséges határérték-túllépés komparálás, ez csökkenti a rossz döntés rizikóját.

consider the sum of n quantities each having a rectangular PDF of the same semi-width, where n ranges from 1 to 9. Figure 1 shows successive convolutions used to produce PDFs for the partial sums of these quantities.

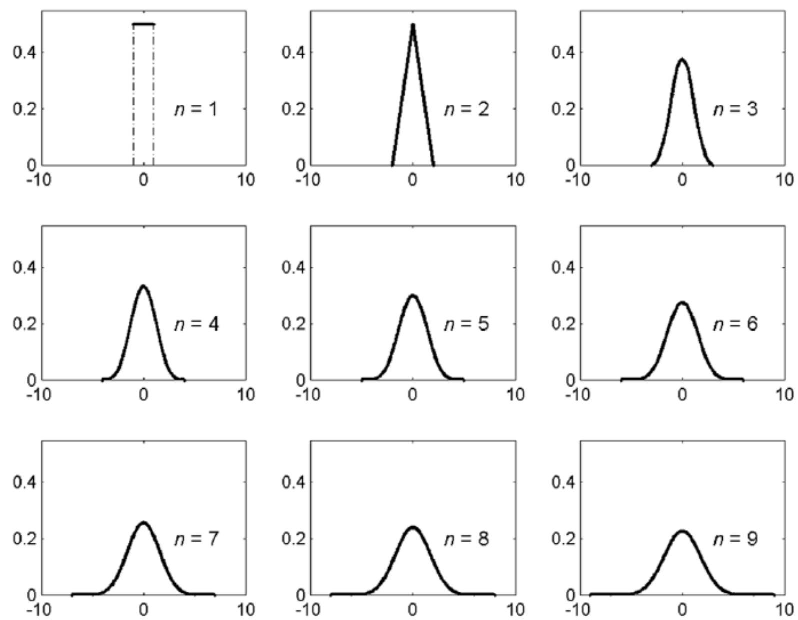


Figure 1. PDFs for the sum of n quantities (in arbitrary units) each having a rectangular PDF of semi-width 1 unit.

Figure 2 shows the PDF for $Y = X_1 + X_2 + X_3$ with $X_1 \sim \mathrm{N}(10.0, (0.1)^2)$, $X_2 \sim \mathrm{R}(-1.0, 1.0)$ and $X_3 \sim \mathrm{R}(-0.5, 0.5)$,

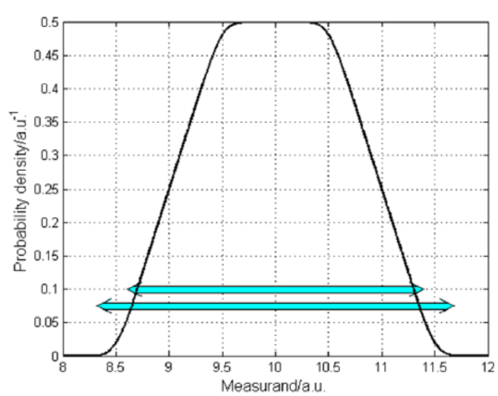


Figure 2. PDF for $Y = X_1 + X_2 + X_3$, with X_1 Gaussian and X_2 and X_3 rectangular, and 99 % GUM and exact (upper) coverage intervals.

Gaussian-like behaviour can be discerned in the tails, and trapezoidal-like behaviour, arising from the convolution of the two rectangular distributions, elsewhere.

LOGaritmikus kontra LINeáris skála

Nagy dinamikájú **mérőszám** (*arány*!) megadásához célszerű a kis értéket kiemelő, a nagyot összenyomó LOGaritmikus skála. (A *log* argumentumában csak pozitív szám szerepelhet, és tudni kell, hogy mennyi a mérőszámot értelmező mérték*egység*!)

Teljesítmény (P) mérésnél pl. a gyakran használt *dBm* esetén, vagyis ha *1 mW* a **referencia**-szint (a mértékegység):

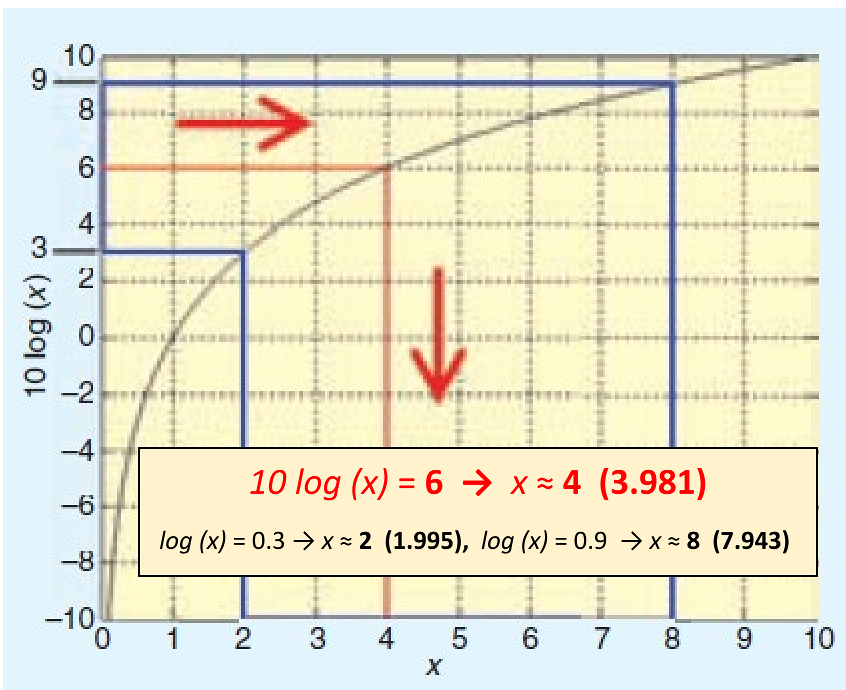
$$P_{[dBm]} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{[mW]}}{1_{[mW]}}\right)$$

Az alkalmazott viszonyítási alapra (a referenciára) utal a decibel (*dB*) melletti jel (*m*), a referencia-szintet mindig meg kell adni!

http://www.hit.bme.hu/~papay/edu/Db/Decibel.htm

A mért értékre *dBm*-ben specifikált, a mérési bizonytalanság által meghatározott **hibasáv** LINeáris skákán *nem* lesz szimmetrikus.

<u>Példa</u> (Carobbi, 2010): 6 [*dBm*] mért értéknél ha 3 [*dBm*] a hibasáv **fél**szélessége, akkor a teljesítmény *arány* lineáris skálán $x = 4$ (1*mW* referenciával), és ezen a lineáris skálán a hibasáv határai 2 és 8 (*mW* egységben).



Ha tehát a decibelben mért érték: $y_d \pm H_d$ (H_d **fél**szélességű szimmetrikus hibasávval), az ennek megfelelő x adat LINeáris skálán (a definiáló $y = 10 \cdot \log(x)$ egyenlet alapján)

$$x = 10^{\frac{y_d}{10}}\text{, az alsó hibakorlát: } A = 10^{\frac{y_d - H_d}{10}} = \frac{x}{10^{H_d/10}}\text{, a felső: } F = 10^{\frac{y_d + H_d}{10}} = x \cdot 10^{H_d/10}$$

Amíg LOGaritmikus skálán a mért érték a (mérési bizonytalanság által meghatározott és szimmetrikus) hibasáv határok között „félúton” van (vagyis a LOG hibasáv határok „*aritmetikai* átlaga”), addig LINeáris skálán az ennek megfelelő adat a LIN hibasáv határok *geometriai* átlaga ($x = \sqrt{A \cdot F}$).

*

Fordított eset.

A metrika alapegyenlete LINeáris skálán

$$x + H = N \cdot \Delta x \quad \rightarrow \quad \frac{x}{\Delta x}(1+h) = N, \text{ és } h = \frac{H}{x} \approx \frac{H}{m}$$

x: mérendő, H: *abszolút* hiba, N: mérő**szám**, Δx: mérték**egység**, h: *relatív* hiba (praktikusan az $m = N \cdot \Delta x$ *mért érték*re relatív, mert h < 1).

Ez az érték (teljesítmény adat, $\Delta x = 1\ mW$ referenciával) LOGaritmikus skálán

$$10 \cdot logN = 10 \cdot log\left[\frac{x}{\Delta x}(1+h)\right] = 10 \cdot log\left(\frac{x}{\Delta x}\right) + 10 \cdot log(1+h)$$

Felhasználva az

$$ln(z) = \log(z) \cdot ln(10) \quad \text{és} \quad ln(1+z) \approx z - \frac{z^2}{2}, \ z < 1$$

összefüggéseket (ahol *ln* a természetes, e-alapú logaritmus) és eltekintve a „másodrendűen kicsiny” tagtól, a hiba-komponens:

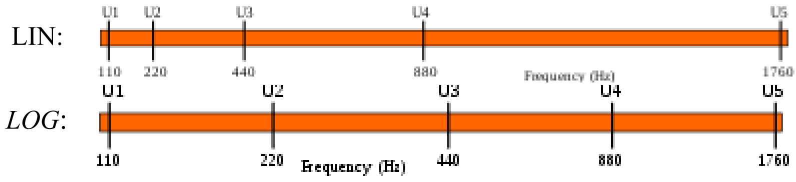
$$10 \cdot log(1+h) = \frac{10}{ln(10)} ln(1+h) \approx 4.343 \cdot h$$

LOGaritmikus skálán a hiba a Lineáris skála *relatív* hibájával arányos.

*

A különböző fizikai mennyiségek (pl. hangerősség, hangmagasság, fényintenzitás stb.) által keltett, általunk érzékelt fiziológiai *érzet* a fizikai jel (teljesítményének) logaritmusával arányos.

Négy oktáv (= 2-szeres távolság) LINeáris, ill. *LOGaritmikus* skálán (ahogyan a fül hallja):

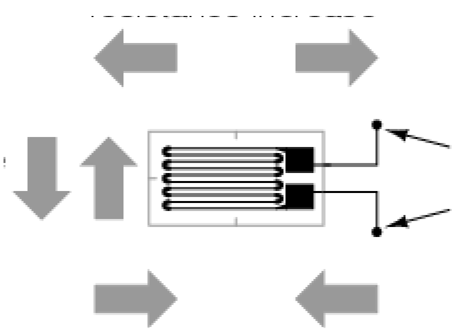


Sok összefüggés (pl. fizikai képlet) hatványfüggvény, így ha mindkét tengelyen szereplő értékeknek logaritmusát ábrázoljuk, az ún. kettős logaritmikus (röviden *log-log)* ábrán bármely hatványfüggvény lineáris alakú, a meredekség adja a kitevőt.

Hiba-kompenzálás
Nyúlásmérő bélyeg hőmérséklet kompenzálása[1]

1. Igénybevételnek kitett szerkezeti elemeknél *mechanikai feszültség* (σ) lép fel, ami kritikus paraméter és közvetlenül nem egyszerű mérni. Mérhető viszont a szerkezet külső felületén a *relatív nyúlás* ($\Delta\ell/\ell$), ún. **nyúlásmérő bélyeg**gel (strain gauge), és *egyirányú* feszültség állapotban (Hooke törvény): $\sigma = E\cdot(\Delta\ell/\ell)$, ahol E a rugalmassági modulus (az anyag alakváltozással szembeni ellenállása).[2]
A mérendő szerkezettel *együtt* deformálódó nyúlásmérő bélyeg (speciális ellenállás) fajlagos **ellenállás-változás**a a relatív nyúlással arányos: $(\Delta R/R) = g\cdot(\Delta\ell/\ell)$, ahol g az ún. bélyeg állandó (gauge factor). A fellépő kis ellenállás-változást mérve kapjuk a keresett σ értékét (ez a nyúlásmérés célja).

A **bélyeg** szigetelő fóliára cikk-cakkban felvitt vékony elektromos vezető réteg, amely *hossz*irányban „érzékeny". Ha a vezető megnyúlik (vagyis keresztmetszete lecsökken), akkor megnő az ellenállása ($+\Delta R$). Fordítva, nyomásnak kitéve rövidül (keresztmetszete nő), így ellenállása csökken ($-\Delta R$).



Példa: $\sigma = 10$ MPa ($= 10$ N/mm^2), $E = 2\cdot10^5$ MPa (acél) esetén $\Delta\ell/\ell = \sigma/E = 5\cdot10^{-5}$, így $g = 2$ értékkel $\Delta R/R = 2\cdot5\cdot10^{-5} = 10^{-4} = 0.01\%$, ami $R = 120\ \Omega$ alapellenállásnál $\Delta R = 120\cdot10^{-4} = 12$ mΩ változást jelent.
Ilyen kis változás mérése ún. *híd-kapcsolás*sal lehetséges.

A bélyeget a mérendő szabad felületére ragasztják és (jól felragasztott bélyegnél) feltételezzük, hogy a bélyeg fajlagos nyúlása megegyezik az alkatrész felületének (a mérési hossznak megfelelő területen átlagolt) relatív nyúlásával.

---

[1] A példa egy hiba-kompenzálási *elvet* szemléltet, a technikai részeltek mellőzésével (a konkrét kivitelezési és eszköz *problémák* megoldása a mérnökök dolga).

[2] Egy henger alakú, A keresztmetszetű és ℓ hosszúságú testet *tengelyirányban* F erővel húzva, $\sigma = F/A$ rugalmas feszültség ébred és ez $\Delta\ell$ megnyúlást hoz létre. A σ feszültség egysége *pascal* [Pa = N/m^2].
A *lineáris* kapcsolat a rugalmassági határig érvényes (ezen túl tartós alakváltozás, majd törés következik be, ezen innen – ha a terhelés megszűnik, a nyúlás nullára csökken).

Ha nem ismerjük a főfeszültségi irányt, akkor két vagy három irányban mért nyúlásból lehet a feszültségállapotot meghatározni. Ehhez különleges bélyeget, ún. *rozettá*t használnak (kétirányú mérésnél egymásra merőlegesek, háromirányú mérésnél 45 vagy 120 fokosak a mérési irányok).

2. A bélyeg terhelése nélkül ($\Delta R = 0$) a mérőhíd („NEGYED” híd) kiegyenlített: *azonos* ellenállásokkal a két hídágban (az ***A*** és ***B*** ponton) azonos a villamos feszültség leosztás, a különbséget ideális (igen nagy belső ellenállású) **V mérő** méri (V = 0).

(a) A baloldali hídág a tápfeszültséget felezi: $U_A = U_g/2$. Terhelés esetén a jobboldali hídágban ($+\Delta R$ változás hatására)

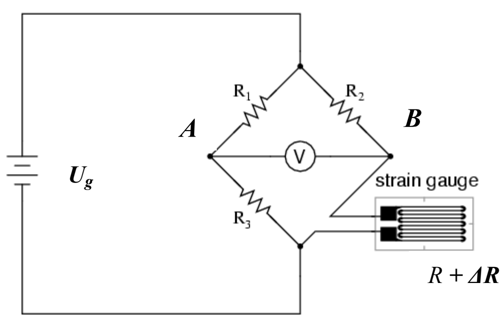
$$U_B = U_g \frac{R + \Delta R}{R + (R + \Delta R)} = U_g \frac{1 + (\Delta R / R)}{2 + (\Delta R / R)}$$

értékűre változik, ezzel

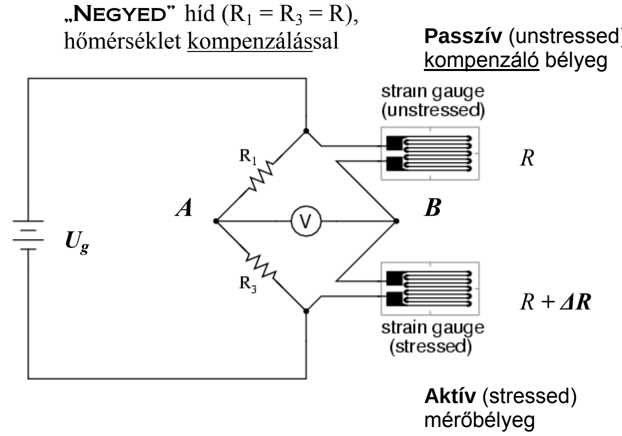
$$V = U_B - U_A = U_g \left(\frac{1 + (\Delta R / R)}{2 + (\Delta R / R)} - \frac{1}{2} \right) = \frac{U_g}{4} \cdot \frac{\Delta R}{R} \cdot \frac{1}{1 + (1/2) \cdot (\Delta R / R)}$$

Kedvezőtlen, hogy a kifejezés $\Delta R/R$ *nemlineáris* függvénye. (De ez akár analóg módszerrel, akár mérés után numerikusan linearizálható.)

„NEGYED” híd ($R_1 = R_2 = R_3 = R$)



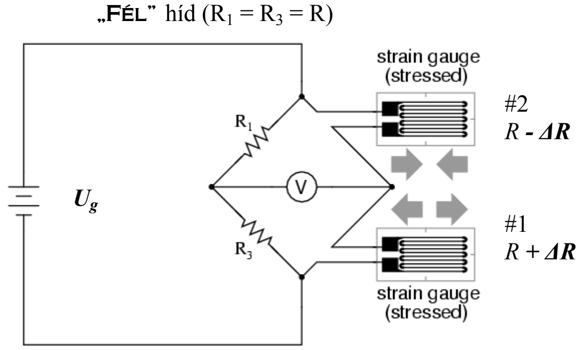
„NEGYED” híd ($R_1 = R_3 = R$), hőmérséklet kompenzálással



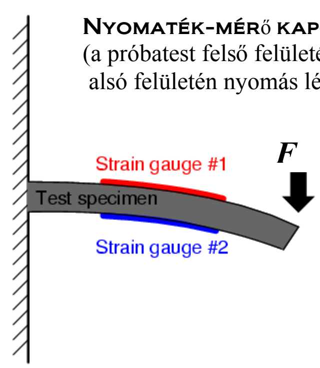
(b) A nagyobb *probléma*: a bélyeg hőmérséklet függése. Az érzékelő ellenállásnak a hőmérséklet miatti megváltozása nem különíthető el a deformáció függéstől!
A mérni nem kívánt *befolyásoló mennyiség (a hőmérséklet)* hatását tehát ki kell iktatni, **KOMPENZÁLNI** kell. Ez egyszerűen megtehető egy azonos, de terheletlen (passzív) bélyeg beiktatásával a jobboldali ágba („NEGYED” híd, hőmérséklet kompenzálással). Könnyen belátható: ha egy ágban mindkét ellenállás érték (a hőmérséklet hatására) egy irányban, azonos mértékkel változik, akkor a leosztott feszültség (pl. U_B) változatlan marad.

3. Innen csak egy lépés az *ellentétes* irányban terhelt, aktív **bélyeg pár** alkalmazása („FÉL” híd, pl. NYOMATÉKMÉRŐ KAPCSOLÁSban), amely hőmérséklet-kompenzált és emellett, „melléktermékként”, linearizált és megnövelt érzékenységű!

„FÉL” híd ($R_1 = R_3 = R$)



NYOMATÉK-MÉRŐ KAPCSOLÁS
(a próbatest felső felületén nyújtás, alsó felületén nyomás lép fel)



A terhelt „**FÉL**” híd hídágainak feszültség különbsége

$$V = U_g\left(\frac{R+\Delta R}{(R-\Delta R)+(R+\Delta R)} - \frac{1}{2}\right) = \frac{U_g}{2}\cdot\frac{\Delta R}{R}$$

közvetlenül az fajlagos ellenállás változással arányos.

Megjegyzés: a módszer kiterjeszthető a „**TELJES**” hídra (és a páronként *ellentétes* irányban terhelt, aktív **bélyeg négyes** tovább javítja az átalakítás érzékenységét, működésére lásd: http://www.rdpe.com/ex/hiw-sglc.htm).

4. Az érzékelő bélyeg a hídkapcsolásban

erőhatás → geometriai méretváltozás → ellenállás változás → feszültség

$(\Delta\ell/\ell) = \sigma/E$ $\qquad$ $(\Delta R/R) = g\cdot(\Delta\ell/\ell)$ $\qquad$ $(V/U_g) = k\cdot(\Delta R/R)$

átalakítással és villamos feszültség méréssel ad lehetőséget *mechanikai feszültség* (σ), vagy – mechanikai/szilárdságtani ismeretek felhasználásával – a kiváltó ok, az *erő* (ill. forgatónyomaték) meghatározására, és számítógépes elemzésére.

A bélyeget széles körben használják pl. erőmérő cellákban és mérlegekben. Más példák terhelés vizsgálatra:

kerékpár kormány

műfogsor

vasúti sín

cső nyomásvizsgálata

A mintavétel hatása az időtartományban (Mathcad) :

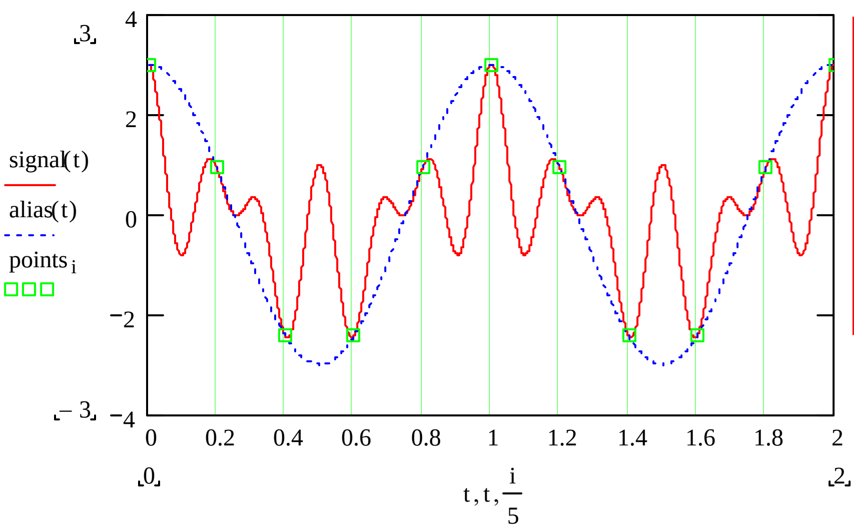
1:

$t := 0, .01 .. 2$ $\quad$ $sample\_rate := 5$ $\quad$ $\Delta t := \dfrac{1}{sample\_rate}$ $\quad$ $i := 0 .. 10$

$signal(t) := \cos(2\cdot\pi\cdot t) + \cos(8\cdot\pi\cdot t) + \cos(12\cdot\pi\cdot t)$

$points_i := signal(i\cdot\Delta t)$ $\quad$ $alias(t) := 3\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot t)$

mert **cos(-x) = cos(x)**



Megjegyzés:

$2\pi\cdot(i/5)$,

$8\pi\cdot(i/5) = 2\pi i - 2\pi\cdot(i/5)$,

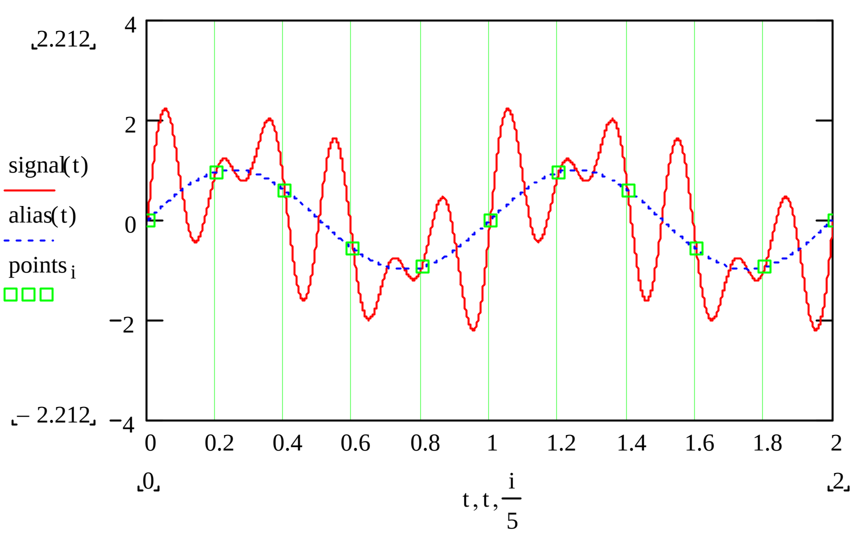
$12\pi\cdot(i/5) = 2\pi i + 2\pi\cdot(i/5)$

2:

$signal(t) := \sin(2\cdot\pi\cdot t) + \sin(8\cdot\pi\cdot t) + \sin(12\cdot\pi\cdot t)$

$points_i := signal(i\cdot\Delta t)$ $\quad$ $alias(t) := 1\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot t)$

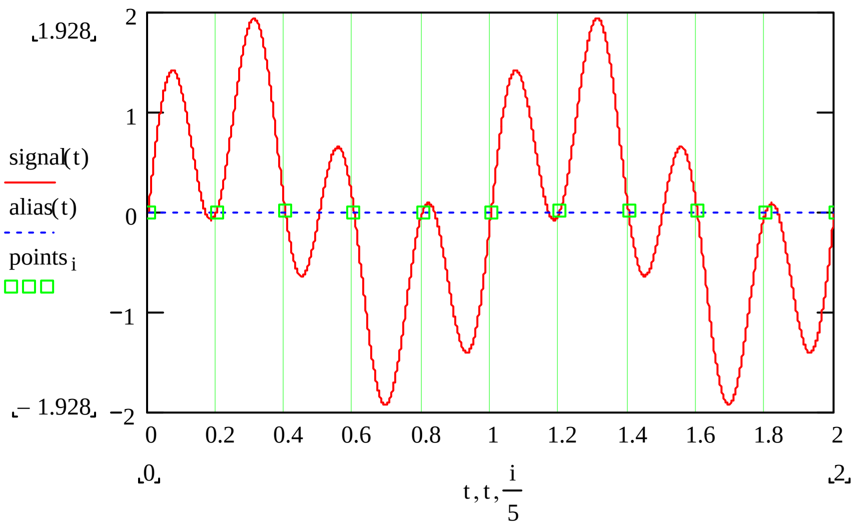
mert **sin(-x) = - sin(x)**



3: Nyquist voodoo:

$\text{signal}(t) := \sin(2\cdot\pi\cdot t) + \sin(8\cdot\pi\cdot t)$

$\text{points}_i := \text{signal}(i\cdot\Delta t)$ $\text{alias}(t) := 0$ mert **sin(-x) = - sin(x)**



Megjegyzés:
csak két komponens

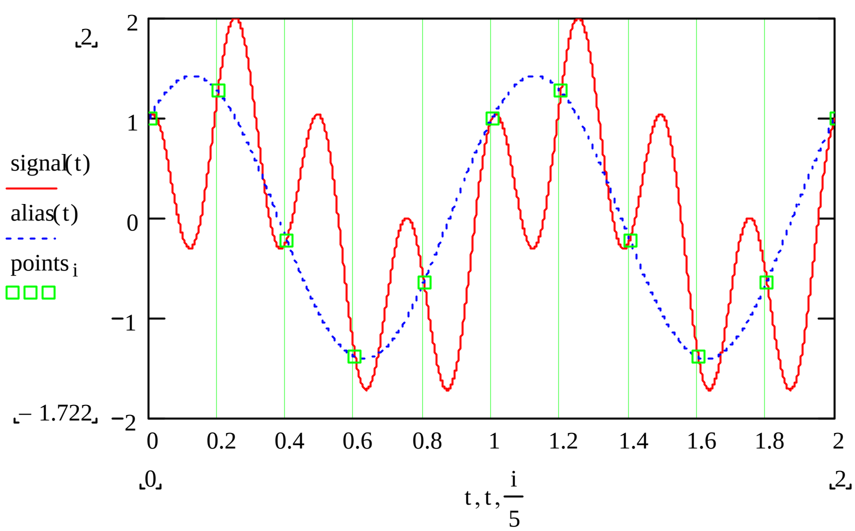
<u>2π·(i/5)</u>,

8π·(i/5) = 2πi - <u>2π·(i/5)</u>

4:

$\text{signal}(t) := \sin(2\cdot\pi\cdot t) + \cos(8\cdot\pi\cdot t)$

$\text{points}_i := \text{signal}(i\cdot\Delta t)$ $\text{alias}(t) := \sin(2\cdot\pi\cdot t) + \cos(2\cdot\pi\cdot t)$ $= \sqrt{2}\cdot\sin(2\pi t + 0.785)$



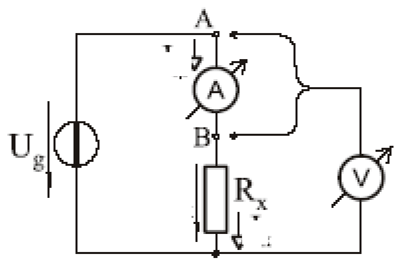
Messen ist Wissen [G. S. Ohm]

ELLENÁLLÁS MÉRÉS (KÉT ANALÓG MÓDSZER)

Modell: „Ohm törvény (R_x = U/I)", de a **V** mérő ill. az **A** mérő nem ideális (belső ellenállás: $R_V \neq \infty$ ill. $R_A \neq 0$, a relatív hibakorlát: h_V ill. h_A)

(1) **Két műszer** (**V** és **A** mérő): a mért adatokból *számítjuk* R_x értékét

Probléma: hová kössük a **V** mérőt (az A vagy a B pontra)? Mert: A esetben a **V** mérő az R_x-en eső feszültséghez hozzáméri a nem ideális ***A** mérőn eső* feszültséget, B esetben az **A** mérő az R_x-en és a nem ideális ***V** mérőn átfolyó* áram együttesét méri.



A eset: $V = A \cdot (R_A + R_x)$, ebből $\boxed{R_x = \frac{V}{A} - R_A}$

Ha V/A (= $R_{számított}$) >> R_A, vagyis **ha R_x nagy**, akkor az **A** mérő (kis R_A) belső ellenállása „nem befolyásolja lényegesen" az eredményt, tehát ez a módszer nagy ellenállások mérésénél célszerű.

B eset: $A = \frac{V}{R_V} + \frac{V}{R_x}$, ebből $\boxed{R_x = \frac{V}{A - \left(\frac{V}{R_V}\right)} = \frac{V}{A} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(V/A)}{R_V}}}$

Ha V/A (= $R_{számított}$) << R_V, vagyis **ha R_x kicsi**, akkor a **V** mérő (nagy R_V) belső ellenállása „nem nagyon zavar".

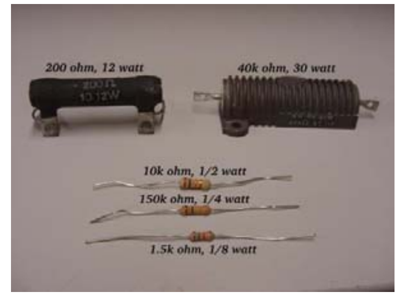
Megjegyzések:

(a) A **nagy** vagy **kicsi** jelző a mérendőtől és a műszer ellenállástól függ, és ez ad választ a problémára (melyik módszer: az A vagy B pontra kössük-e a **V** mérőt)
(b) A műszer ellenállása befolyásolja az eredményt. Ismerve értékét, *korrigálható* (a képlet szerint) a nyers mérési adat!
Ez a **HIBA-KORREKCIÓ** (*módszer hiba* eliminálás) pontosítja a mérést
(c) A mérési eredményhez társított **mérési bizonytalanság** becslése: *hányados* képzéssel adódik a mért érték, tehát a **RELATÍV HIBAKORLÁT**

$$h_{\mathbf{V/A}} \approx h_V + h_A$$

(d) A forrás (U_g) értéke *nem* befolyásolja az eredményt (persze olyan legyen, hogy mérhető ***V*** ill. ***A*** adódjon, de azért pl. R_x hőterhelése legyen elfogadható), a forrásnak lehet belső ellenállása is (mint ahogy a gyakorlatban van is)

(e) Az R_x ellenállás *fogyasztó*, a felvett DC[1] **teljesítmény**: P = U·I [= $U^2/R_x = I^2 \cdot R_x$].

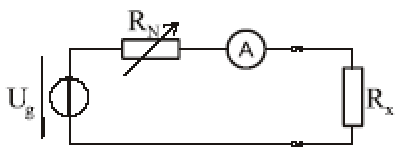


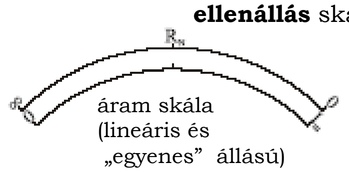
<u>A eset</u>: $P = A^2 \cdot R_x = V \cdot A - A^2 \cdot R_A = V \cdot A \cdot \left(1 - \dfrac{R_A}{(V/A)}\right)$

<u>B eset</u>: $P = \dfrac{V^2}{R_x} = V \cdot A \cdot \left(1 - \dfrac{(V/A)}{R_V}\right) = V \cdot A - \dfrac{V^2}{R_V}$

Ha tehát „**VA** módszerrel” határozzuk meg a teljesítményt, akkor a mérők fogyasztásával – ha az „számottevő” – **KORRIGÁLNI** kell a nyers mérési adatot.
Kérdés: mennyi a relatív hibakorlát?

(2) **Egy műszer** (**A** mérő) és *közvetlen* ellenállás érték *leolvasás* (de nemlineáris és „fordított” állású az ellenállás skála): **soros ohmmérő**





ellenállás skála: $\dfrac{A}{I_m} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{R_x}{R_N}}$

Ha a műszerhez *nem* csatlakozik mérendő: $\boldsymbol{R_x = \infty}$ (ún. **KÉSZENLÉT**i állapot), akkor áram nem folyik és így az **A** mérő <u>nem</u> <u>tér</u> <u>ki</u> (**A = 0,** a mutató a skála <u>alap</u>helyzetére mutat).

Kézi készüléknél igen praktikus ez a telep-kímélő mód.

A forrás értéke nem állandó (az U_g telepfeszültség a használatba vételtől a „kimerülésig” fokozatosan csökken). <u>Ezért</u> első lépésként **KALIBRÁLJUK** az eszközt (azaz U_g hatásától függetlenítjük a mérést!): $\boldsymbol{R_x}$ = **0** értékkel – a kapcsokat *rövidre zárva* – úgy állítjuk be $\boldsymbol{R_N}$ értékét (ami magába foglalja a forrás belső ellenállását és az **A** mérő ellenállását is), hogy az A mérő <u>végkitérést</u> <u>adjon</u> ($\boldsymbol{A = I_m}$, a mutató a skála <u>vég</u>helyzetére mutat).

A skála tehát „fordított”: az alaphelyzet a „∞” ellenállás érték, a végkitérés pedig „0”.

Ezután **MÉRÜNK**: beiktatva az ismeretlen $\boldsymbol{R_x}$ ellenállást, értékét közvetlenül *leolvassuk* a skáláról (az **A** mérő kitérésének megfelelően).
De hogyan készül az **ELLENÁLLÁS SKÁLA**?
Feltételezzük, hogy a kalibrálást követő mérésnél a telepfeszültség (és R_N) változatlan:

- kalibrálás ($\mathbf{R_x}$ = 0): $I_m = U_g/R_N \rightarrow U_g = I_m \cdot R_N$
- mérés ($\mathbf{R_x}$) : $A = U_g/(R_N + R_x) \rightarrow U_g = A \cdot (R_N + R_x)$

Ebből

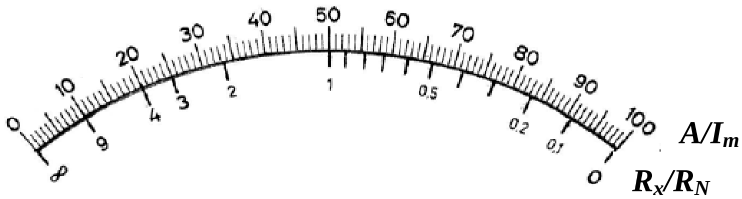
$$\boxed{R_x = R_N\left(\frac{I_m}{A} - 1\right) \qquad \textit{és} \qquad 0 \le A \le I_m}$$

Jól látható, hogy R_x és A között nemlineáris a kapcsolat.

[1] DC (direct current): <u>egyen</u> /vagy konstans/ *kontra* AC (alternating current): <u>váltakozó</u> jel. A jelzőt, bár eredeti jelentése az áramra utal, más típusú egyen ill. váltakozó jel megnevezésére is használjuk, pl. DC feszültség = egyenfeszültség.

Innen adódik a *közvetlen* ellenállás érték leolvasáshoz szükséges **SKÁLA EGYENLET** (vagyis, hogy az aktuális R_x / R_N aránynak megfelelően hogyan kalibráljuk az **A** mérő skáláját).

ellenállás skála: $\dfrac{A}{I_m} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{R_x}{R_N}}$



Speciálisan $R_x = R_N$ (azaz $R_x / R_N = 1$) esetén a mutató félkitérésre áll be ($A/I_m = ½$).
Vagy pl. $R_x / R_N = 4$ értéknél $A/I_m = 1/5 = 0.2$ (= 20 %). A skála „összenyomott" a nagy ellenállás értékeknél, míg a kicsiknél „kiterjesztett".

Megjegyzés:

A skála közepén legpontosabb az ellenállás mérés: itt *minimális* a mérés **RELATÍV HIBAKORLÁT**ja ($h \approx \mathbf{4} \cdot h_A$), ami egyre romlik a skála szélei felé (a hibaterjedés számítás részleteit mellőzzük). Ez *nem* egy „precíz mérő"!

***

Függelék: **MÉRÉSHATÁR KITERJESZTÉS, OSZTÁLYPONTOSSÁG**

1. Hagyományos **ANALÓG** műszereknél a gyártók nem készítenek külön mérőket, hanem csak egy **„**alapműszert", amelynek végkitérése U_m ill. I_m értéknél lép fel, tehát véges a belső (ún. műszer) ellenállás: R_b (= U_m / I_m).
Más, *n*-szeres mérési tartományt ún. előtét- ill. sönt-ellenállással állítunk be.

V mérőnél: soros, R_b-nél nagyobb értékű R_e *előtét*-ellenállás iktatunk be (így az U mérendőnek csak egy része – végkitérésben U_m – jut a műszerre, és egyúttal megnő a mérő ellenállása: $R_V = R_e + R_b$).
Az új, $n \cdot U_m$ méréshatárhoz szükséges előtét-ellenállás értéke

$$R_e = \frac{n \cdot U_m - U_m}{I_m} = \frac{(n-1) \cdot U_m}{I_m} = (n-1) \cdot R_b\,,$$

és ezzel $\mathbf{R_V} = n \cdot R_b$.

A mérőnél: megosztjuk a mérendő I áramot, „eltereljük" egy részét egy párhuzamos, R_b-nél kisebb R_s *sönt*-ellenállással (és ezzel a mérő ellenállása is lecsökken: $R_A = R_s$ **x** R_b, vagyis a vezetések összegződnek: $1/R_A = (1/R_s) + (1/R_b)$).
Az új, $n \cdot I_m$ méréshatárhoz a sönt-ellenállás:

$$R_s = \frac{U_m}{n \cdot \mathrm{I}_m - I_m} = \frac{U_m}{(n-1) \cdot I_m} = \frac{R_b}{n-1}\,,$$

így ezen a méréshatáron $\mathbf{R_A} = R_b / n$.

2. **ANALÓG** műszer hibáját az ún. *osztálypontosság* (*op*) jellemzi, ami a – skála minden pontján állandó – *H* abszolút hiba és az X_m végkitérés (a méréshatár) *hányadosa*, **%**-os értékben:

$$op = \frac{H}{X_m} \cdot 100$$

és **V** mérőnél $X_m = U_m$, **A** mérőnél $X_m = I_m$.
Ezzel a mérő **RELATÍV** hibája, **%**-os értékben:

$$h_x = \frac{H}{X} \cdot \left(\frac{X_m}{X_m} \right) = op \cdot \frac{X_m}{X} = op \cdot \frac{1}{(X / X_m)} = \frac{op}{D}$$

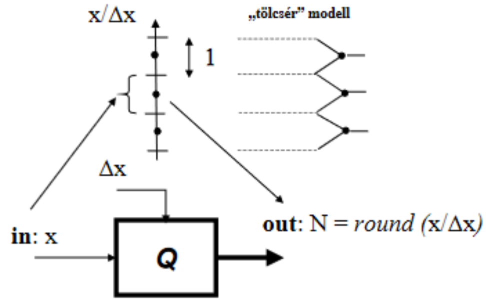
ahol $0 \le D$ ($= X/X_m$) ≤ 1 a mutató aktuális relatív kitérése, és **V** mérőnél $X = V$, **A** mérőnél $X = A$.
Például **V mérő**nél, ha $op = 0.5$**%** és $D = ½$, akkor

$$h_V = \frac{0.5\%}{1/2} = 2 \cdot 0.5\% = 1\% = 10^{-2}$$

Mindig olyan méréshatárt kell tehát választani, hogy a *végkitérés közelében* (!) legyen a mért érték.

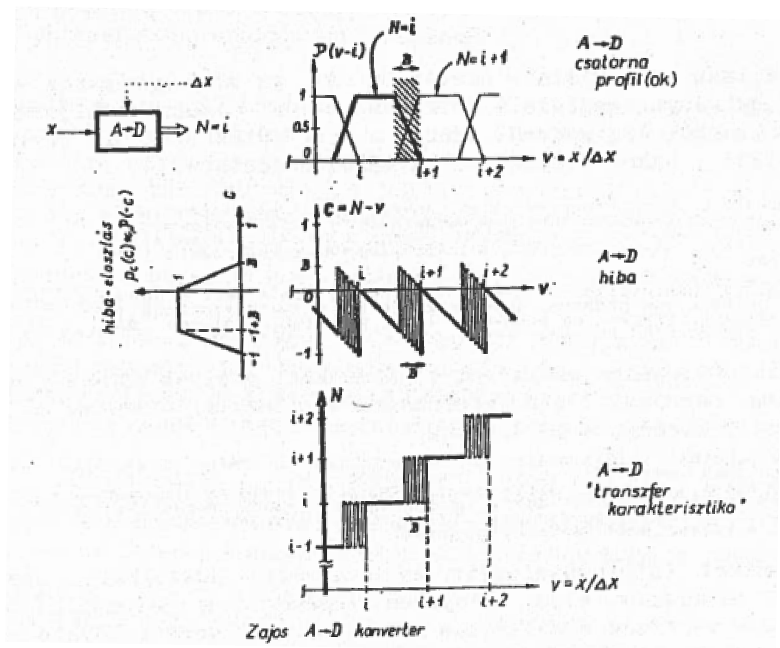
Az A/D átalakító csatorna profilja

Egyenletes, **Δx** felbontású (mértékegységű), kerekítéses **amplitúdó** kvantálás (***Q***: *round* művelet) az **x** bemenő analóg *jel* **v = x/Δx arány**ának egész részét (**N**) adja: az A/D átalakító digitális *adat* kimenete (a mérőszám) **egész** szám (**N** = i). A „tölcsér” modell szemléletesen jelzi, hogy a kimenő adat a bemenő jel amplitúdó értékeinek egy *intervallumát* (csatornáját) jelöli, és *ideális* esetben a szomszédos (azonos nagyságú) csatornák határa „éles”, azok *nem* lapolódnak át.



A kerekítés miatt szükségszerűen *(szám)hiba*: **c** = N – (x/Δx) lép fel, ennek aktuális értéke persze ismeretlen (bemenet függő!), de *tartománya* korlátozott: |**c**| < ½ .

Másrészt, a gyakorlatban az intervallum határpont (átváltási, kapcsolási pont) **nem** „éles” (zajos), az ide eső bemenetnél az A/D átalakító a szomszédos csatornák valamelyikét jelöli a megfigyelt (**N** = i vagy **N** = i +1) mérőszámmal, *véletlenül*, de becsülhető valószínűséggel. Ezt írja le a **csatorna profil**.



Globálisan egyenletes kvantálás esetén (feltételezve, hogy az intervallum *nem* helyfüggő és ***B*** szélességű - **Δx** egységben - a bizonytalansági sáv), a profil ismeretében (valamint a bemenő jel valószínűségi eloszlására tett *kötés*sel) a *hiba eloszlása* is becsülhető (részletesen: **itt**), és az 50%-os valószínűségi pont ismerete az eszköz *kalibrálására* is lehetőséget ad.

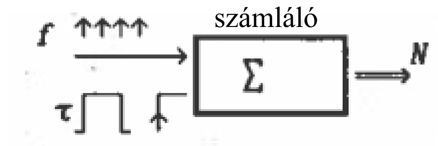
A csatorna profil tehát azt a **feltételes valószínűség**et írja le, amely megadja, hogy egy kijelölt csatornába eső *adott* bemenet éppen az ahhoz a csatornához rendelt megfigyelést (**N** = i) eredményezi.

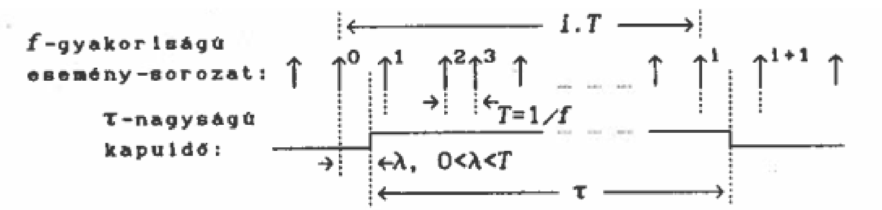
> Ideálisan (átlapolás mentes csatornáknál) ennek értéke a teljes csatornára **1**, vagyis NÉGYSZÖG alakú a profil. Zajos (***B*** szélességű bizonytalansági sávú) csatorna váltásnál pl. TRAPÉZ profillal közelíthető az intervallum megjelölés, mint az előző ábrán (ahol az **N** = i mérőszám nem intervallum-középpont).

A profil *elméleti* megfontolások alapján (a mérőszám generálás matematikai modelljét felhasználva) adható meg, vagy pontonként *relatív gyakoriság* méréssel becsülhető (a vizsgált A/D átalakítónál pontosabb, nagyobb felbontású, változtatható referencia bemenő értékeket használva).

Modell

Könnyen megadható a profil „*f* gyakoriságú esemény-sorozat *τ* kapuidővel történő számlálása” esetén (ami a digitális frekvencia vagy időtartam mérés magja).





f : átlagfrekvencia, *T = 1/f* : periódusidő, *τ* : kapuidő

N = i a megfigyelt mérőszám, ha

$$i.T < \lambda + \tau < (i+1).T, \quad 0<\lambda<T$$

vagy célszerűen normalizálva:

$$N=i, \text{ ha } \quad 0 < s + z < 1 , \quad s \in (0,1)$$

ahol

z = *f•τ - i* a mérendő *arány* (*f•τ*), normálva a megfigyelt mérőszám (i) „környezetére” (vagyis a **v** = *f•τ* mérendő arány **mértékegysége** FREKVENCIA mérésnél, azaz ha ***τ*** *ismert* : ***Δf*** = *1/τ,*; IDŐtartam mérésnél pedig, ***f*** *ismeretében* : ***Δτ*** = *1/f*, tehát az egységnek a reciprokával történő *szorzás* / ÉS kapcsolat = kapuzás / révén realizálódik az A/D funkció: az **arány** képzés)

s = *λ /T* start „aszinkronitás” (rendszerint különálló, *nem* szinkronizált forrás a kapuidő start időpillanata és az esemény-sorozat, ezért ***s*** ϵ *(0,**1**)*), ha mégis fennáll „némi szinkronitás”, akkor tartománya korlátozott: ***s*** ϵ *(0,**B**)*, ***B*** konstans, 0 < ***B*** < 1 (legrosszabb esetben ***B*** = 1)

FELTÉTEL: periódusonként *egy* és csakis egy esemény (↑ : adott szinten történő *egyirányú* jel*átmenet*) léphet fel

Ha a z-től független *s egyenletes* eloszlású: $p_s(s)=1/B$, $s\in(0,B)$, akkor az eszközt jellemző csatorna profil

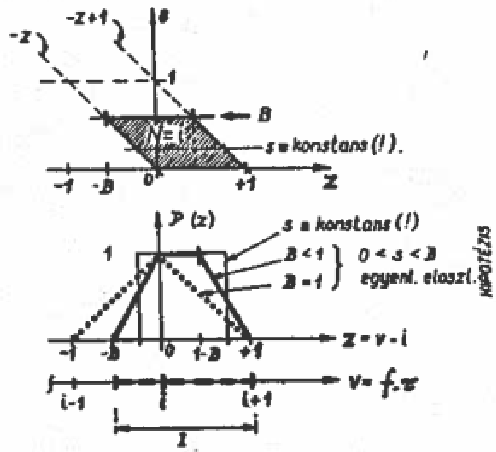
$$\mathcal{P}(z) = Prob\{N=i|z\} = Prob\{-z < s < 1-z\}$$

$$= \begin{cases} \int_{-z}^{B} p_s(s)\, ds = \dfrac{z+B}{B}, & -B < z \le 0 \\ \int_{0}^{B} p_s(s)\, ds = 1, & 0 \le z \le 1-B \\ \int_{0}^{1-z} p_s(s)\, ds = \dfrac{1-z}{B}, & 1-B \le z < 1 \end{cases}$$

vagyis **TRAPÉZ** alakú, és $I = (-B, 1)$ az intervalluma. Speciálisan

$B = 0$ esetén eltolt **NÉGYSZÖG**: $\mathcal{P}(z) = 1, \quad z \in (0,1)$

$B = 1$ esetén **HÁROMSZÖG**: $\mathcal{P}(z) = 1-|z|, \quad z \in (-1,1)$



Megjegyzés:

a NÉGYSZÖG profil „magától értetődő" (mert ha **s** értéke *konstans*, az teljes szinkronitást jelent a start és az esemény-sorozat között), míg a HÁROMSZÖG profil kialakulása más módszerrel is belátható, lásd pl. http://www.hit.bme.hu/~papay/edu/KommTech/Simpson.pdf

Mérés

A profil (a valószínűség) pontonként, *relatív gyakoriság* méréssel becsülhető, amelyre példa **itt** található. Ez az egyszerű célműszer vizuális kijelzéssel is segíti a vizsgált A/D átalakító minősítését.

A csatorna profil *független* a bemenet eloszlásától, az A/D átalakítót lokálisan minősíti. Ismeretében (a bemenő jel valószínűségi eloszlására tett kötéssel) a *hiba eloszlása* is becsülhető.

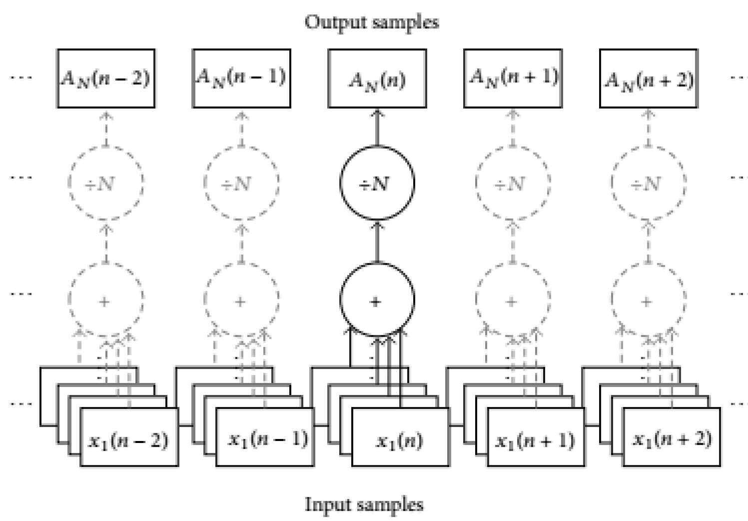
DSO effektív bitszámának növelése átlagolással

A digitális oszcilloszkóp (DSO) **amplitúdó felbontása** az A/D átalakító névleges bitszámától függ, a zajhatások miatt ennél kisebb az *effektív* bitszám. Nagy mintagyakoriság szükséges (mert nagy sávszélesség az igény), ezért tipikusan csak 8-12 bites a nagysebességű digitalizáló. Ez a felbontás (hardware)korlát átléphető zajcsökkentő átlagolással, a megnövelt *jel/zaj arány* nagyobb effektív bitszámot eredményez.
Ennek ára: csökken(het) a hatásos sávszélesség, lecsökken a nyomvonal frissítési gyakoriság.

1. Egymást *követő*, **N** számú rekord (multiple pass) *azonos* (idő)pozícióban lévő mintáinak átlagolása (ún. **rekord-átlagolás**)

   Feltétel: *ismétlődő* (repetitív) jel!
   Eredmény: egyetlen rekord (több rekord felvételt *követően*). Fontos: **nem** korlátozza a sávszélességet. De csak a triggerrel *korrelálatlan* zajt átlagolja.

a) direkt módszer (**aritmetikai** átlag):



N számú rekord átlagolása *

Hátrány: csak az összes, N számú rekord felvétele *után* van átlagolt eredmény!

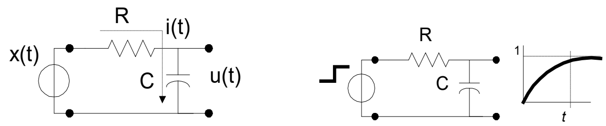
b) **exponenciális** átlagolás

Előnyösebb algoritmus: a *j*-edik rekord felvételt követően az **új** átlag eredmény $A_j(n+i)$, az **új** mintapont $x_j(n+i)$, az utolsó átlag $A_{j-1}(n+i)$, $i = 0, \pm 1, \ldots$ és p súlytényező (ha $j < N$, akkor $p = j$, egyébként $p = N$)

$$A_j(n+i) = \frac{\left[x_j(n+i) + (p-1)A_{j-1}(n+i)\right]}{p}$$

$$= \frac{x_j(n+i)}{p} + \left[\frac{(p-1)}{p}\right] A_{j-1}(n+i),$$

Megjegyzés (az elnevezés eredete): egységugrás bementre a τ = RC idõállandójú (aluláteresztő)szűrő "exponenciális" választ ad,



ennek diszkrét idejű formája: x = i·R + u, a (töltés: Q=) i·dt = C·du kapcsolat alapján a k-adik mintavételi időpillanatban a *differencia* egyenlet (dt = Δt a mintaidőköz és du = u_k - u_{k-1})

$$x_k = u_k + \tau \cdot \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta t}, \text{ vagyis a kimenet: } u_k = \frac{n-1}{n} \cdot u_{k-1} + \frac{x_k}{n}$$

ahol $n = 1 + (\tau/\Delta t)$ konstans.
Az **aluláteresztõ szûréssel ekvivalens** exponenciális átlagolás "*fokozatosan* felejti el" a régi mért (átlag)értéket és csak "*részben* érvényesíti" az új mért adatot.
A *rekurzív* egyenlet másik, szokásosabb formája:

$$u_k = u_{k-1} + \frac{x_k - u_{k-1}}{n},$$

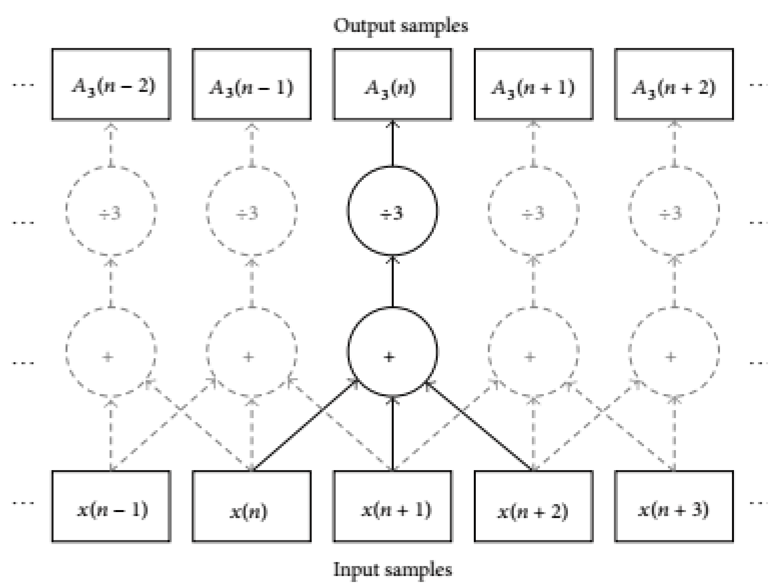
ahol tehát "u_k" az **új** *átlag*érték, "u_{k-1}" a régi átlag, "x_k" az **új** *minta*, és *n* az idõállandó.

Előny: megnő a nyomvonal frissítési gyakoriság (mert minden rekord felvételt követően van átlag-eredmény), és csökken a hardware (memória kapacitás) igény.

***

2. *Egyetlen* rekord (single pass) *szomszédos* mintájának átlagolása (ún. **minta-átlagolás**)

(a) **mozgó átlag**:

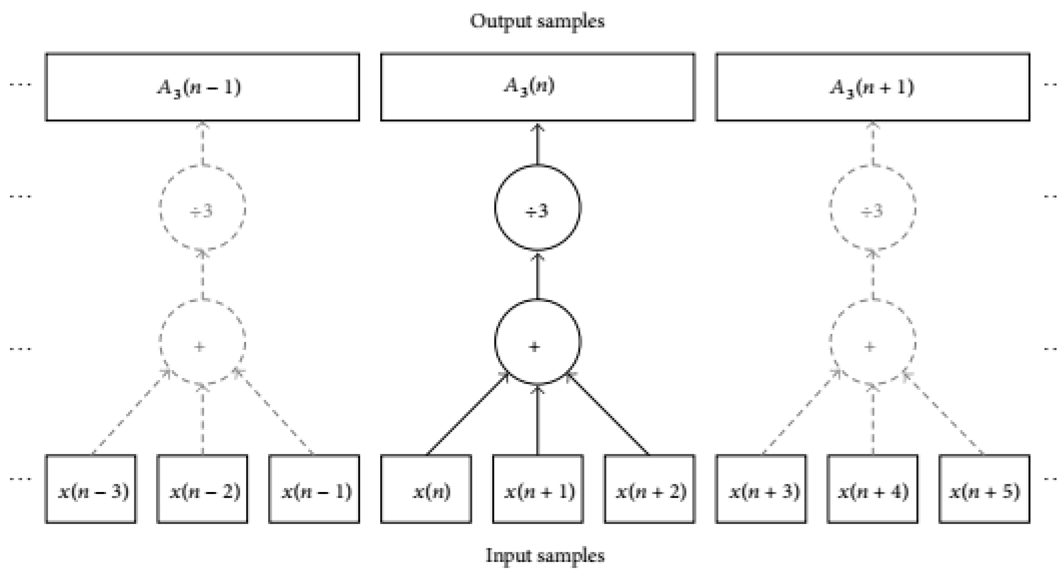


N = 3 minta pont átlagolása *

Fontos: N-szer **csökken** a sávszélesség! (Alkalmas sávszélesség módosításra is.)

(b) **decimáló szűrés** (*túlmintavételezés után* a szomszédos minták átlagolt „összevonása”:)

Feltétel: *túlmintavételezett* rekord felvétel szükséges! (Ez akkor áll fenn, ha az A/D átalakító maximális mintagyakorisága nagyobb, mint amit az időalap beállítás igényel, a korlátozott display memóriahossz miatt).
Előny: a túlmintavételezés csőkkenti a *hasonmás* veszélyt. Fontos: **nem** korlátozza a (decimálás *utáni* gyakorisághoz tartozó!) sávszélességet



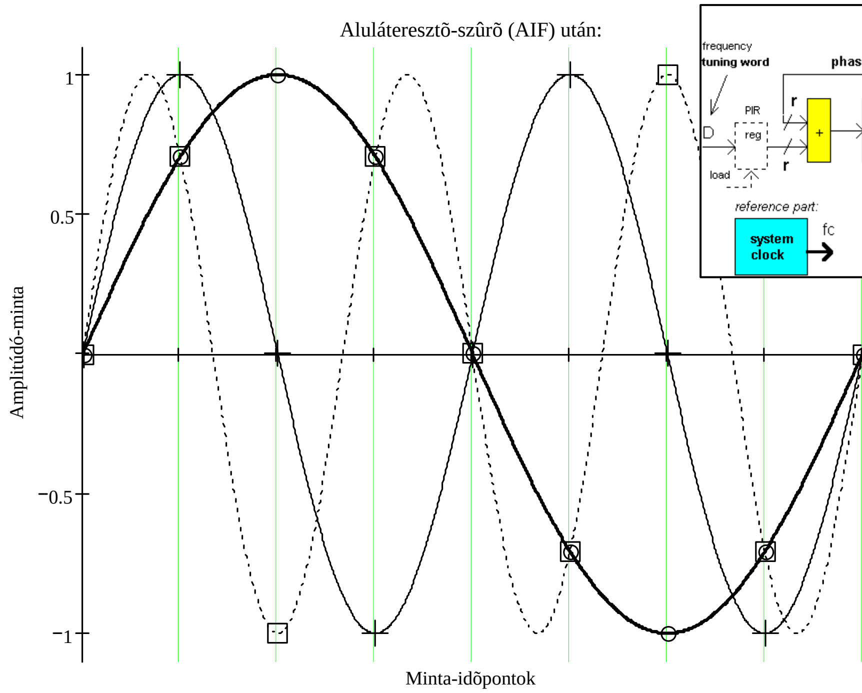
N = 3-szoros túlmintavételezés utáni decimáló szűrés *

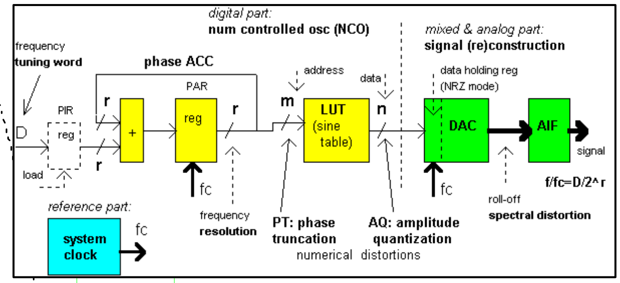
***

Mindkét (1. és 2.) esetben optimálian $\sqrt{N}$-szeres a jel/zaj arány javulás, és ennek megfelelően az effektív bitszám **nyereség**: *½ ld N* (ld: 2-es alapú logaritmus).

[* Ábrák: J. Jiang et al., Math Prob in Eng (2014)]

3 bites NCO:

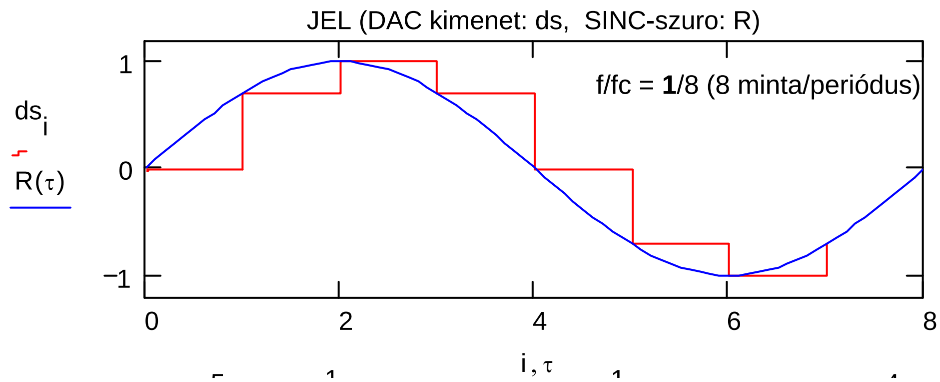


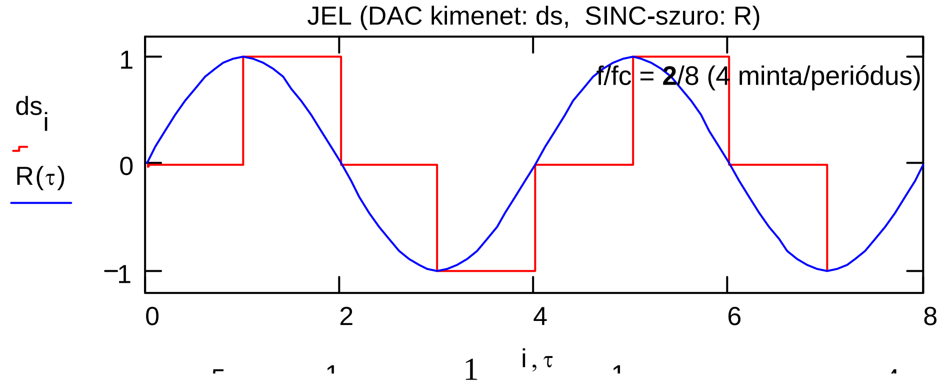


D = 1 ... 8 minta/periódus (o) [= pointer : számláló]

D = 2 ... 4 minta/periódus (+)

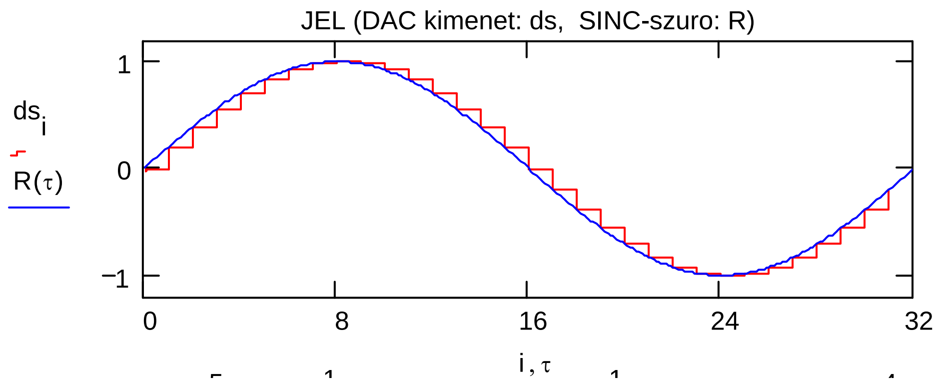
D = 3 ... átlagosan(!) több mint 2 minta/periódus (∏)



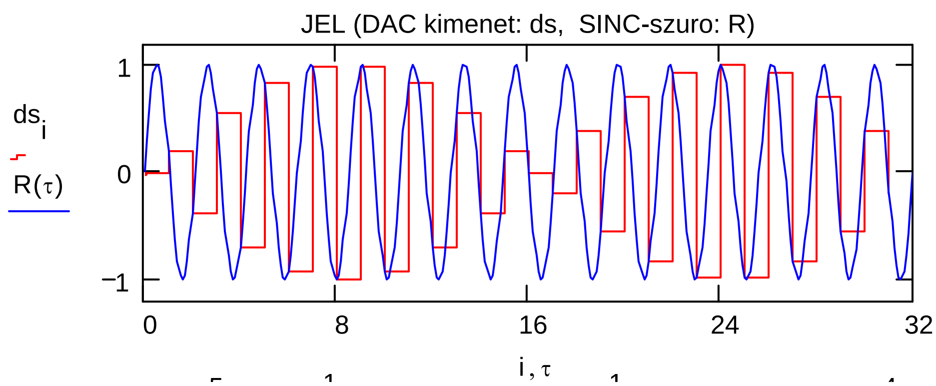


5 bites NCO:

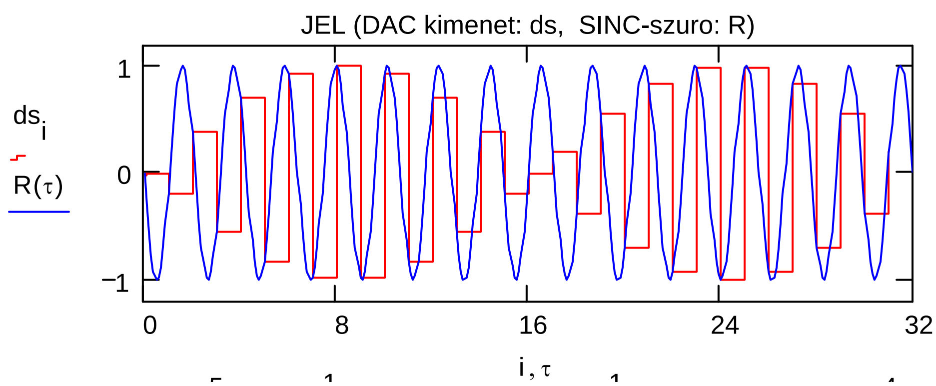
f/fc = **1**/32



f/fc = **15**/32

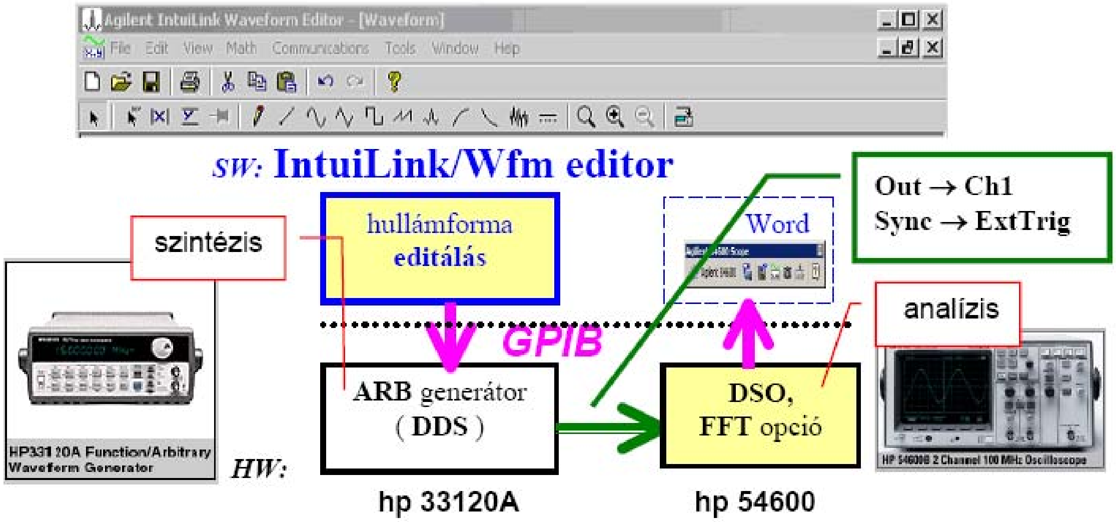


f/fc = **17**/32 …alias(!)



Lab. gyak.:

jelszintézis (Wfm Editor, ARBgen) és jelanalízis (DSO/FFT)



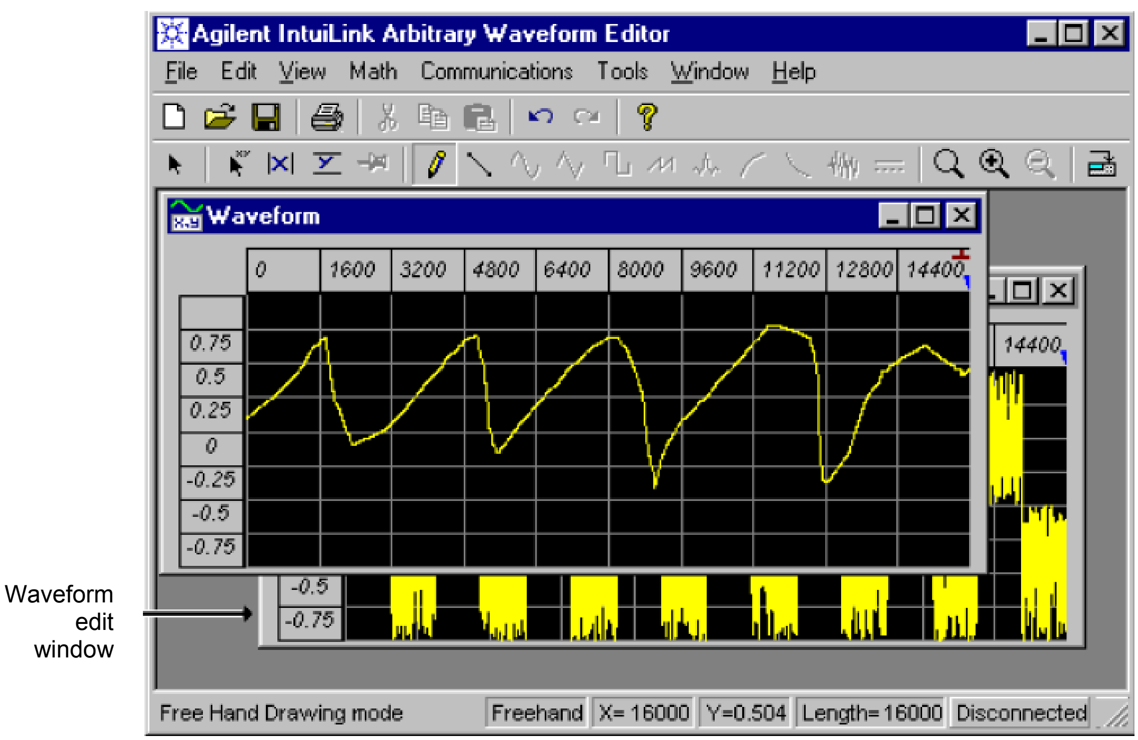
A közvetlen digitális szintézis (DDS: Direct Digital Synthesis) elvén működő jelgenerátor diszkrét (idő)rekordból állítja elő a programozható paraméterű, "tetszőleges"(ARBitrary) alakú, analóg vizsgáló jelet. A numerikus minták könnyen szerkeszthetők vagy módosíthatók editor-ral.

Eszköz interfész: GPIB (General Purpose Interface Bus, IEEE488/IEC625/HPIB).

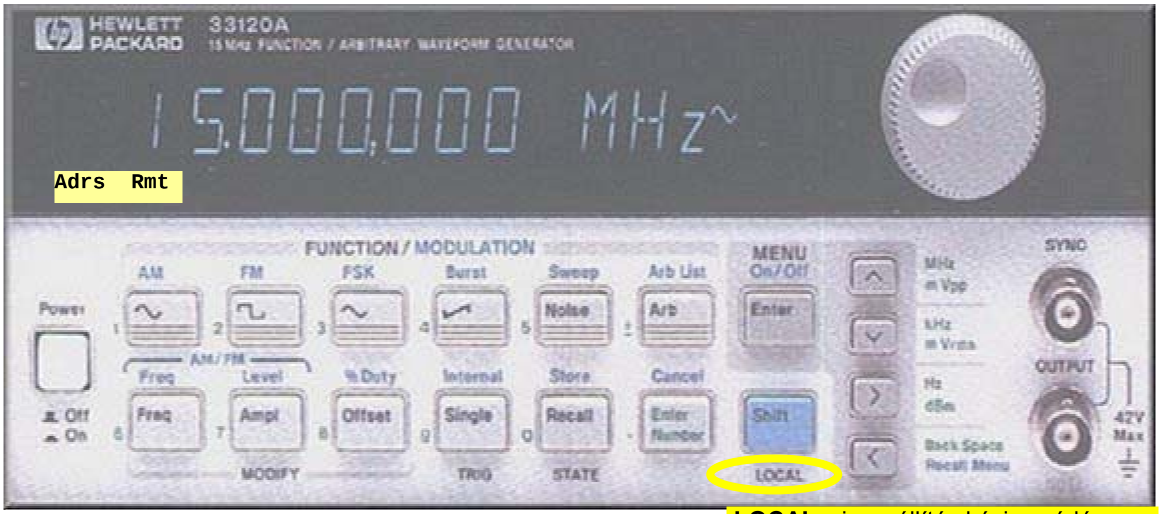
A jelalak megfigyeléshez digitális oszcilloszkópot (DSO: Digitizing Storage Oscilloscope) használunk, amelynek szerves kiegészítője a spektrumot számító FFT-modul.

Hullámforma editálás (IntuiLink/Waveform Editor):

http://www.hit.bme.hu/people/papay/edu/Lab/WaveformEditor2.pdf



ARB generátor (HP33120A)



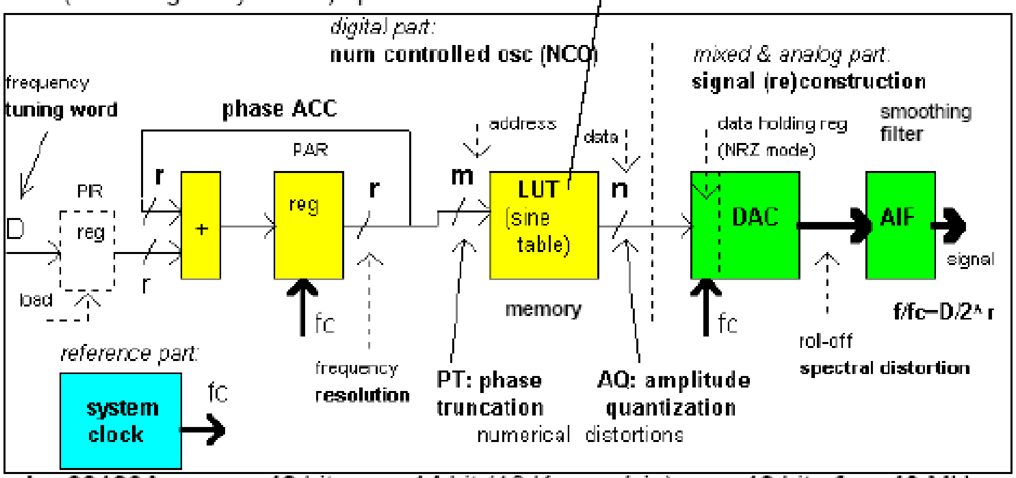
ARB (ARBitrary waveform) generátor

LOCAL: visszaállítás kézi vezérlésre a távvezérelt (**Adrs Rmt**) állapotból

Diszkrét (idő)rekordból DDS elvén generál analóg vizsgáló jelet.
A rekord (hullámforma) numerikus mintái könnyen szerkeszthetők szoftverrel (editálás).

Az editált hullámforma (egy teljes periódus) kerül az ARB gen memóriába
(**LUT**: look up table)

DDS (Direct Digital Synthesis) - phase ACCumulator



hp 33120A : **r** = **48** bit, **m** = **14** bit (16 K memória), **n** = **12** bit, **fc** = **40** MHz

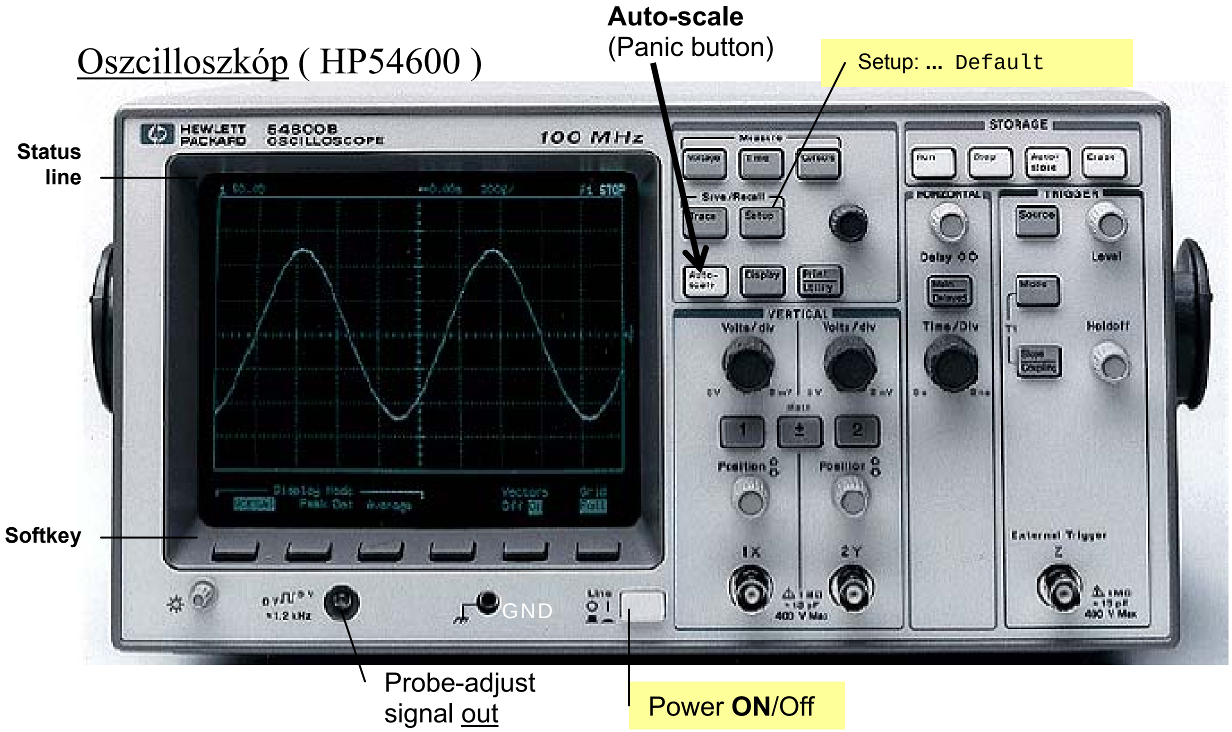
Frekvencia hangolási egyenlet:

Minden ∂t = 1/fc órajelre D (egész szám) értékkel változik az r bites "fázis"-akkumulátor tartalma (a memória címe) és az akkumulátor "túlcsordulása" adja az alap-periódust ($\equiv 2\pi$ fázis). Tehát a jel (relatív) fázis-változása és ebből az alap-frekvencia értéke

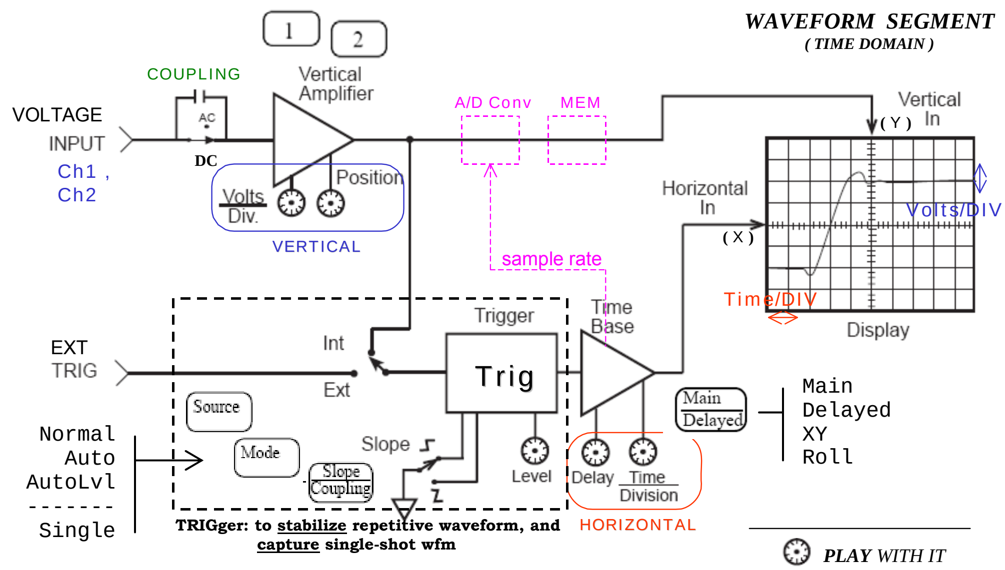
$$\frac{\partial\Theta}{2\pi} = \frac{D}{2^r} \quad \rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \left(\frac{fc}{2^r}\right)\cdot D, \text{ ahol } 1 \le D < 2^{r-1} \text{ (mintavételi tétel)}$$

A "fázis-csonkítás" (csak az MSB biteket használjuk aktuális memória címként: m << r !!) nem módosítja az átlag-frekvenciát (csak torzítást okoz, de m = n+2 választással a mindig jelenlévő "amplitúdó kvantálás": n hatása dominál).
Kérdés: miért célszerű a fázis-csonkítás, és mi történik D > 2^{r-1} értékre?

Oszcilloszkóp (HP54600)



Scope (graphic voltmeter) ... a "mental model"

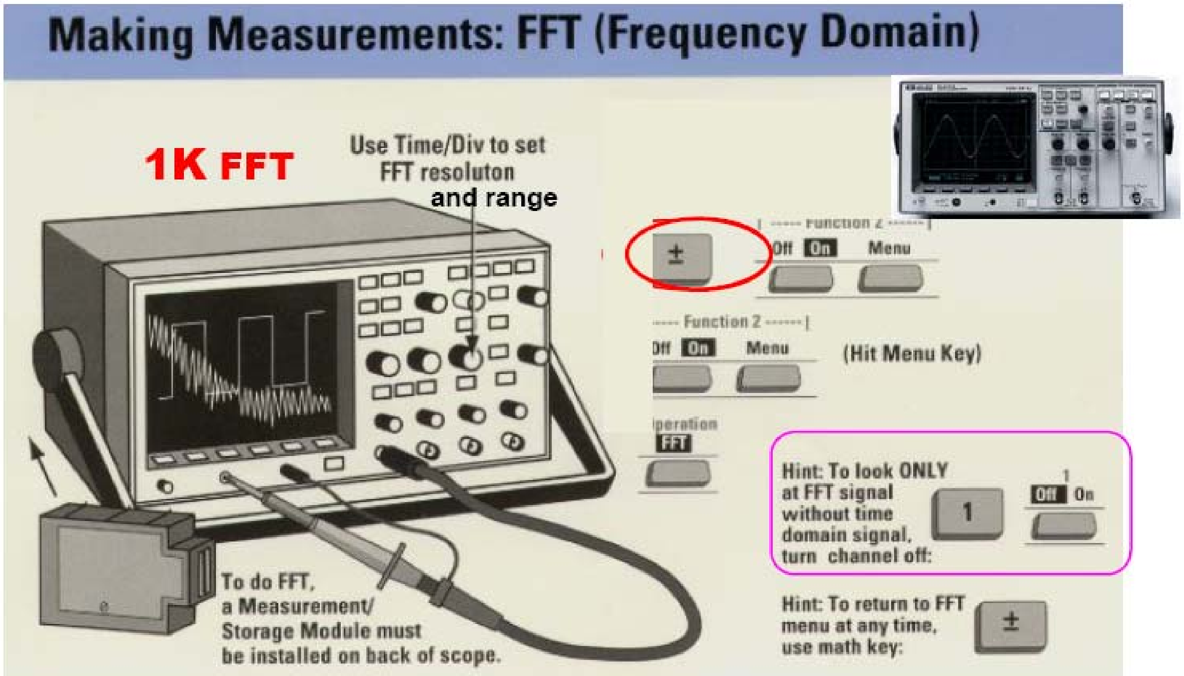


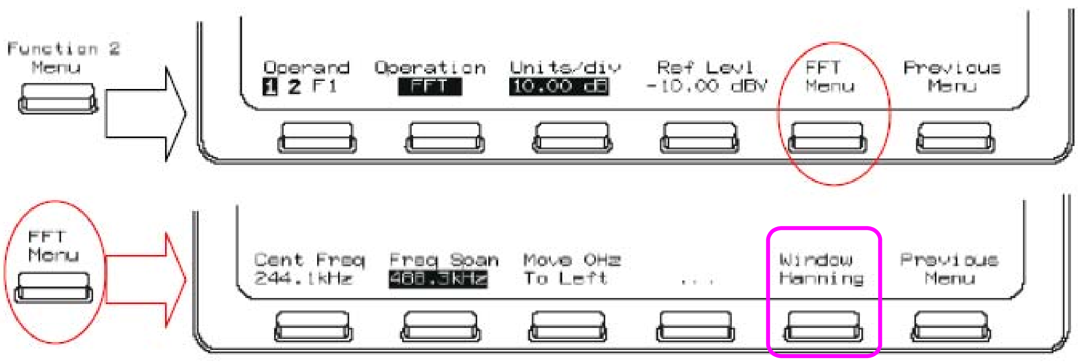
Kezelő szervek (**user interface**)

- Közvetlen vezérlés (**instant action**: *dedicated* buttons and knobs)
  - o Fehér nyomógomb(ok), pl. **Run**, Stop, Auto-store ... ; **Auto-scale**
  - o Forgatógomb(ok), pl. **`Volts/Div, Position`** ... **`Time/Div`** ...
- Menü vezérlés (**menu-button / softkey**)

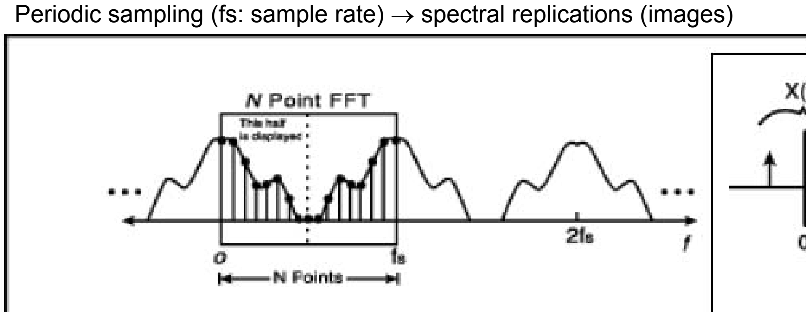
  Szürke nyomógob(ok), az aktuális funkció a képernyő alján, a *felirat nélküli* nyomógomb (`softkey`) felett jelenik meg, pl. Display `Normal/PeakDet/Average` ...

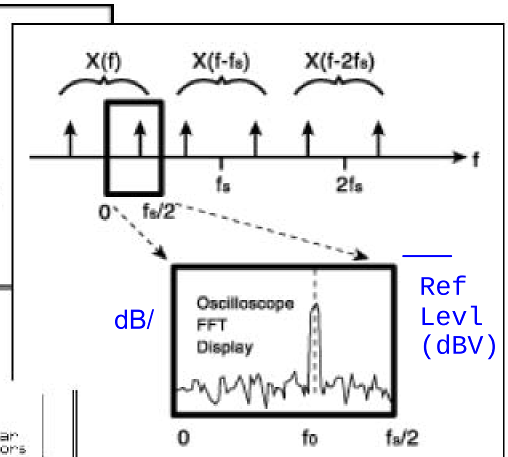
  Aktív paraméter beállítás: univerzális forgatógomb (*felirat nélkül*, a Cursors nyomógomb közelében), pl. Cursors `Source:1 / ActiveCursor: … t2`



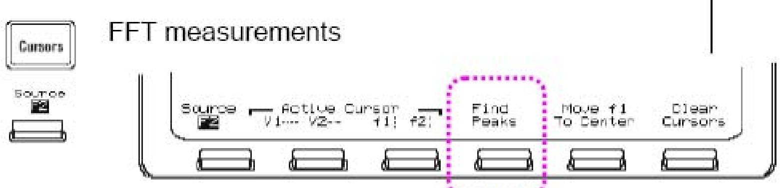


Periodic sampling (fs: sample rate) → spectral replications (images)

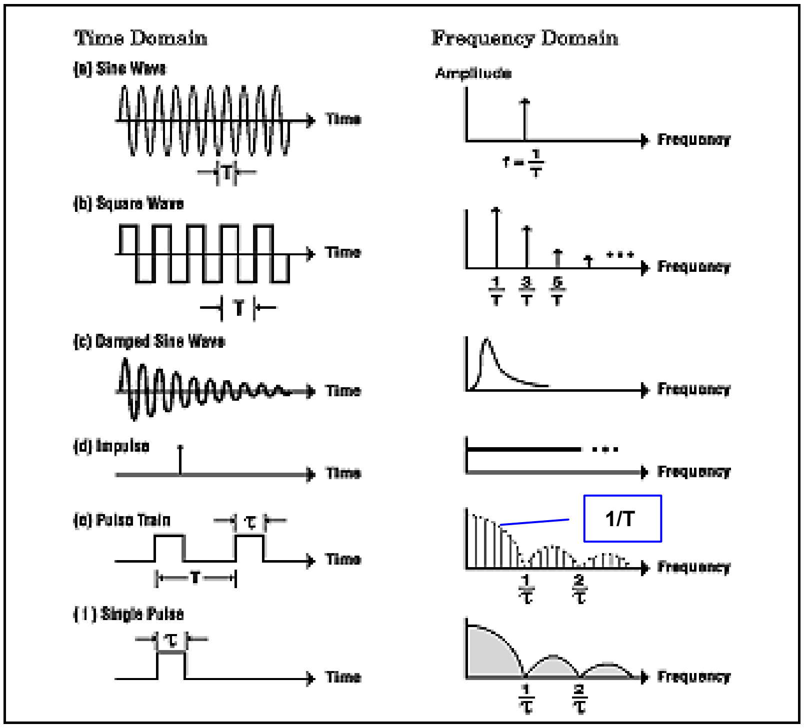




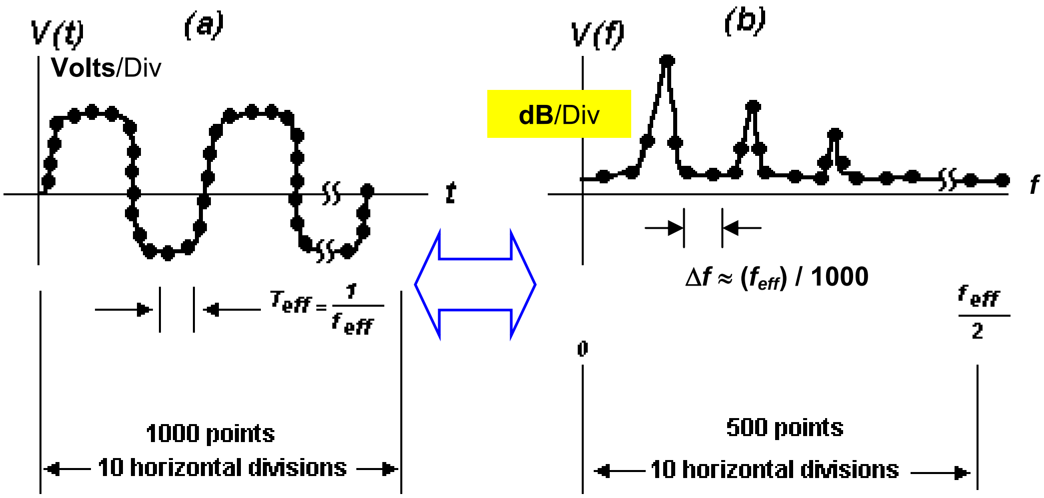
FFT measurements



Jelalak (időtartomány) ⇔ **spektrum** (frekvencia-tartomány) példák:



Megjelenítés: (a) **időtartomány**: **DSO** ⇔ (b) **frekvencia**-tartomány: **FFT**



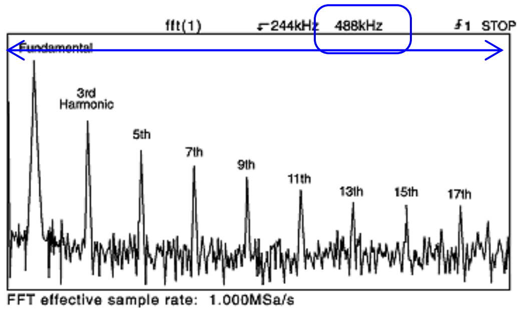
f_{eff} ≈ **1000 / (10."Time/Div") = 100 / (Time/Div) ...** effective **sample rate**

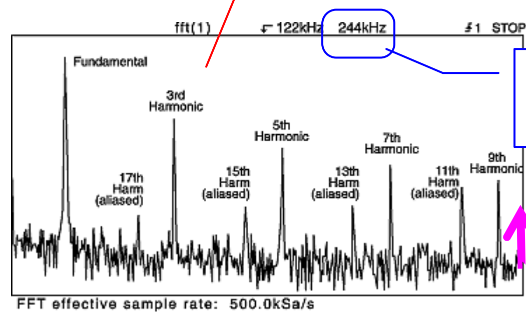
Hasonmás (**aliasing**): f = (k. $\mathbf{f_{eff}} \pm \mathbf{f_A}$) > $\mathbf{f_{eff}/2}$, k = 1,2, ... frekvenciájú komponens az **alap**sávba (0, $\mathbf{f_{eff}/2}$) "lapolódik" át (!) és $\mathbf{f_A}$ (< $\mathbf{f_{eff}/2}$) frekvenciájú komponensként jelenik meg az FFT kijelzésen (amely csak az amplitúdó értéket jeleníti meg, a fázist *nem*)!

Ablak (**window**): lecsökkenti az ún. nem-koherens mintavétel miatt fellépő "spektrum-szivárgás" (**leakage**) hatását. Frekvencia-méréshez → `Hanning`, amplitúdó-méréshez → `FlatTop`

miért rossz a sorrend**?**
(alias)

Hasonmás (ALIASING): **háromszög-jel** spektruma



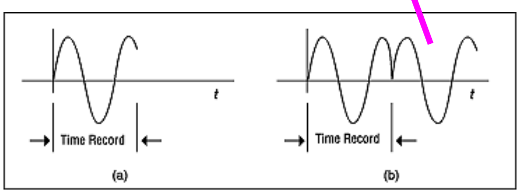


milyen
a skála**?**

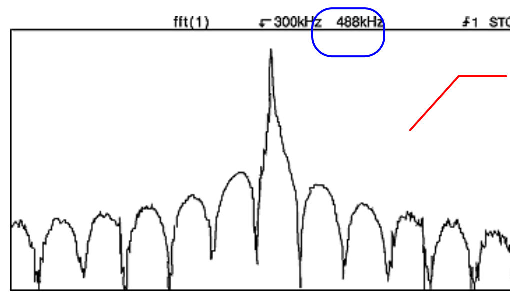
„Nyquist wall”: fs/2

Ablak (WINDOW) a spektrum szivárgás (leakage) csökkentéséhez: **szinuszos jel**

“nem-periódikus"



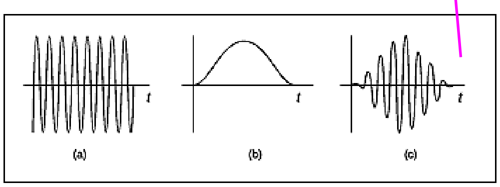
“nem-koherens” mintavétel



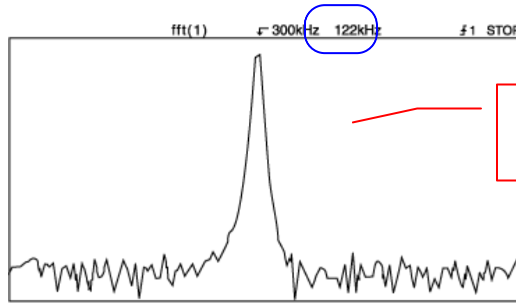
FFT - `"Rectangular"` window

miért nem
vonal**?**
(leakage)

a széleken "nullára simított"
időrekord: **periódikus** folytatás



nem-koherens mintavétel **<u>és</u> ablak**

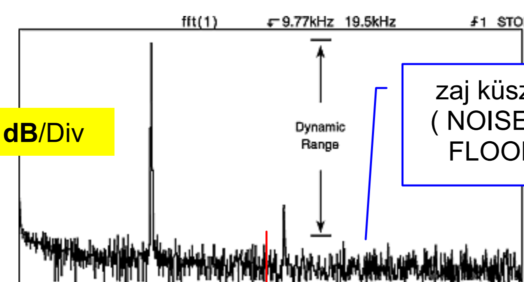


FFT - **„Hanning”** window

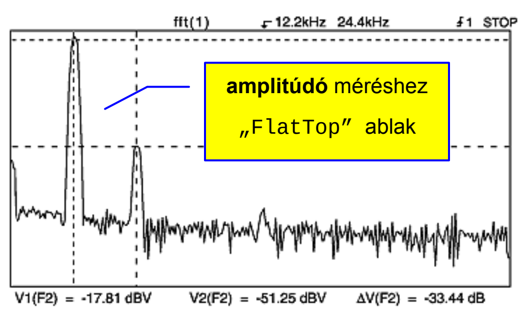
milyen
szűrő**?**

A spektrum mérés (FFT) <u>dinamika</u> <u>tartománya</u> tipikusan 60 dB (HP54600) és a két legnagyobb spektrum "vonal" **automatikus** méréséhez: $\boxed{\text{Cursors}}$ → `Find Peaks`

10 **dB**/Div



zaj küszöb
(NOISE
FLOOR)



amplitúdó méréshez
„`FlatTop`” ablak

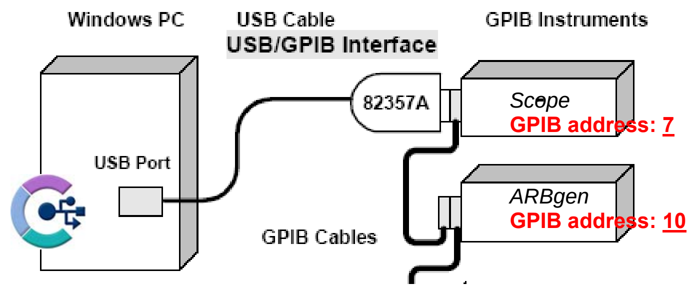
miért nem egy vonal**?** (→ torzítás)
miért zajos**?** (8 bites A/D átalakító → kvantálási zaj)

Függelék:

<u>Számítógépes kapcsolat</u> (*transparent* IO interface)

GPIB: General Purpose Interface (Instrument) Bus
[IEEE488/IEC625, HPIB]

IO driver: IO Libraries Suite 14.1



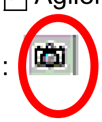
http://www.hit.bme.hu/people/papay/edu/GPIB/tutor.htm

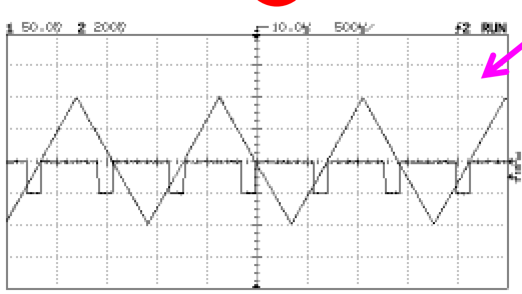
<u>IntuiLink szoftver</u> : Word Toolbar

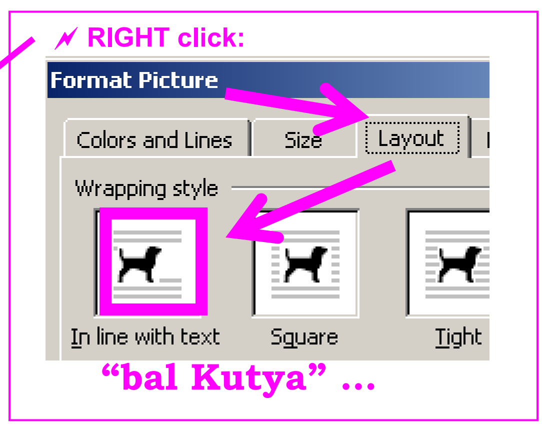
1. ~~Select the local language~~
2. **Connect** to the Scope and verify communication
3. ~~Save the current Scope settings to a file | Download previously stored settings to the Scope~~
4. Get **waveform data** from the Scope and make a <u>graph</u>
5. Insert an **image** of the Scope <u>display</u> in the document
6. Capture a **single measurement** from the Scope

Adding the toolbar in Word:

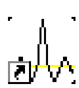
Tools | Templates and **Add-ins:** ☑ **Agt54600.dot**
(View | Toolbars: ☑ Agilent 54600 Scope **)**

Insert an **image** in Word: 





<u>IntuiLink szoftver</u> : Wfm Editor


Waveform Editor.lnk

Fontos!

1. NE írjuk felül a minta file-okat (SampleWF)
2. Letöltés (**Send** Waveform) <u>csakis</u> az átmeneti tárolóba (**Volatile** Memory) **!**
3. NE töröljük az ARBgen-ban tárolt hullámformákat (Wfm's on the Instrument)