# Háromszög (Simpson) hiba-eloszlás

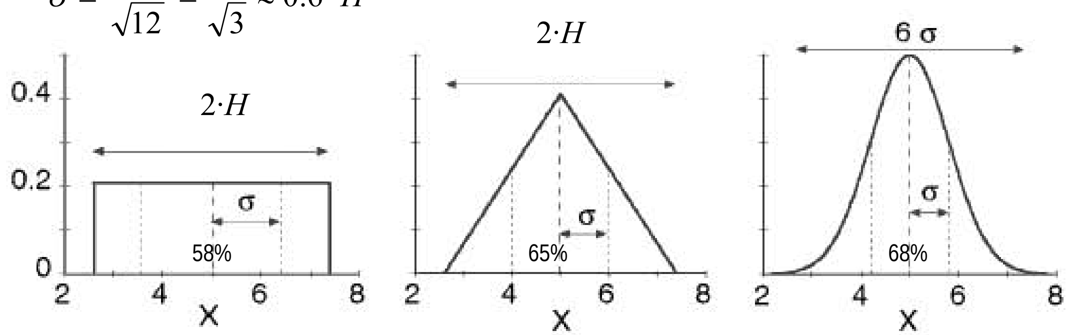
1. Specifikációs adatokból történő **mérési bizonytalanság** becsléshez minden meghatározó hiba-komponensnek a **σ szórás** értékére van szükség, ami a ± ***H*** specifikált hibakorlátból adható meg. Feltételezzük, hogy a hibák *szimmetrikus* eloszlásúak.

(a) Ha a ± ***H*** **hibakorlát** adott (vagyis 2·*H* a hiba terjedelme) és nagyobb valószínűséggel „várható” kisebb hiba (kevésbé valószínű, hogy aktuális értéke a tartomány szélén lehet), akkor *háromszög* eloszlás feltételezhető, míg ha ilyen ismeret/információ nincs, akkor *egyenletes* (négyszög alakú) eloszlás a modell (ami „konzervatívabb”, nagyobb szórású becslés).

(b) Ha a ± ***H*** hiba **99.7%-os** (vagy 95%-os) **megbízhatósági intervallumú** (bizalmi szintű), tehát „± **3σ** (vagy ± 2σ)” értékkel adott – vagyis 6·σ (vagy 4·σ) a hiba terjedelme, akkor a modell *normális* (harang görbe alakú) eloszlás.[1]

$$\sigma = \frac{2\cdot H}{\sqrt{24}} = \frac{H}{\sqrt{6}} \approx 0.4\cdot H$$

$$\sigma = \frac{2\cdot H}{\sqrt{12}} = \frac{H}{\sqrt{3}} \approx 0.6\cdot H$$




**azonos (m = 5) várható érték, hasonló terjedelmű szóródás**
**Egyenletes, háromszög (Simpson) és normális (Gauss) eloszlás**
**(a görbe alatti terület: 1)**

(c) A ***H*** félszélességből[2] (ill. normális eloszlásnál a bizalmi szintet is ismerve) a táblázat összegzi σ számítását.

Például: *digitális* műszer **felbontás** korlátja (a ±½ tartományban) egyenletes, *analóg* műszer kevésbé éles **leolvasás** korlátja (a ±1 skála-osztáson) háromszög eloszlással modellezhető.

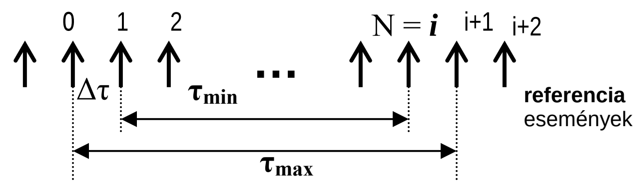
| Eloszlás típus | ***H*** osztója (σ értékéhez) |
|---|---|
| egyenletes | $\sqrt{3}$ |
| háromszög | $\sqrt{6}$ |
| normális (99.7%) | 3 |
| normális (95%) | 2 |

[1] Az eloszlások σ szórásának kiszámítása (ill. a négyszög, háromszög és harang-görbe egyenletének felírása, stb.) a matematikusok dolga.
Az ábra feltünteti, hogy a „ ± σ tartomány” (= 2·σ terjedelem) az esetek hány %-át tartalmazza.
A *normális* eloszlás nem korlátos (matematikai modell!), de nagy hiba fellépése igen kicsi (≈ 0) valószínűségű. Precíz méréseknél szokásos a „hat szigma” módszer (→ 12·σ hiba-terjedelem, 99.9997%-os bizalmi szint).
[2] *Relatív* hiba megadásnál a ± jel gyakran nem is szerepel a hibaspecifikációban.

2. *Háromszög* eloszlású a digitális **időtartam** (Start, Stop) **mérés**nél használt alapmódszer: „a mérendő idővel kapuzott referencia-esemény számlálás" ún. **±1** számlálási hibája (count error). Az egyenletes referencia-események $\Delta\tau$ távolsága a mértékegység.

(a) Miért ±1 a hiba terjedelme?
Az eljárás idődiagramja[3] közvetlenül megmutatja, hogy a megfigyelt N = *i* (egész) mérőszámot csakis $\boldsymbol{\tau_{min}} \le \boldsymbol{\tau} \le \boldsymbol{\tau_{max}}$ értékű $\boldsymbol{\tau}$ időtartam generálhatta:

$$\boldsymbol{\tau_{min}} = (i\text{-}1)\cdot\Delta\tau \quad \text{és} \quad \boldsymbol{\tau_{max}} = (i+1)\cdot\Delta\tau$$



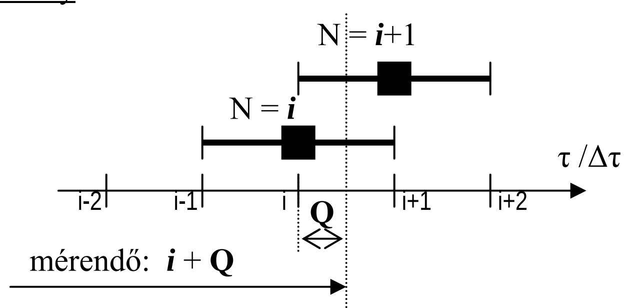

A minimális értéknél: még éppen számlálásra kerül az „1" és „*i*" jelű esemény, míg a maximális értéknél: nem számlálódik a „0" és „*i*+1" jelű referencia-esemény. Ha tehát a $\boldsymbol{\tau}$ szélességű kapujel „ *i*" számú eseményt „fog közre", akkor N = *i*. Mindkét szélsőséges eset persze igen kicsi valószínűségű!

Az egyenlőtlenségbe helyettesítve a határokat, átrendezéssel

$$-1 \le \left(\frac{\tau}{\Delta\tau}\right) - i \le 1\,,$$

vagyis a **c** = ($\tau$ /$\Delta\tau$) – *i* számlálási hiba [az egységre normált mérendő (**$\boldsymbol{\tau}$ /$\boldsymbol{\Delta\tau}$**)[4] és a mért érték (***i***) eltérése] korlátos: |**c**| < 1, azaz a **HIBAKORLÁT**: **±1**.

Az N = *i* megfigyelésből (a mérésből) tehát csak azt tudjuk, hogy a – fent megállapított – mért érték körüli tartományban volt a mérendő:

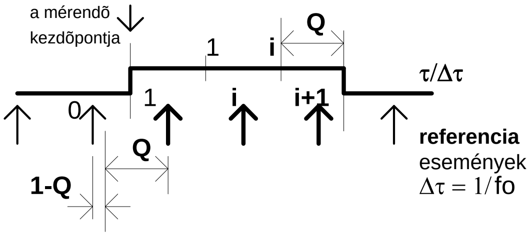



(b) Mit mondhatunk a hiba eloszlásáról?
Legyen az aktuális mérendő értéke **($\boldsymbol{\tau}$ /$\boldsymbol{\Delta\tau}$) = *i* + Q**, ahol *i* egész szám és 0 ≤ **Q** < 1 (a törtrész). Ezt az előző ábrán be is rajzoltuk.
Látható, hogy csakis N = ***i*** vagy N= ***i*+1** mérőszámot kaphatunk ilyen értékű mérendőnél (és más érték *nem* adódhat!).

---

[3] Könnyű ideális eseményeket (= ideális számlálandó referencia órajeleket) rajzolni az ábrán. Valójában véges felfutású és a számláláshoz szükséges szélességű impulzusokkal van dolgunk. Amíg pl. a „közvetlen kapuzás" okozta pulzus-csonkítás megfelelő áramköri felépítéssel kivédhető, addig az esemény fellépés (a véges-szint átlépés komparálás) és ugyanígy a Start és a Stop idő-hibája is része a mérési bizonytalanságnak. Ezeket itt nem elemezzük.
[4] A $\Delta\tau$ mértékegységre normált bemenetet, a valós értékű arányt tekintjük mérendőnek (és nem magát a $\tau$ időtartamot). Ezért puszta szám (**±1**) a hibakorlát.

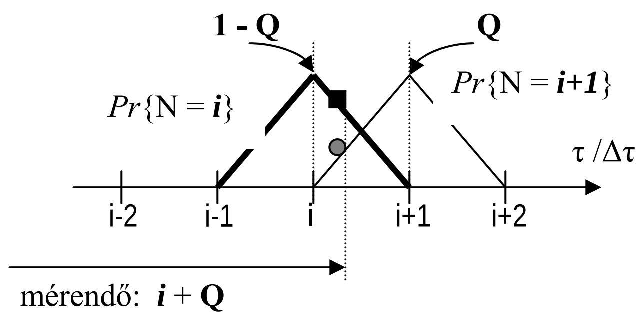
De mitől függ, hogy éppen melyik érték lép fel (a kettő közül?)
Válasz: ezt „a mérendő kezdőpontjának" aktuális (a referencia órajelhez viszonyított) helyzete dönti el és a törtrész (**Q**) befolyásolja (az ábrán ***i*** = 2):




<u>Ha</u> a kezdőpont a referencia(óra)-periódus **Q**-val jelzett részében lép fel (mint az ábrán), akkor N = ***i* *+1***, egyébként pedig ( <u>ha</u> az **1-Q** részben van a Start, akkor ) N = ***i*** mérőszám a mérés eredménye.
Mivel nincs ismeretünk arról, hogy két referencia esemény között hol lép fel a Start, feltételezzük – ebben a tartományban – a kezdőpont *egyenletes* eloszlását.[5] A geometriai arányokból a két eset valószínűsége:

$$Pr\{\mathrm{N} = \mathbf{i}\} = \mathbf{1\text{-}Q} \quad \text{és} \quad Pr\{\mathrm{N} = \mathbf{i+1}\} = \mathbf{Q}, \qquad \text{ahol } 0 \le \mathbf{Q} < 1$$

Felrajzolva mindkét **Q**-függést („*i*" értéke az origó!), kapjuk a hiba-eloszlásra a **HÁROMSZÖG** formát (kiterjesztve két szomszédos szakaszra is a rajzot):




Ha tehát „*i*" érték közelében van a (τ /Δτ) mérendő, azaz **Q** kicsi, akkor az N = ***i*** mérőszám sokkal valószínűbb (mint az N = *i*+1). Ebből persze *nem* jósolható meg, hogy egy mérésnél mi jön ki, az eredmény véletlen.

(c) <u>Példa</u>: legyen a mérendő időtartam τ = 28.3 μs és a mértékegység Δτ = 10 μs (azaz a referencia események gyakorisága $f_0$ = (1/Δτ) = 100 kHz). Ebből a *normált* mérendő értéke (τ /Δτ) = **2.83** = 2 + 0.83, így ***i*** = 2 és **Q** = 0.83.

*Egy mérésnél* a mérőszám N = **3** (83%-os eséllyel) **vagy** N = **2** (17%-os eséllyel).

3. És itt meglódulhat a fantáziánk: mit kapunk, ha ilyen feltétel mellett pl. 100 mérést végzünk és ennek *átlagát* vesszük? (Tudjuk: az átlagolás csökkenti a bizonytalanságot.) 100 esetből várhatóan (!) 83 esetben: **3**, míg 17 esetben: **2** az egyedi mérések eredménye, ezek átlaga: (83·**3** + 17·**2**)/100 = **283**/100 = **2.83** (ennek egysége Δτ = 10 μs, így a mért érték: 2.83•10 μs = 28.3 μs), tehát átlagolással a mérendő *törtrésze is* becsülhető!

[5] Ez azt jelenti, hogy a referencia-esemény sorozat (az órajel) és a mérendő kezdőpontja (a Start) <u>nincs szinkron</u> kapcsolatban. Ez feltételezhető, mivel a referencia és a mérendő különálló forrás.
Ha viszont mégis csak fennáll (valamilyen okból) a szinkron kapcsolat, akkor *ismételt* kísérleteknél mindig azonos (!) mérőszám adódik (tehát az itt kapott hiba-eloszlás *nem* használható).

Valójában ez a konkrét (átlag)érték csak ritkán adódhat (hiszen az esély *csak valószínű,* de nem biztos), és különböznek az egyes átlagolások eredményei is.
Érdemes a statisztikai átlagolást egy kissé részletesebben is elemezni, hogy ennek az eredménynek a *szóródására* is kapjunk adatot.

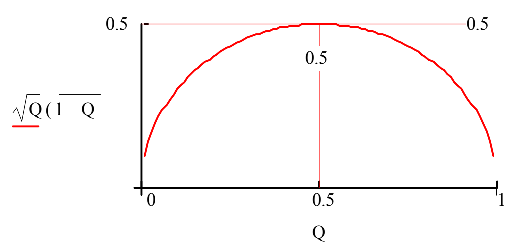
Végezzünk az előbbi feltétellel ***n*** számú, egymástól *független* mérést. A j-edik egyedi mérésnél a mérőszám értéke:

$$N_j = \boldsymbol{i} + b_j, \text{ ahol } b_j = \mathbf{0} \text{ vagy } \mathbf{1}, \text{ és } Pr\{b_j = \mathbf{0}\} = \mathbf{1\text{-}Q}, \quad Pr\{b_j = \mathbf{1}\} = \mathbf{Q}$$

A mérések <u>átlaga</u>:

$$N_a = \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} N_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(i + b_j\right) = i + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j = i + \frac{1}{n}\cdot\beta$$

> A <u>matematikus</u> <u>mondja</u>: $\beta$ *binomiális* eloszlású valószínűségi változó (mert $\beta$ éppen azt adja meg, hogy *két* lehetséges kimenetelből hány esetben valósult meg az egyik: a **Q** valószínűségű $b_j = \mathbf{1}$ esemény).
> $\beta$ aktuális értéke *egész* szám: $0 \le \beta \le n$, várható értéke: $m_\beta = n\cdot\mathbf{Q}$, szórásnégyzete pedig: $(\sigma_\beta)^2 = n\cdot\mathbf{Q}\cdot(1\text{-}\mathbf{Q})$.
> Az átlagérték becslés tehát *torzítatlan*, mert $N_a$ <u>várható értéke</u>
>
> $$m_a = i + \frac{1}{n}\cdot m_\beta = i + Q$$
>
> és ez éppen a mérendő (ahogyan ezt már az előző példában is „józan ésszel" beláttuk), $N_a$ <u>szórása</u> pedig
>
> $$\sigma_a = \frac{1}{n}\cdot\sigma_\beta = \frac{\sqrt{Q\cdot(1-Q)}}{\sqrt{n}} \le \frac{1/2}{\sqrt{n}},$$
>
> tehát egy méréshez képest $\sqrt{n}$ -szer *lecsökken* (ez ismert "ökölszabály" a statisztikus átlagolásnál), a felső becslés az alábbi ábrából olvasható ki:




Az átlagolással kapott <u>mért érték</u>:

$$\tau \approx N_a \cdot \Delta\tau = \left(i + \frac{\beta}{n}\right)\cdot\Delta\tau = \underbrace{\left(n\cdot i + \beta\right)}_{E}\cdot\underbrace{\frac{\Delta\tau}{n}}_{e}$$

ahol "*E* (= egész)" az új **mérőszám**, és "*e*" az új **mértékegység**, ami *n*-szer *jobb*!

> Maga az egyedi méréseket végző számláló akkumulálja (szummázza) az *E* átlagot (tehát a realizálás egyszerű), *n*-nel a végeredmény könnyen skálázható.

<u>Megjegyzés</u>: az *egység* (*felbontás*) ***n*-szer**, a *bizonytalanság (szórás)* azonban csak $\sqrt{n}$ **-szer** javul (növekvő *n*-nel egyre bizonytalanabbak a legkisebb helyértékű jegyek).

<u>Tanulság</u>: "zajos" (ingadozó) értékekből – pl. átlagolással, a mérési idő rovására – az „eredeti felbontáson túl" is kihámozható információ.