MerFiz **Ea. vázlat**

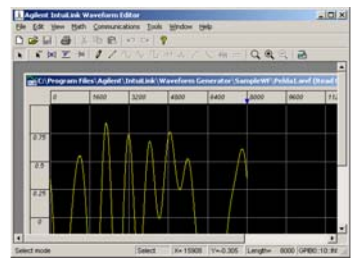
1.sz és 6.sz mérés előkészítése (tantermi „gyakorlat”, 2ó, teljes évf.)

1.sz: Mérések digitális oszcilloszkóppal, *majd időben ezt követően*

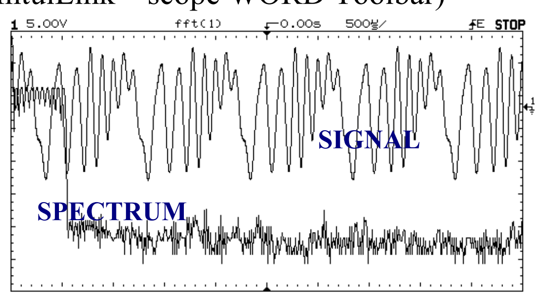
6.sz: GPIB [1] interfész alkalmazása – Numerikus jelszintézis

Témák (... light Math):

1. Egyenletes **mintavétel** (→ periódikus spektrum, képmások: *images*), frekvencia bizonytalanság (hasonmás: *aliasing*, Nyquist zónák), példák az időtartományban is (szinuszos jelre … *Nyquist voodoo*), mert itt nehezebb a jelenség megértése és szemléltetése
2. Jel**szintézis** (DDS, ARBgen)
   a. rekonstrukció – „mint a CD lejátszó(!)” (ZOH, sinx/x torzítás), példa: 8 pontos szinusz **…** és ha *frekvenciát* kell változtatni?
   b. fázis ACC („mérnöki trükk”, az alapfrekvencia értéke)
   c. 6. sz. mérés: Szerkesztés (IntuiLink – Waveform Editor)



3. Jel**analízis** (DSO, FFT = DFT ≈ Fourier-sor)
   a. időtartomány (időalap: „Time/DIV” → mintavételi frekvencia)
   b. frekvencia tartomány (**1K** FFT, átfogás, felbontás, ablak, dB)
   c. a két tartomány *ellentmondása*(!), a rekord-hossz szerepe
4. Mindkét mérésnél: **e-jegyzőkönyv** (IntuiLink – scope WORD Toolbar)



5. **GPIB** – *transparent* interface (WinXP PC kapcsolat: GPIB/USB, IO driver: Suite 14.1)

Megjegyzések:

- Ez az összefoglaló csak a **mintavétel és rekonstrukció** *alapjait* vázolja, a műszerekhez és egyéb háttér információkhoz lásd a mérési utasításokat (pl. FFT)
- 6. sz. mérésnél van Házi Feladat, ellenőrző ZH, és ismerni kell az oszcilloszkóp kezelést (lásd megelőző 1. sz. mérés)
- Minden mérőcsoport kap jegyzetet, ezeket a 6. sz. mérésre hozzák vissza . A jegyzet *plusz* info-forrás, ismerete NEM feltétele a méréseknek

---

[1] GPIB = General Purpose Interface (Instrument) Bus, USB = Universal Serial Bus
DDS = Direct Digital Synthesis, ARBgen = ARBitrary (waveform) generator, ZOH = Zero Order Hold,
ACC = (phase) ACCumulator, DSP = Digital Signal Processing
DSO = Digital Storage (Sampling) Oscilloscope, FFT = Fast Fourier Transform, DFT = Discrete Fourier Transform
1K = 1024 ≈ $\mathbf{10^3}$; dB = decibel: http://www.hit.bme.hu/people/papay/edu/Db/Decibel.htm

MINTAVÉTEL (sampling)

- <u>Szinuszos</u>[2] jel, frekvenciája: **f = k·fs ±fa** és **<u>fa < fs/2</u>**, k egész szám, a mintavételi frekvencia**:** **fs** = 1/Δt, index: i (egész szám), a minta értékek:

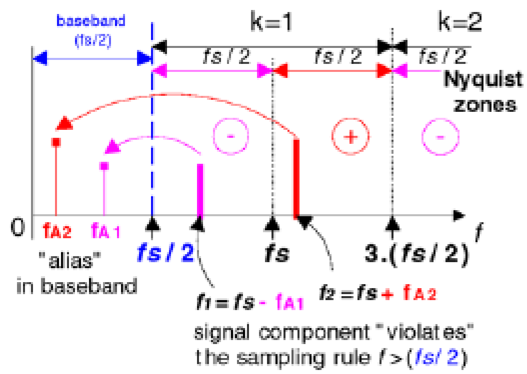
  $$x[i] = \sin(2\pi f \cdot i \cdot \Delta t) = \sin(2\pi \cdot i \cdot f\,/\,fs) = \sin(\pm 2\pi \cdot i \cdot fa\,/\,fs)$$

  mert a szinusz 2π-szerint (mod 2π) periodikus függvény $\sin(\Phi + 2\pi \cdot m) = \sin(\Phi)$

  Másszóval: egy **fa** frekvenciájú és (és *minden* k-ra) az **f** frekvenciájú szinuszos jel minta-értékei <u>azonosak</u> (a jelek, **fs**-sel mintavételezve, mintavétel <u>után</u> NEM különböztethetők meg!)

  fa az ún. **hasonmás** (*alias*)[3] frekvencia – az *alap*sávban
  fa/fs az ún. numerikus frekvencia (**fa/fs < 1/2**)

- A frekvencia tartományban egyszerű a jelenség leírása:
  Nyquist zónákra (fs/2 szélességű tartományokra) osztva a frekvencia tengelyt, <u>minden</u> k ≥ 1 értékű komponens az **<u>alap</u>**<u>sáv</u>ba (az *első* Nyquist zónába, a 0 – fs/2 tartományba) lapolódik, mégpedig a *páros* Nyquist zónákból *fázis-fordítással* [sin(-x) = - sin(x)]



- Időtartományban nehezebb az áttekintés, de (math sw-rel) tanulságos és meggyőző <u>példák</u> adhatók (pl. *Nyquist voodoo*: mintavétel után NINCS jel !? – lásd Függelék)

- A frekvencia-*bizonytalanság* <u>másképp</u> <u>szemléltetve</u>: az egyenletes mintavétel eredménye periódikus spektrum, **fs** = 1/Δt egész többszörösei centrummal **képmások** (*images*) jelennek meg. (Vagyis az <u>alap</u>sávi <u>két</u>oldalas Fourier-spektrum ismétlődik *minden* **k·fs** helyen.)

Megjegyzés: ezek NEM harmónikusok, és persze az $x[i]$ mintavételezett jel NEM végtelen teljesítményű! A képmások *azt* szemléltetik, hogy azok *bármelyikének* mintavételezésével előáll $x[i]$.

- Ebből következik („Nyquist” tétel): a mintavétel *megfordítható*, ha a jel sávkorlátozott (mert nem lép fel átlapolódás, ha a bemenet <u>sáv</u>ja *kisebb* mint egy Nyquist <u>zóna</u>)

  Speciális <u>alkalmazás</u>: keskenysávú jel (pl. rádió KF: közbenső frekvencia-sáv) mintavételezéssel (pl. szándékos *alul*mintavételezéssel) az alapsávba transzponálható (ahol kedvező a DSP → digitális rádió)

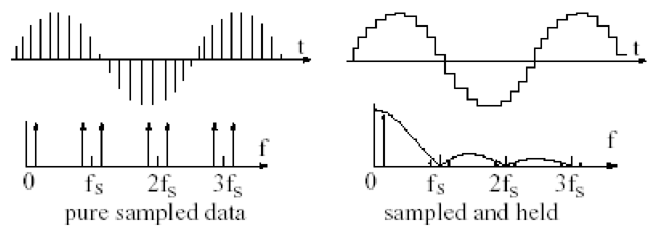
---

[2] Kihasználjuk egy (összetett) jel **Fourier felbontás**át, így elegendő *egy* komponenst vizsgálni
[3] A 6. sz. mérésen <u>megtapasztaljuk</u> a hasonmás (aliasing) jelenséget: a **Nyquist-fal**ról (**fs/2** értéknél) „visszaverődik” a jelkomponens ...

REKONSTRUKCIÓ (Undo sampling)

- Elvi (WKS: Whittaker, Kotelnikov, Shannon) módszer[4] a visszaállításra az **ideális** *alul*áteresztő szűrő (*alap*sáv): <u>szorzás</u> a frekvencia tartományban, ami az időtartományban SINC(x) = sin(πx)/πx magfüggvénnyel[5] <u>konvolúció</u>
- Egyenletes mintavétel esetén igen **praktikus** módszer a mintapontok közötti értékek becslésére a szakaszonként *konstans* interpoláció (tartás, ZOH: Zero Order Hold), amelyet egyszerű *hardver* eszköz (digitális regiszter) realizál.

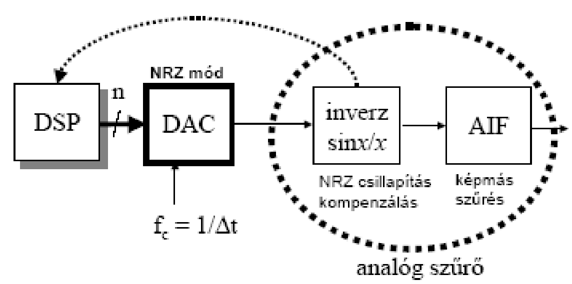
  Ez a lépcsős hullámformát[6] generáló (NRZ: Non-Return-to-Zero) üzemmód azonban NEM tünteti el a *képmások*at, csak „burkoló (roll-off)" típusú **spekrum csillapítás**t ad - sajnos a hasznos sávban is, ez az ún.



  $\sin(x)/x, \quad ahol \quad x = \pi \cdot (f / fs)$

  torzítás. Éles „leszívások" (zérusok) lépnek fel *fs* egész többszöröseinél, és közel – 4 dB a csillapítás az elvi sávhatáron ($f = fs/2$).

  A csillapítás <u>kompenzálható</u> „inverz sinx/x" szűrővel az analóg tartományban, pl. összevonva az „igazi" képmás (rekonstruáló, AIF: Anti-Imaging Filter) szűrővel, vagy akár a digitális tartományban is elvégezhető a kiegyenlítés („előtorzítás")[7]



- Eddig teljes a *hasonlóság* a CD lejátszóhoz (DAC: Digital-to-Analog Converter)... Ha azonban **frekvenciát** kell **változtani** (ami egy generátornál alapkövetelmény), akkor újabb mérnöki trükk: a hagyományos számláló típusú memória-pointer helyett *fázis akkumulátor*[8] (azaz minta-kihagyással gyorsítható a periódikus jel-kiolvasás)

  A DD(F)S: direct digital (Frequency) synthesis nagy átfogásnál is *finom* frekvencia (és fázis) hangolást és igen *gyors* frekvencia váltást tesz lehetővé

---

[4] Tanulságos a történet: http://www.hit.bme.hu/people/papay/edu/Conv/pdf/origins.pdf
… hogyan kezelték a problémát "barkácsolók", kiváló mérnök-fizikusok (Nyquist) és "elméleszek"

[5] Egy (pont)minta hozzájárulása a jelhez:
minta-középpontú, a mintával skálázott és a mintagyakorisághoz illesztett (a többi minta helyén zérus értékű) SINC függvény - http://www.hit.bme.hu/people/papay/edu/Conv/pdf/Sampling.pdf

[6] Ez az üzemmód megoldja azt a *gyakorlati* problémát, hogy elvileg pont(pillanatérték)-mintákat igényelne a visszaállítási (interpolációs) algoritmus. (Numerikusan persze számolhatunk zérus szélességű mintával.)

[7] <u>Kérdés</u>: eldönthető-e a hp33120A ARBgen specifikációs adataiból, hogy a készülékben *van-e* sinx/x spektrum-korrekció?

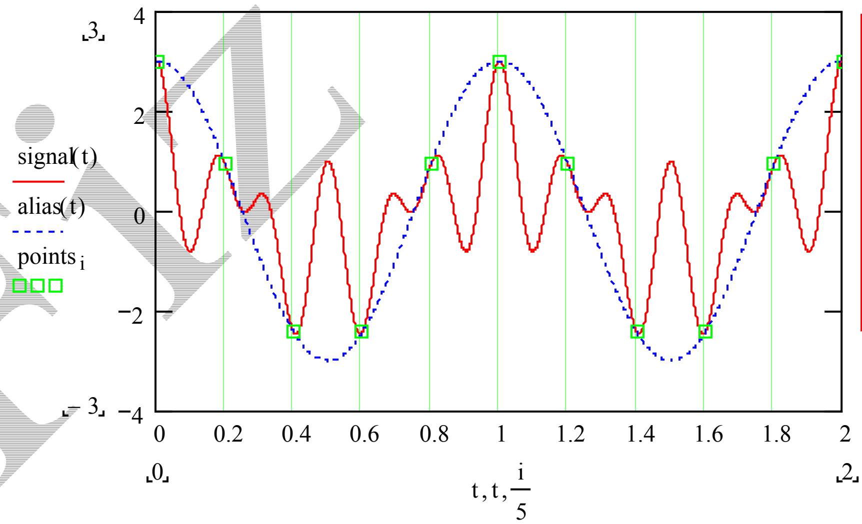
[8] Részletesebben: <u>6.sz.</u> mérési utasítás Függelék, vagy http://www.hit.bme.hu/people/papay/sci/DDS/Backgnd/skip.htm

I. A mintavétel hatása az <u>idő</u>tartományban (Mathcad):

$t := 0, .01 .. 2$ $\quad$ $sample\_rate := 5$ $\quad$ $\Delta t := \dfrac{1}{sample\_rate}$ $\quad$ $i := 0 .. 10$

$signal(t) := \cos(2\cdot\pi\cdot t) + \cos(8\cdot\pi\cdot t) + \cos(12\cdot\pi\cdot t)$

1: $points_i := signal(i\cdot\Delta t)$ $\quad$ $alias(t) := 3\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot t)$ $\qquad$ mert **cos(-x) = cos(x)**



Megjegyzés:

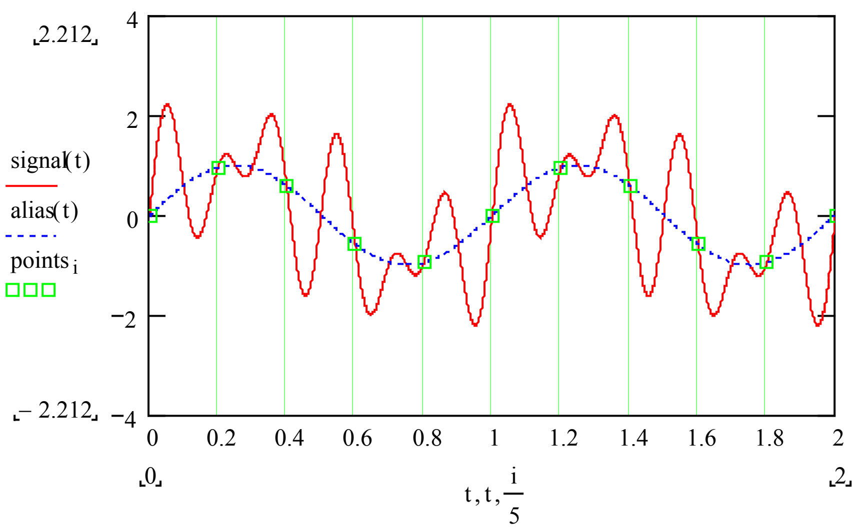
<u>2π·(i/5)</u>,

8π·(i/5) = 2πi - <u>2π·(i/5)</u>,

12π·(i/5) = 2πi + <u>2π·(i/5)</u>

$signal(t) := \sin(2\cdot\pi\cdot t) + \sin(8\cdot\pi\cdot t) + \sin(12\cdot\pi\cdot t)$

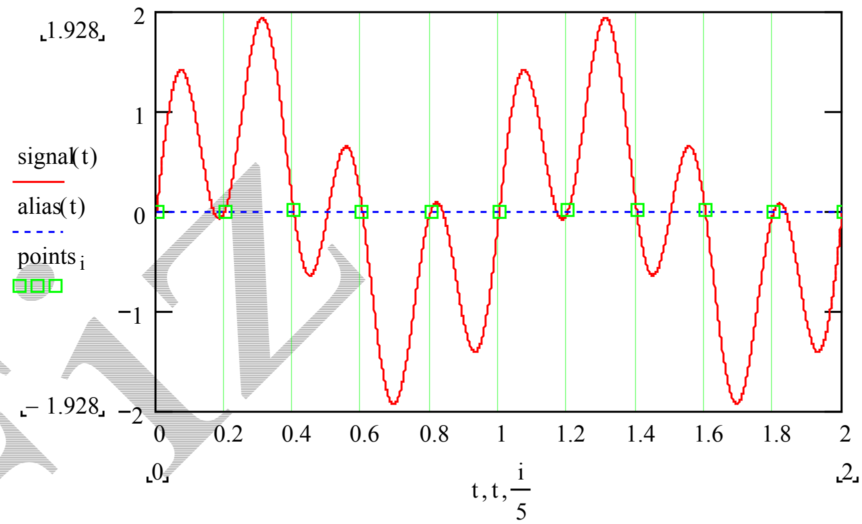
2: $points_i := signal(i\cdot\Delta t)$ $\quad$ $alias(t) := 1\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot t)$ $\qquad$ mert **sin(-x) = - sin(x)**



Nyquist voodoo:

$\text{signal}(t) := \sin(2\cdot\pi\cdot t) + \sin(8\cdot\pi\cdot t)$

3: $\text{points}_i := \text{signal}(i\cdot\Delta t)$ $\text{alias}(t) := 0$ mert **sin(-x) = - sin(x)**



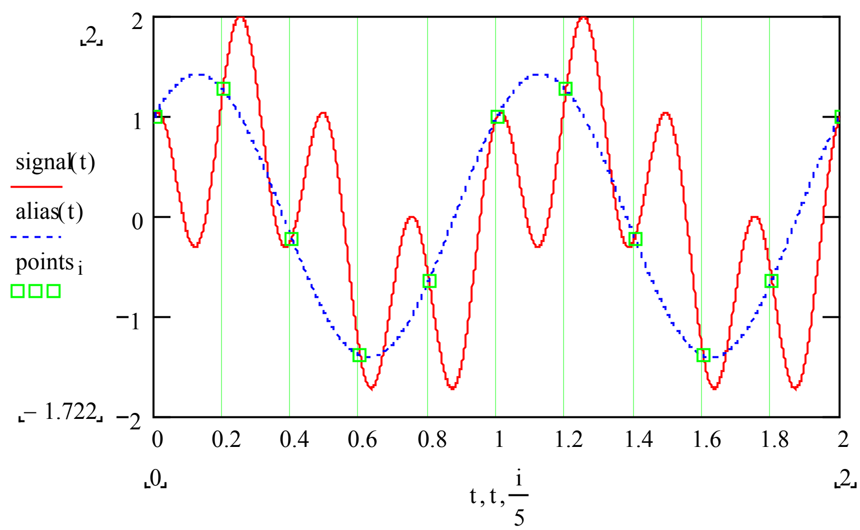
Megjegyzés:
csak két komponens

2π·(i/5),

8π·(i/5) = 2πi - 2π·(i/5)

$\text{signal}(t) := \sin(2\cdot\pi\cdot t) + \cos(8\cdot\pi\cdot t)$

4: $\text{points}_i := \text{signal}(i\cdot\Delta t)$ $\text{alias}(t) := \sin(2\cdot\pi\cdot t) + \cos(2\cdot\pi\cdot t)$ $= \sqrt{2}\cdot\sin(2\pi t + 0.785)$



II. Fourier series – compact form

$$v(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$

f_0 fundamental frequency, $2f_0$, $3f_0$ … harmonics
A_n (amplitude) and φ_n (phase) Fourier series coefficients
A_0 DC offset

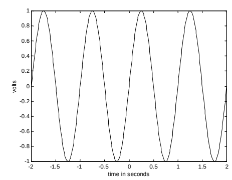
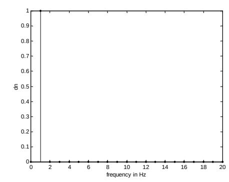
Sine, Square, Triangle and Saw-Tooth (Ramp) wave: $\pm U$ volt, $A_0 = 0$ (and 20 coefficient)

SIGNAL | SPECTRUM (**linear** ampl scale)

Sine:

$A_1 = U$, $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ (Note: $\varphi_1 = 0$ for a cosine wave!)

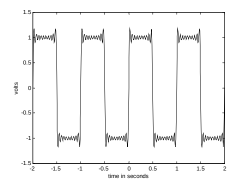
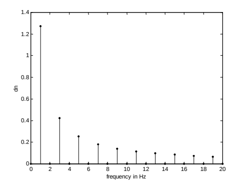
$$v(t) = U\cos\left(2\pi 1\times f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = U\sin(2\pi 1\times f_0 t)$$

Square:

$$n\ odd: \quad A_n = \frac{4U}{n\pi} \quad \varphi_n = -\frac{\pi}{2}$$

$$n\ even: \quad A_n = 0 \quad \varphi_n = 0$$

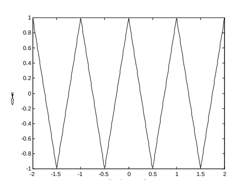
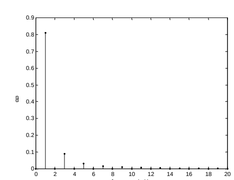



$$v(t) = \frac{4U}{\pi}\left[\frac{1}{1}\sin(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3}\sin(2\pi 3 f_0 t) + \frac{1}{5}\sin(2\pi 5 f_0 t) + \frac{1}{7}\sin(2\pi 7 f_0 t) + \ldots\right]$$

Triangle:

$$n\ odd: \quad A_n = \frac{8U}{n^2\pi^2} \quad \varphi_n = 0$$

$$n\ even: \quad A_n = 0 \quad \varphi_n = 0$$

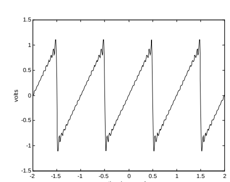
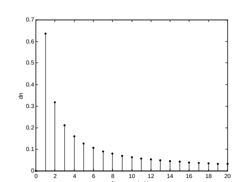



$$v(t) = \frac{8U}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cos(2\pi f_0 t) + \frac{1}{3^2}\cos(2\pi 3 f_0 t) + \frac{1}{5^2}\cos(2\pi 5 f_0 t) + \frac{1}{7^2}\cos(2\pi 7 f_0 t) + \ldots\right]$$

Saw-Tooth (Ramp):

$$n\ odd: \quad A_n = \frac{2U}{n\pi} \quad \varphi_n = \frac{-\pi}{2}$$

$$n\ even: \quad A_n = \frac{2U}{n\pi} \quad \varphi_n = \frac{\pi}{2}$$

$$v(t) = \frac{2U}{\pi}\left[\frac{1}{1}\sin(2\pi f_0 t) - \frac{1}{2}\sin(2\pi 2 f_0 t) + \frac{1}{3}\sin(2\pi 3 f_0 t) - \frac{1}{4}\sin(2\pi 4 f_0 t) + \ldots\right]$$