

Az időtartam kvantálás csatorna profilja

Dr. PÁPÁY ZSOLT

BME Híradástechnikai Elektronika Intézet

DK.: 519.2 „A”-681.32

A csatorna profil egy kvantálónak a bemenet eloszlásától független statisztikus leírását teszi lehetővé. A cikk az időtartam kvantálás csatorna profilját, a digitális eltolás lehetőségét, a kapuzási hiba hatását és a kvantálási hiba — csatorna profil kapcsolatot vizsgálja.

A gyakorlatban realizálható kvantálók (analóg-digitál konverterek) döntési szintje véletlen változó. Ezért csak az adható meg, hogy milyen valószínűséggel generál az eszköz *előírt* kimenetet ($N=i$ mérőszámot) egy *adott* bemenet (*kapuzott* x feltetele) mellett. Jelölje az $N=i$ eseménynek rögzített x bemeneti feltételre vonatkozó feltételes valószínűségét

$$P\{N=i|x\}=P_i(x)$$

Ezen feltételes valószínűség, mint x függvénye, a csatorna profil.

A csatorna profil független a bemenet eloszlásától, méréssel is meghatározható, így igen hatásos eszköz a kvantáló jellemzésére. A cikkben — az időtartam kvantálás kapcsán — a matematikai modell felhasználásával történő előállítását és a kvantálási hibával való kapcsolatát vizsgáljuk.

Ideális eset

A kvantáló funkcionális vázlatát és egy konverzió idődiagramját az 1. ábra szemlélteti. „Végtelenül keskeny” és konstans f_0 frekvenciájú referencia (órajel) impulzusokat tételezzünk fel, valamint azt, hogy a konverzió kezdetén *alapállapot*: „set 0” áll fenn (mind az osztóra, mind a számláncra). A kapuzás *utáni* osztás $p \geq 1$; a gyakorlatban p egész szám és az esetek többségében speciálisan $p=1$ használatos (azaz nincs osztás). A mérendő t időtartam N mérőszámát a számlánc tartalma adja, a felbontás (mértékegység) értéke $\Delta t = (1/f_0) \cdot p$, a mért érték: $N \cdot \Delta t$.

Közvetlenül adódik az 1. ábra alapján, hogy a mérőszám

$$N=i, \text{ ha } i \cdot \Delta t < H_{ST} + t < (i+1) \cdot \Delta t,$$

ahol $i=0, 1, 2, \dots$ (egész szám) és általános esetben $0 \leq H_{ST} < \Delta t/p$ intervallumú a start-hiba.

Célszerű a felbontásra normalizált (és így dimenzió nélküli) változókat használni:

$$\tau = t/\Delta t \text{ és } y = H_{ST}/\Delta t \quad (1a)$$

ezzel az alapegyenlet

$$N=i, \text{ ha } i < \tau + y < i+1 \text{ és } 0 \leq y < 1/p.$$

Az i -edik csatorna profiljának egyszerű megadásához a mérendő változót a vizsgált i -edik csatornára (mérőszámra) is „normalizáljuk”, legyen

$$z = \tau - i, \quad (1b)$$

azaz

$$N=i, \text{ ha } 0 < z + y < 1 \text{ és } 0 < y < 1/p. \quad (2)$$

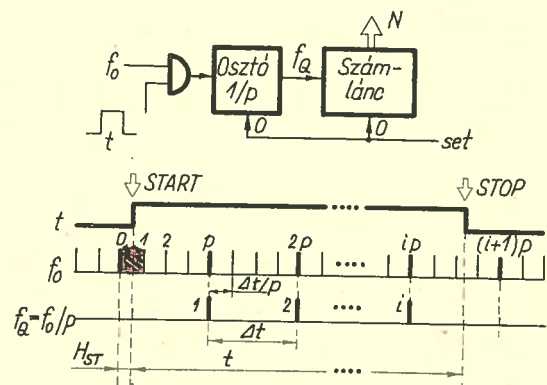
A 2. ábrán vázoltuk az $N=i$ mérőszám generálásának tartományát ($a-1/p < z < 1$ intervallumban adódhat $N=i$).

Mint kitűnik, a mérőszám generálását lényegesen befolyásolja y értéke (ill. eloszlása), a *start-hiba* ismerete (vagy az aktuális gyakorlati esettel konzisztens hipotézis) szükséges tehát a csatorna profil előállításához. Amennyiben például „egzakt szinkron” kapcsolat áll fenn a t időtartam START időpillanata és az f_0 referencia (óra) jel impulzusai között, akkor $y = \text{konst.}$ vehető; „jitteres szinkron” esetén gyakran csonkított normál eloszlás lehet a hipotézis, „aszinkron” esetben egyenletes eloszlás y tételezhető fel ($a \in (0, 1/p)$ intervallumon) stb. Legyen tehát adott y eloszlása.

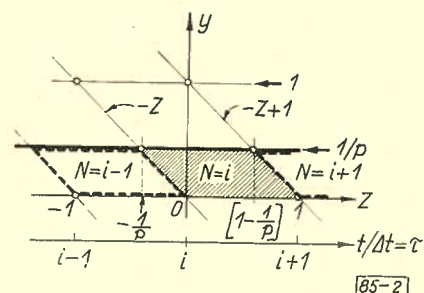
Az i -edik csatorna profil — felhasználva az ekvivalens események valószínűségének egyenlőségét — a fentiek alapján

$$P_i(z) = P\{N=i|z\} = P\{-z < y < -z+1\}, \quad (3)$$

ahol z rögzített és y a $(0, 1/p)$ intervallumon $p_y(y)$ sűrűség — [ill. $F_y(y)$ eloszlás-] függvényű. Figyelembe véve a változó tartományt (2. ábra):

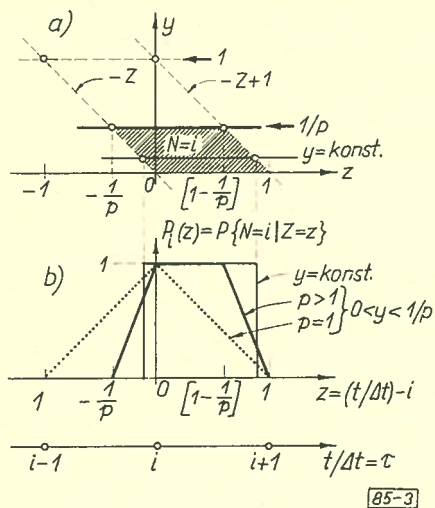


1. ábra

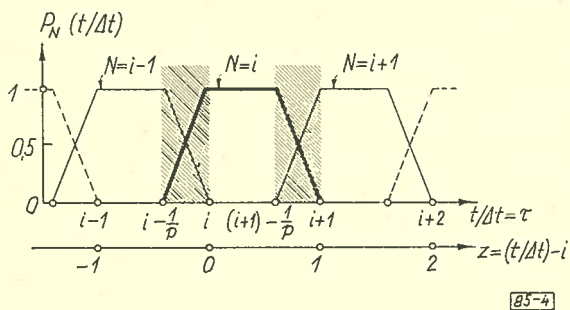


2. ábra

(ez az $z=0-i$)



3. ábra



4. ábra

— ha $-1/p < z < 0$, akkor

$$P_i(z) = \int_{-z}^{1/p} p_y(y) dy = 1 - F_y(-z), \quad (4a)$$

— ha $0 < z < 1 - (1/p)$, akkor

$$P_i(z) = \int_0^{1/p} p_y(y) dy = 1, \quad (4b)$$

— ha $1 - (1/p) < z < 1$, akkor

$$P_i(z) = \int_0^{-z+1} p_y(y) dy = F_y(-z+1). \quad (4c)$$

Minden más esetben $P_i(z) = 0$. Lényeges, hogy csak a $0 < z < 1 - (1/p)$ intervallumon adódik 1 valószínűséggel $N=i$, a start-hiba (y) értékétől is függetlenül.

Speciálisan, ha y egyenletes eloszlású ($p > 1$ és $p=1$ mellett), illetve $y = konst.$, a csatorna profilt a 3. ábra szemlélteti. A 4. ábra grafikusán reprezentálja a $P_N(z)$ csatorna profilok átfedését ($p > 1$ és egyenletes eloszlású y esetén): például a $-1/p < z < 0$ intervallumban rögzített z mellett a vázolt valószínűséggel lép fel $N=i-1$, ill. $N=i$ mérőszám. Megjegyzés: jól látható, hogy a kvantáló döntési szintje nem konstans. Mászóval, a hatás úgy is leírható, hogy a döntési szintet valószínűségi változóknak tekintjük: a (2) alapegyenlet ekvivalens alakja

(ez a hipotézis mérésel kapcsolatos)

(a start-hiba hatásaként)

* Megjegyzés: $\sum_i P_i(z) = 1$ szintegyenlet (normalizált)

$$N=i, \text{ ha } -y < z < 1-y$$

és

$$P_i(z) = P\{z > -y, z < 1-y\}.$$

Ez a módszer is a fentiekkel egyező eredményt ad.

Ha $0 < y < 1/p$ és $p > 1$, gyakran szükséges „i-re szimmetrikus” csatorna profil beállítás. Ez célszerűen digitális eltolással realizálható: az osztót nem alap-, hanem egy előírt s -állapotba ($0 \leq s < p$) kell állítani a konverzió kezdetén (az 1. ábrán speciálisan $s=0$). A számláncba tehát nem p számú (lásd 1. ábra), hanem $p-s$ számú kapuzott impulzus után kerül az első impulzus, egyébként p -vel való osztás áll fenn. Ily módon:

$$N=i,$$

ha

$$[(p-s) + (i-1)p] \cdot \frac{\Delta t}{p} < H_{ST} + t < [(p-s) + ip] \cdot \frac{\Delta t}{p},$$

illetve a normalizált alapegyenlet

$$N=i, \text{ ha } 0 < z + y + \frac{s}{p} < 1 \text{ és } 0 < y < 1/p, \quad (5)$$

ahol p és s előre rögzített konstans és $0 \leq s/p < 1$.

A fenti eltolás ugyan analóg úton (a bemenettel egynemű additív konstanssal) is elérhető, a digitális eltolás azonban lényegesen egyszerűbb és hibamentes.

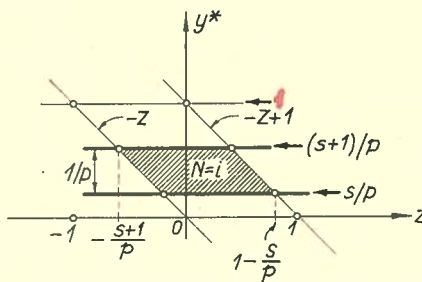
A változó tartományt az 5. ábrán

$$y^* = y + \frac{s}{p} \quad (6)$$

transzformációval ábrázoltuk; a korábbiak alapján az analízis közvetlenül elvégezhető. A szimmetrikus elhelyezkedéshez $(s+1)/p = 1 - (s/p)$ teljesítése kell, amiből

$$s = \frac{p-1}{2} \quad (7)$$

Mivel a gyakorlatban p és így s is egész szám, ez csak páratlan p mellett realizálható (egyébként az optimumhoz közeli egész szám választandó, pl. $p=10$ mellett $s=4$ vagy $s=5$). Ha $p \gg 1$, a fenti módszer jó becsléssel optimális (közel négyzet és i-re szimmetrikus) csatorna profilt eredményez. Megjegyzés: kapuzás utáni osztás ($p > 1$) célszerű, ha telítésmentes (túlesordulás nélküli) méréshez a max f_0 értékét csökkenteni kell, ill. általában közvetlenül alkalmazható ekvivalens amplitúdó kvantálásnál.

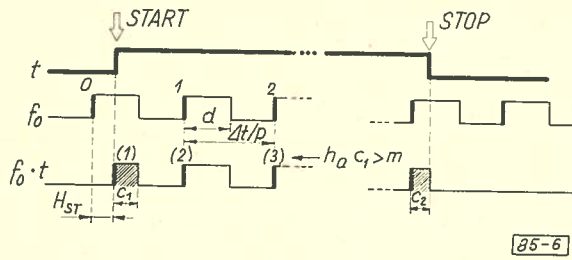


85-5

5. ábra

A kapuzási hiba hatása

Az f_0 referencia (óra) jel a gyakorlatban d szélességű impulzusok sorozata (6. ábra). Legyen m az a minimális pulzusszélesség, mely még osztható (számlálható), így szükséges, hogy $d > m$ legyen.



6. ábra

A kapuzás után csonkított impulzusok léphetnek fel a START, ill. STOP környezetében (c_1 , ill. c_2), a 6. ábrából kitűnik:

— ha $c_1 = d - H_{ST} > m$, akkor a kapu után +1 impulzus adódik az ideális esethez képest,

— ha $c_2 < m$, akkor ez az impulzus nem szám-lódik.

Kétféle alapegyenlet van tehát a leírásnál, mivel — a start-hiba értékétől függően — csak a $0 < H_{ST} < d - m$ esetben lép fel +1 impulzus. Ilymódon $s = 0$ alapállapotot tekintve:

a) $0 < y < (d - m) / \Delta t$ esetén

ha $N = i$,

$$(ip - 1) \frac{\Delta t}{p} + m < H_{ST} + t < [(i + 1) \cdot p - 1] \frac{\Delta t}{p} + m$$

és ebből a normalizált alapegyenlet

$$N = i, \text{ ha } \frac{m}{\Delta t} - \frac{1}{p} < z + y < 1 + \frac{m}{\Delta t} - \frac{1}{p} \quad (8a)$$

b) $(d - m) / \Delta t < y < 1/p$ esetén

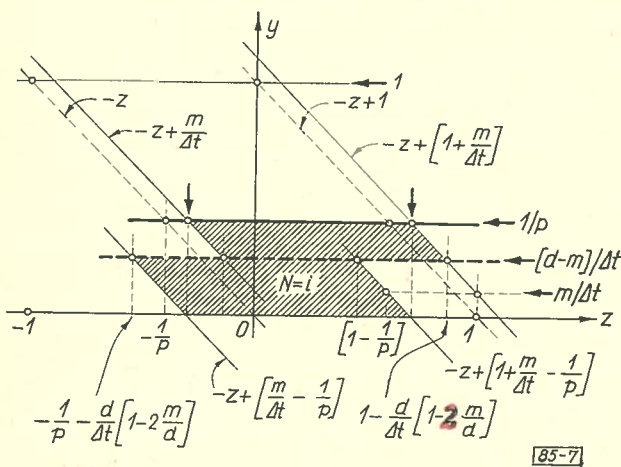
$N = i$, ha $i \cdot \Delta t + m < H_{ST} + t < (i + 1) \Delta t + m$,

illetve

$$N = i, \text{ ha } \frac{m}{\Delta t} < z + y < 1 + \frac{m}{\Delta t} \quad (8b)$$

Az $N = i$ mérőszám generálásának tartományát a 7. ábra szemlélteti (vö. 2. ábrával). Ennek alapján pedig (és y eloszlásának ismeretében) a csatorna profil közvetlenül megadható.

Speciálisan, ha y egyenletes eloszlású, akkor a 3. ábra szerinti (pl. $p > 1$ mellett trapéz), de eltolts csatorna profil az eredmény.



7. ábra

A kapuzási hiba miatt fellépő — nem kívánt — eltolódás mértéke (mint ez a 7. ábrából is következik):

$$\frac{d}{\Delta t} \left(1 - \frac{2m}{d} \right) = \frac{1}{p} \cdot K \left(1 - \frac{2m}{d} \right) \quad (9)$$

ahol $K = d \cdot f_0$ az órajel kitöltési tényező. Az előjel az órajel (d) és a minimálisan számlálható (m) impulzusszélesség arányától függ: $d > 2m$ esetén balra, míg $d < 2m$ esetén jobbra eltolts csatorna profil adódik. (A 7. ábrán $d > 2m$.) Nincs eltolódás speciálisan $d = 2m$ esetben, azaz az ideális esettel egyező $-1/p < z < 1$ tartományú a csatorna profil! A gyakorlatban m értéke nem konstans (és nem is tartható kézben), továbbá K és d értéke is csak jó becsléssel állandó, ezért az ideális esetet megközelítő kapuzást („él-számlálást”) kell kialakítani, lásd pl. [2]. Lényeges tehát, hogy a szokásos (az 1. ábrán vázolt) kapuzás esetén a gyakorlatban a csatorna profil helyzete nem állandó („jitteres”); előnyös, ha $K \ll 1$ és $p \gg 1$.

Amennyiben $p > 1$ esetben az osztó alapállapota $s \approx 0$ a konverzió kezdetén, konstans s/p mértékű eltolás érhető el a korábbiakhoz hasonlóan.

Kvantálási hiba

A kvantáló jellemzésére általánosan a kvantálási hiba eloszlása használatos. Definíció szerint a kvantálási hiba $H_Q = N \cdot \Delta t - t$. Ennek a felbontásra normalizált értéke

$$n_Q = H_Q / \Delta t = -(\tau - N), \quad (10)$$

és

$$\text{ha } N = i, \text{ akkor } n_Q = -z \quad (11)$$

Ebből következik, hogy feltételes sűrűségfüggvénye

$$g_Q(n_Q | N = i) = g_z(-n_Q | N = i),$$

ahol $g_z(z | N = i)$ jelenti z -nek az $N = i$ feltétel melletti sűrűségfüggvényét. Mivel

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P\{N = i | z \leq Z < z + \epsilon\} = P\{N = i | Z = z\} = P_i(z)$$

létezik (ez a csatorna profil), ezért

$$g_z(z | N = i) = \frac{P_i(z) \cdot p_z(z)}{P\{N = i\}}$$

ahol $p_z(z)$ a mérendő z változó sűrűségfüggvénye és

$$P\{N = i\} = \int_{-\infty}^{\infty} P_i(z) \cdot p_z(z) dz$$

az $N = i$ mérőszám generálásának valószínűsége.

A fentiekből adódik, hogy a kvantálási hiba (n_Q) sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} p_Q(n_Q) &= \sum_{i=0}^{\infty} g_Q(n_Q | N = i) \cdot P\{N = i\} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P_i(-n_Q) \cdot p_z(-n_Q), \end{aligned}$$

vagy a $z = \tau - i$ transzformáció felhasználásával

$$p_Q(n_Q) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(-n_Q) \cdot p_z(-n_Q + i) \quad (12)$$

és $p_\tau(\tau)$ a mérendő (Δt -re normalizált) időtartam sűrűségfüggvénye. A bemenet eloszlása és csatorna profil határozza meg tehát a kvantálási hiba eloszlását. Lényeges: a csatorna profil független a bemenet eloszlásától.

Ha speciálisan minden i -re azonos és állandó a $P_i(z) = P^*(z)$ csatorna profil, továbbá τ egyenletes eloszlású, akkor $p_Q(n_Q) = P^*(-n_Q)$. A bemenet eloszlására vonatkozó feltétel gyengíthető, nevezetesen elegendő a „ q -limitált” feltétel [1] is. Legyen a τ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\varphi_\tau(q)$, azaz

$$p_\tau(-n_Q + i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\tau(q) \cdot e^{-jq(-n_Q + i)} dq,$$

helyettesítve (12)-be, az összegzés és integrálás felcserélésével, valamint minden i -re kiterjesztve

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-jq^i} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(q - 2\pi k),$$

és $\varphi_\tau(0) = 1$ felhasználásával:

$$p_Q(n_Q) = P^*(-n_Q) \cdot \left[1 + \sum_{k \neq 0} \varphi_\tau(2\pi k) \cdot e^{j2\pi k n_Q} \right]. \quad (13)$$

Amennyiben teljesül a „ q -limitált” feltétel, vagy kevésbé élesen:

$$\varphi_\tau(q) = 0, \quad \text{ha } |q| \geq 2\pi,$$

vagy speciálisan (mint egyenletes eloszlásnál):

$$\varphi_\tau(q) = 0, \quad \text{ha } q = 2\pi k \quad (\text{és } k \neq 0),$$

akkor $p_Q(n_Q) = P^*(-n_Q)$ fennáll. A hiba várható értéke, varianciája, stb. ebből közvetlenül számítható. A „ q -limitált” feltétel csak jó közelítéssel teljesíthető; ha szükséges hibabecslés, az a bemenet eloszlásának ismeretében (13) alapján adható meg. (Hasonló következtetésre juthatunk más módszerrel is, lásd [1].)

Mivel normalizált változóval számoltunk, a (13) egyenlet bármely — a fenti feltételeket kielégítő — egyenletes kvantálóra érvényes, függetlenül a bemenő jel dimenziójától.

Jól szemlélteti ez az analízis is a csatorna profil jelentőségét, és indokolja, hogy a kvantáló jellemzésére a csatorna profil használjuk. [A (12) egyenlet alapján: a kvantálási hiba terjedelmét a csatorna profil(ok) terjedelme határozza meg, míg elosz-

lását a csatorna profil(ok) alakja és a bemenő változó eloszlása.] A csatorna profil a kvantáló közvetlenül mérhető jellemzője, segítségével a realizálásból adódó további hibaforrások hatása is elemezhető. Így, különösen statisztikai méréseknél, lehetőséget ad az aktuális mérőeszköz hatásának pontosabb leírására.

Beérkezett: 1974. augusztus 2.

I R O D A L O M

- [1] Dr. Pápay Zs.: Digitális mérés technika (J5-1109) Tankönyvkiadó, 1974.
 [2] K. J. Jochim and R. Schmidhauser: Timer, counter, DVM: a synergistic prodigy, HP Journal Vol. 21, No. 8, 2—9.
 [3] A. Papoulis: Probability, random variables and stochastic process, McGraw-Hill, 1965.

Д-р. Папай Ж.: Профиль канала временной дискретизации

Профиль канала обеспечивает статистическое описание квантования независимое от распределения входа. В статье рассматриваются профиль канала временной дискретизации, возможность цифрового сдвига, влияние ошибки замыкания ключа и связь погрешности дискретизации с профилем канала.

Dr. Pápay, Zs.: Das Kanalprofil der Zeitdauerquantisierung

Das Kanalprofil ermöglicht die statistische Beschreibung eines Quantizers unabhängig von der Verteilung des Eingangs. Der Artikel prüft das Kanalprofil der Zeitdauerquantisierung, die Möglichkeit der digitalen Verschiebung, die Wirkung des Torfehlers und die Beziehung zwischen dem Quantisierungsfehler und dem Kanalprofil.

Dr. Pápay, Zs.: The channel-profile of time quantizing

The channel-profile enables the statistical description of a quantizer irrespective of the distribution of the input. The article examines the channel-profile of time-quantizing, the possibility of digital displacement, the effect of gating error and the quantizing error-channel profile connection.

Személyi hírek

A kohó- és gépipari miniszter hozzájárult ahhoz, hogy Szücs Istvánt, a Magyar Műszeripari Egyesülés elnökét, Elnökségünk tagját az Igazgató Tanács — nyugdíjbanvonulása miatt, érdemei és eddig végzett munkája el-

ismerése mellett, 1974. december 20-i hatállyal — állásából felmentse, egyidejűleg a Magyar Műszeripari Egyesülés elnökévé Posch Gyulát, a Magyar Optikai Művek vezérigazgatóját — vezérigazgatói beosztásának változatlanul hagyása mellett — megválassza.

H. M.