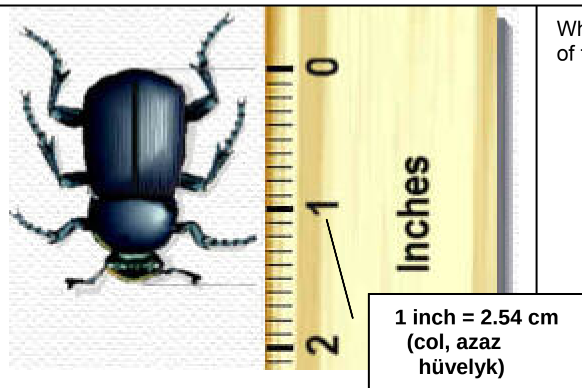
5. Szóródás a céltáblán / Kockadobások

Az eredmény minősítése: mérési bizonytalanság, hiba-eloszlások, hibaterjedés

Egy mérés nem mérés, egy számítás önámítás.

1. A mérés **összehasonlítás**, és az összehasonlításban mindig van némi bizonytalanság (uncertainty): már maga a mérő(léc) felbontása (resolution) alapkorlát!

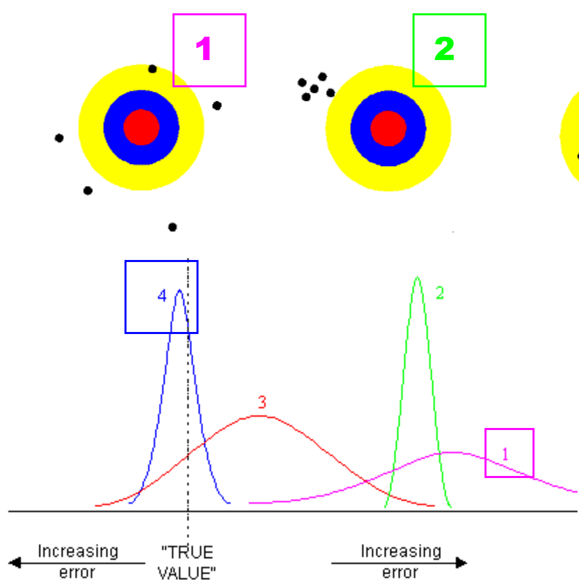


Which of the following best describes the length of the beetle's body in the picture to the left?

- Between 0 and 2 in
- Between 1 and 2 in
- Between 1.5 and 1.6 in
- Between 1.54 and 1.56 in
- Between 1.546 and 1.547 in

„Ránézésre” ez a helyes válasz, a mérőeszköz 0.1 in felbontása miatt.
(De szemmel is lehet becsülni...)

2. A mérési pontosság (accuracy) és hasonló feltételekkel ismételt méréseknél a megismételhetőség (repeatability; régebben: precizitás [precision]) jól szemléltethető egy lőlappal: vajon a céltábla középkörében lesznek-e a találatok (öt lövésnél)?
A méréstechnika nyelvén megfogalmazva: a mért érték (measured value; az aktuális találat) mennyire közelíti a valódi értéket (true value; a célpontot)?

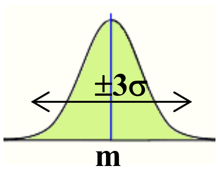


1. The "beginner" (inaccurate/imprecise)
2. Repeatable but poor accuracy
3. Accurate but not good precision
4. The "expert" (accurate and precise)

Igen sok kísérletre a szóródási görbék (a véletlen hatások miatt ún. harang-görbék) becslik az egyes esetek találati **gyakoriság-eloszlását** és tájékoztatnak a hiba (error) természetéről.

Egy „kezdő” [1] pontatlan, nagy a szórása: minél nagyobb a bizonytalanság, annál kisebb az ismétlőképesség; míg a „profi” [4] pontos és precíz (a valódi értékhez közeli és jó ismétlőképességű). A [2] eset korrekcióval a [4] esetté „varázsolható”!

Talán meglepő, hogy a találatok *véletlen* elhelyezkedése ellenére, *sok* kísérlet számbavétele esetén, a hiba (error) matematikailag is jellemezhető harang alakú szóródási (gyakoriság-eloszlási) görbékkel. A csúcsnál van a legvalószínűbb (várható) érték: itt csoportosulnak a találatok, a széles terjedelem pedig nagy bizonytalanságra (nagy szórásra) utal.



Ezek a görbék a várható érték (m = mean) és a pontosság mértékét jellemző szórás (σ) paraméterekkel írhatók le, és (míg maga az „$m \pm \sigma$" szórás-terjedelem az eseteknek csak 68%-át tartalmazza, addig) az eseteknek már 95 %-a esik az „$m \pm 2\sigma$" tartományba, míg 99,7 %-a az „$m \pm 3\sigma$" tartományba (ún. 2σ- ill. 3σ-szabály). A mérési **bizonytalanság** „$\pm$ 2σ (vagy $\pm$ 3σ)" értéke tehát jól jellemzi a pontosságot (→ a mérési eredményeknek csak igen kis hányada eshet ezen a határon kívül).

Az ilyen fajta, a gyakorlatban általános – sok kis hatás összegződéseként fellépő – hibaeloszlás kialakulását könnyen megérthetjük „kockázással".

3. (a) Szabályos kockával dobva, mivel a kockának nincs kitüntetett oldala, egyformán 1/6 a gyakorisága annak, hogy a dobás eredménye 1-es, 2-es, ... vagy 6-os. Ebből persze *nem* jósolható meg, hogy egy dobásnál éppen mi jön ki (az eredmény véletlen[1]), de sok kísérletnél várható (jó közelítés) az *egyenletes* eloszlás.

Folytonos változóra áttérve, pl. a valós számok egészre kerekítésénél ugyanez a helyzet: a ± ½ értéktartományú kerekítési hiba gyakoriság eloszlása egyenletes. A kerekített érték („mért érték") ismeretében nem tudjuk megmondani, hogy mennyi volt a hiba értéke, de nincs ok arra, hogy bármelyik hibaérték (a ± ½ tartományban) kitüntetett legyen, tehát feltételezhető az egyenletes eloszlás.

(b) Ha most *két* teljesen egyforma (tehát nem "cinkelt") és külsőre megkülönböztethetetlen kockát feldobunk, akkor milyen lesz a dobott számok *összeg*ének eloszlása? A lehetséges esetek számbavételével és feltételezve, hogy bármelyik ezek közül azonos gyakorisággal fordul elő (márpedig mi indokolná ennek ellenkezőjét), ez a feladat könnyen megoldható. A tizenegy lehetőség már *nem egyforma* gyakran fordul elő: a 7-es várható leggyakrabban, míg 2 és 12 legkevésbé.

Összeg	Lehetséges esetek	Gyakoriság (kerekített %)
2	1+1	**1/36** = 3%
3	1+2, 2+1	2/36 = 6%
4	1+3, 2+2, 3+1	3/36 = 8%
5	1+4, 2+3, 3+2, 4+1	4/36 = 11%
6	1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1	5/36 = 14%
7	1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1	6/36 = **17**%
8	2+6, 3+5, 4+4, 5+3, 6+2	5/36 = 14%
9	3+6, 4+5, 5+4, 6+3	4/36 = 11%
10	4+6, 5+5, 6+4	3/36 = 8%
11	5+6, 6+5	2/36 = 6%
12	6+6	**1/36** = 3%

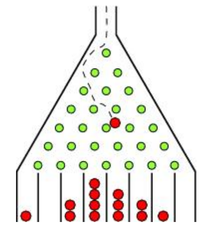
Másképp szemlélve (és a diszkrét esetről áttérve folytonos változókra) azt is kérdezhettük volna, hogy mi két *független*, egyenletes eloszlású, véletlen változó összegének eloszlása? Válasz: az ún. háromszög[2] (Simpson[3]) eloszlás.

Ilyen típusú hiba eloszlásra (a ±1 értéktartományban) a méréstechnika gyakorlatában is van példa (idő[tartam]mérés: periodikus óra-jelek kapuzott /START→STOP/ számlálása). Többnyire azonban sok (kis, véletlen) hatás együttese eredményezi a hibát.

---

[1] Jól tükrözi ezt mindennapi nyelvünkben a „kockázat" szó.
[2] Ha *nem azonos* a két változó tartománya, akkor trapéz alakú eloszlás adódik.
[3] Simpson (1710-1761) az első hibatörvények (eloszlások) megalkotója.

(c) Folytatva a sort, és egy kicsit „ugorva": ha *sok* kicsi, *egyenletes* eloszlású hatás *összege* okozza a mérési bizonytalanságot, vagyis véletlen hibával állunk szemben, akkor ez az eset harang-görbe típusú (ún. normális vagy Gauss[4]) eloszlással modellezhető. Ennek „kialakulását" a Galton-deszka[5] (golyóterelő) kísérletben magunk is megtapasztalhatjuk (quincunx board: http://www.jcu.edu/math/isep/quincunx/quincunx.html): a leeső golyókat az egymás utáni akadályok[6] egyenlő valószínűséggel terelik két irányba, és így végül a legnagyobb gyakorisággal a középső tartályba érkeznek, míg a szélső tartályokba történő bekerülés esélye csökken. A golyók tehát *nem egyforma* valószínűséggel kerülnek a tartályokba: a normális eloszlásra jellemző harang-alakzatot veszik fel. Ez a típus széles körben használható a véletlen hiba becslésére.



4. Néhány további problémát (ellentmondást) „huszárvágással" oldunk meg.

(a) A méréstechnika első csele: valódi érték → **helyes** érték

(Hagyományos felfogás szerint) a mérési eredmény (*m*) és a mérendő mennyiség valódi értéke (*x*) közötti különbség a mérés hibája (*H*). Más szóval, az ún. additív modell (mérendő **+ hiba** = mért érték) írja le a mérést

$$x + H = m, \qquad \text{vagy} \qquad x \cdot \left(1 + \frac{H}{x}\right) = x \cdot (1 + h) = m$$

ahol *h* a relatív hiba.
Sajnos a valódi érték elvileg sem ismerhető meg,[7] az így definiált *H* hibát nem tudjuk meghatározni. Ezért a valódi érték helyett az ún. **helyes**[8] értéket használjuk, amely olyan mért (vagy megegyezés alapján elfogadott) érték, amely megfelelően kis hibájú (a fenti definíció szerint, az adott mérési feladatnál)!
A *h* (relatív, „%-os" hiba) gyakran egyszerűbben kezelhető és jellemzőbb[9] a mérési adatra, mint *H* (az abszolút hiba). De a helyzet ugyanaz: *x* ismeretlen. Ezért a relatív hibánál viszonyítási alapként a megismert *m* mért értéket használjuk!

Praktikusan elhanyagolható az eltérés a két értelmezés között, mert $h << 1$:

$$h = \frac{H}{x} = \frac{H}{m - H} = \frac{H/m}{1 - (H/m)} \approx \frac{H}{m} \cdot \left(1 + \frac{H}{m}\right) \approx \frac{H}{m}$$

ahol kihasználtuk, hogy $(H/m) << 1$, így $1/(1-y) \approx 1 + y$, és $(H/m)^2 \to 0$ (vagyis a „hiba hibája" már nem számít, mert „másodrendű kicsiny" mennyiség).

---

[4] Gauss (1777-1855), a "matematika fejedelme", a hibaelmélet „nyelvén" alapozta meg a valószínűségszámítást.
[5] Galton (1822-1911, Darwin unokaöccse) a mérés megszállottja: „Ahol csak tudsz, számolj!"
[6] Egyenlő távolságokban lévő "szögek", amelyek a megelőző sor szögei közötti távolságok középpontja alá esnek.
[7] „Ismeretelméleti probléma" (→ Heisenberg-féle határozatlansági reláció).
[8] A **helyes** érték tehát nem más, mint az elérhető legpontosabb méréssel meghatározott érték. Szinonimák: megegyezés szerinti (konvencionális) érték, vonatkoztatási (referencia) érték, „legjobb becslő".
Egy konkrét mennyiség helyes értékét az etalonok adják (közvetlenül vagy közvetett módon – az akkreditált hitelesítő laboratóriumokban, ill. a mérésügyi hivatalokban). Mérőeszközeinket ezekhez igazítjuk (kalibráljuk). Az „igazítás" minősége határozza meg egy eszköz pontosságát, konkrét mértéke pedig azt adja meg, hogy a mérőeszköz alkalmazásakor várhatóan mekkora mérési hibát követünk el. Ezt közli velünk a mérőeszköz specifikációs adatlapja.
[9] Az a mérés pontosabb, amelynek a relatív hibája kisebb. Pl. 3 mm-es *abszolút* hibával megmérni 3 m-t nyilván nagyobb pontosságot jelent, mint 30 cm-t (az első esetben $3/(3 \cdot 10^3) = 0.1\%$, míg a második esetben 1% a *relatív* hiba).

(b) A méréstechnika második csele: mérési hiba → mérési **bizonytalanság**

Többször elvégezve (ha leheteséges) ugyanazt a mérést azt tapasztaljuk, hogy rendre eltérő eredmény kapunk, a befolyásoló tényezők sokfélesége és a korlátozott „kézben-tarthatóság" miatt. Nem reális célkitűzés tehát, hogy a *H* mérési hibát egyetlen konkrét számértékkel adjuk meg. Ezért olyan paraméterrel fogjuk minősíteni a mérést, amely a hiba alakulásával kapcsolatos bizonytalanság-érzetünket, az értékek szóródását fejezi ki (mint pl. harang alakú [Gauss] szóródási görbe esetén a **„± 2σ, vagy ± 3σ" szóródási korlát**), és ezt a paramétert a mérés **bizonytalanság**ának[10] nevezzük.

5. A mérési eredményt gyakran több, közvetlenül mért értékből számítással határozzuk meg. Ha ismerjük a hibaöröklődés szabályait,[11] akkor ennek felhasználásával a számított érték hibája is megadható.
Az alapműveletek esetén a **relatív hibakorlát**ra egyszerű becslések adhatók.
Legyen a két mért mennyiség a és b, és azok relatív hibáinak korlátja: h_a ill. h_b.
(a) *összeg*: a nagyobb korlát az összegnek is hibakorlátja (ez felső becslés, de egyszerűsége miatt célszerű), azaz $h_{a+b} \leq \max(h_a ; h_b)$
(b) *szorzat ill. hányados*: a tagok összege (jó közelítés, eltekintünk a másodrendűen kicsiny hatástól), vagyis $h_{ab} \approx h_a + h_b$ ill. $h_{a/b} \approx h_a + h_b$
(c) *különbség* ($a > b$): a tagok súlyozott összege

$$h_{a-b} \leq \frac{a}{a-b} \cdot h_a + \frac{b}{a-b} \cdot h_b$$

amiből kitűnik, ha kicsi a különbség (közel azonosak a mennyiségek), akkor igen nagy[12] lehet a relatív hiba max. értéke.

Tegyük fel, hogy 1 % pontossággal (relatív hibakorláttal) tudunk távolságot mérni. Egy 10 cm-es szakaszt pl. úgy mérünk, hogy egy adott irányba mérünk 5 m-t, majd visszamérünk 4,9 m-t. Az első méréskor 1 %-os hibakorláttal ±5 cm-t, visszaméréskor ±4,9 cm-t tévedhetünk. A hibák ugyan véletlenszerűek, de előállhat olyan eset, mikor egymást "erősítik", azaz összesen akár 9,9 cm is lehet a hiba, ami a 10 cm-es távolságot figyelembe véve 99 %! (Ellenőrizzük!)
A példa extrémnek tűnik, de ha csak így „férünk hozzá" a mérendőhöz, akkor pontos mérési adatokat kell használni a számításhoz.

---

[10] Nemzetközileg elfogadott, szabványos technikája van a **mérési bizonytalanság** meghatározásának (**GUM**: Guide to the expression of Uncertainty in Measurement), amelynek az a filozófiája, hogy először azonosítja és modellezi az összes fontos összetevőt, elvégzi a lehetséges korrekciót, majd statisztikai vagy más tapasztalati módszerrel becsli az eredő mérési bizonytalanságot. Ez a **mért érték körüli tartomány**, amelyen belül van („majdnem biztosan", nagy valószínűséggel) a mérendő.
„Csakis annak a mérésnek van bizonytalansága, amelyikét meghatározták."

[11] Matematikai módszerek (numerikus és függvény-analízis, valószínűségszámítás és statisztika) segítenek a **hibaterjedési törvények** feltárásában. Itt csak egyszerű, korlát (max. érték) becslések szerepelnek a relatív hibákra, ez a legkedvezőtlenebb eset (worst case).
Megjegyzés: ha a hibák függetlennek tekinthetők, akkor – a számítási képlettől függően – súlyozott szórás-négyzet összegzést végzünk (ún. négyzetes hibatörvény).

[12] Ezt elkerülendő használjuk (ha lehetséges) az ún. differenciális mérést, amikor ismert referenciával (etalonnal) „durván" kiegyenlítjük – kompenzáljuk – a mérendőt, és a fennmaradó kis különbséget mérjük közvetlenül (és itt – a kis érték miatt – már nagyobb relatív hiba is megengedhető).
Pl. 10,1 V mérésénél 10 V-ot tudunk kiegyenlíteni (kompenzálni), így csak 0,1 V = 100 mV (a differencia értéke) a mérendő. Ha mindkét esetben 10^{-3} V = 1 mV hibát elfogadunk, akkor kompenzálásnál $10^{-3}/10 = 10^{-4}$ = 0,01 %-os pontosság szükséges (!), míg mérésnél $10^{-3}/0,1 = 10^{-2}$ = 1 %-os pontosság is elegendő.

6. A *hiba* és a mérési *bizonytalanság* eltérő fogalmak a mai korszerű szemlélet és szóhasználat szerint.
Ha ugyanis a 4.(a) pontban módosított definíció *x* mérendő tagjának helyes értékét nem ismerjük (ez a referencia érték a legpontosabb méréssel, kalibrálással, számítással vagy más módon lehet ismert), akkor a hiba nem létezik (ha fellép is hiba, azt egyszerűen nem ismerjük); ilyen esetben csak „bizonytalanság” van, és ez fejezi ki „ismeretünk hiányát”!

A **hiba** tehát mindig determinisztikus (az új értelmezésben nincs véletlen komponense),[13] mint korrekciós tényező szerepel a mérésben és az **eszközt tervező** feladata (!) a hibaforrások és hatásuk feltárása, valamint a korrekciós módszerek megadása és érvényesítése.

Az **eszközt használó**nak ezzel, ti. a kalibrálással „nem igazán kell törődnie” (bár a mai intelligens műszereknél gyakran opció a kalibrálás lehetősége!), számára a **bizonytalanság** mérvadó, vagyis az a mért érték körüli intervallum, amelyet a bizonytalanság-becslés állapít meg, előírt módszerekkel, az adott mérésnél lényeges összetevők (a „büdzsé”) alapján.

Persze azonnal észrevehető, hogy pl. a megelőző 5. pontban a „bizonytalanság” szó kell(ene) a „hiba ” helyett. Hát, igen… nehéz felhagyni a megszokottal. De az **eszközt használó** számára (és a hétköznapi beszédben) megengedhető ez a lazaság[14] a szóhasználatban. Elsősorban ugyanis az **eszközt tervező (és hitelesítő)** munkájához szükséges a \`hiba\` és a \`bizonytalanság\` határozott elkülönítése, mert minimalizálásuk egészen eltérő módszereket igényel, és a (szigorú értelemben vett) hibacsökkentés döntően strukturális (tehát elsősorban a tervező kezében lévő) módszerekkel[15] lehetséges.

Például a széles körben alkalmazott ún. differenciális struktúrával csak a \`hiba\` konstans („additív”) része korrigálható, míg a mérendővel arányos („multiplikatív”) része nem.

---

[13] Nehéz elfogadni a valódi érték “feláldozását” (és helyette a \`helyes\` érték és a \`bizonytalanság\` használatát) azoknak, akik a régi terminológiával tanulták meg értékelni méréseiket.

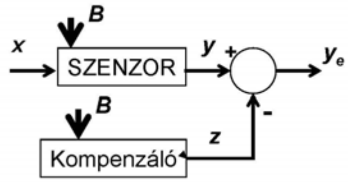
Elvi szempontból világos a (valódi értékre alapozott) hiba hagyományos felosztása szisztematikus (determinisztikus) és véletlen (korrekciós tényezőkkel nem kiküszöbölhető) összetevőkre. De ez az osztályozás nem praktikus: nem ismert (nem megismerhető!) a mérendő valódi értéke (így aztán a hiba-definíció pusztán teoretikus), másrészt a szisztematikus hibának is csak egy része kompenzálható (ti. az, ami ismert).

[14] Hasonlítható ez a „kg” tömeg-egység esetéhez, amit a köznapi nyelv súly-egységként is használ: „túlsúlyos: 95 kg”. (Volt ugyanis időszak, amikor a kg súlymérték volt, ez a hatás lassan múlik el.)

[15] A \`hiba\` és a \`bizonytalanság\` csökkentésében közös módszer: olyan mérési elv kiválasztása, amely a befolyásoló mennyiségekre kevésbé érzékeny, vagy a mérendő védelme (árnyékolás, szigetelés…).
A \`bizonytalanság\` csökkentéséhez speciálisan az átlagolás és a szűrés hatásos művelet.

Ha a szenzor érzékenysége (átviteli tényezője) „S” és a hibát okozó, nem kívánatos befolyásoló mennyiség $\Delta\boldsymbol{B}$ változása „c” additív (konstans) és „a” multiplikatív (arányos) faktorral hat:

$$y = \mathrm{S}\cdot x + (\mathrm{c} + \mathrm{a}\cdot x)\cdot\Delta\boldsymbol{B},$$



akkor differenciális hiba-kompenzálással:

$$z = \mathrm{k}\cdot\Delta\boldsymbol{B} \quad \text{és} \quad \mathrm{k} = \mathrm{c}$$

beállítással eliminálható az additív hiba-rész (az y_e kimenetben már nem jelenik meg).

7. A eredményhez társított mérési **bizonytalanság**
   - ismerete teszi lehetővé az egymással egyenértékű eredmények egybevetését,
   - meghatározásának és kifejezési formájának[16] előírása (szabványban rögzített normatíva, műveleti definíció, és tegyük hozzá: a kreativitás és a józan ész) biztosítja a mérések egységességét,
   - szigorúsági foka pedig alkalmazásfüggő (és természetesen különösen erős a vizsgáló, kalibráló és etalon-őrző laboratóriumokban).

A bizonytalanság-becslés a mérési eredményt befolyásoló tényezők számbavételét, nagyságuk elemzését, a domináns összetevők kiválasztását és kombinálásukat[17] jelenti. A „büdzsé”-ben a gyártóknak a mérőeszközre megadott specifikációja csak az egyik (de persze alapvető) összetevő!

A bizonytalanság értékelése segíti az alkalmazott módszer elvének jobb megértését is, rámutat a módszer kritikus pontjaira, és a mérési módszer érvényesítő ellenőrzésének (validálásának) kulcsfontosságú része.

Elvi jelentőségű elvárás a méréssel szemben az *objektivitás*. A mérési bizonytalanság kiértékelése persze óhatatlanul magában foglalja egyes tényezők *szubjektív* megítélését (s ez nem ritkán elbizonytalaníthatja magát az eszközhasználót is), a szabad választást azonban célszerűen korlátozza például egy szabványban rögített normatíva.

---

[16] Kerülni kell pl. a túlzott látszólagos pontosságot.
Konvenció szerint: annyi tizedes jegy legyen az eredményben, hogy csak az *utolsó* jegyben lehessen eltérés (és az utolsó előtti jegyben még nem), pl. $m = 1.24 \pm 0.03$. Vagyis ne tévesszünk meg az elért pontosságot illetően.

[17] A mérési bizonytalanság minden összetevőjét **szórás** értékkel kell megadni. Ezek meghatározásának két alapmódszere:

– „A típusú” kiértékelés: statisztikai módszerek (észlelési sorozatok elemzése),

– „B típusú” kiértékelés: más információk, pl. gyártó specifikáció, kalibrációs adat.

Az összetevőkből az eredő szórás (standard bizonytalanság) a terjedési szabályokat felhasználva adódik.

Gyakran – az alkalmazások igényei szerint – ennek kiterjesztett változatát: k = 2, 3, … tényezővel megszorzott értékét használjuk (a nagyobb megbízhatóság érdekében, hogy az így kapott, a mért érték körüli tartomány „majdnem biztosan” tartalmazza a mérendőt).