6. A szinusz[1] örökké szinusz

Jel szintézis (Fourier-sor összeg), spektrum (FFT[2])

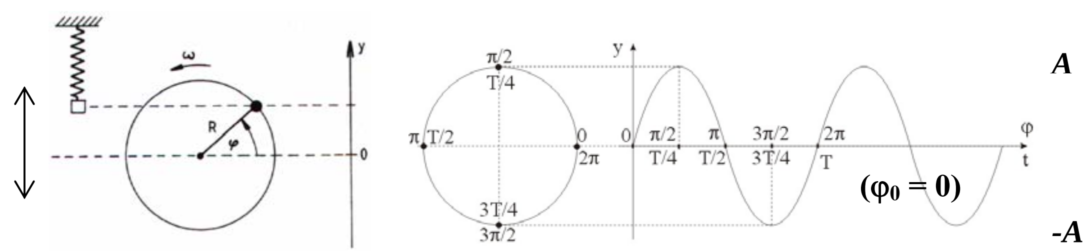
(A régi görögök szerint is) a legtökéletesebb mozgás az egyenletes körmozgás.

1. Az y(t) = y(t+T) periodikus jelek között kitüntett szerepe van a **szinuszos** hullámformának, amelynek leírásához három paraméter elegendő:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0), \quad \text{ahol} \quad \omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$$

ω körfrekvencia, ***f* frekvencia** (egysége: *hertz* [Hz] = 1/s), $T = 1/f$ periódusidő (egysége: *szekundum* [s]); ***A* amplitúdó** (max. kitérés a nyugalmi helyzethez képest); a $\varphi = \omega \cdot t$ szög a fázis (egysége: *radián* [rad]), $\boldsymbol{\varphi_0}$ az időmérés kezdetétől függő **kezdőfázis**.

A természetben számos jelenségnél tapasztalunk harmonikus **rezgőmozgás**t, amelynél a kitérés-idő kapcsolat szinuszos[3].



Minden harmonikus rezgőmozgáshoz található olyan egyenletes **körmozgás**, amelynek érintőre vett *vetülete („árnyéka a falon”)* ugyanazt a mozgást végzi, mint a rezgőmozgás. (A körmozgás szögsebessége egyenlő a rezgőmozgás körfrekvenciájával, és itt a frekvencia megnevezése: fordulatszám; a körpálya sugara R = *A*).

Ha a fázisváltozás 2π (egy teljes körülfordulás, vagyis ha eltelt *T* periódusidő), akkor a mozgásállapot ugyanaz (azonos fázisban van, mert a **sin** függvény 2π szerint periodikus).

Az eredetivel ellentétes fázisba kerül, ha a fázisa π-vel (azaz 180°-kal) változott.

Fáziseltolással pl. $\sin(\omega t + \pi/2) = \cos(\omega t)$. Megjegyzendő, hogy a fáziseltolás időeltolást jelent: $\sin(\omega t+\varphi_0) = \sin(\omega[t+(\varphi_0/2\pi)\cdot T])$.

Harmonikus rezgésre további fontos példák még: egy áramkörben mért *U* **váltakozó feszültség** (vagy *I* áramerősség) időbeli változása; a tiszta **zenei hang** (magassága *f*-től függ, erőssége *A*-tól); a különféle **elektromágneses hullámok**...

A szinuszos jel speciális tulajdonsága, hogy „megtartja azonosságát”:

- azonos frekvenciájú (eltérő kezdő fázisú) jelek összege is szinuszos
- lineáris rendszer válasza azonos frekvenciájú szinusz (így a szuperpozíció-elv alapján a rendszer frekvenciánként külön vizsgálható → amplitúdó- ill. fázis-karakterisztika)

---

[1] **Szinusz csomó** (a jobb pitvar falában található „szívdobbanás-generátor”): speciális szívizomsejtek, amelyek időről időre akciós potenciált (izomrángást, pacemaker-aktivitást) hoznak létre, biztosítva a szívizom ritmusos összehúzódását. Az elektromos jelek a szívből kiindulva a test különböző részei felé terjednek, testfelszíni elektródákkal meg is mérhetők (ún. elektrokardiogram: EKG).
[A **bioritmus** „jóslások” valójában Hold-periódusú, fázisban eltolt szinusz hullámok amplitúdó adatai, különböző dátumoknál ...]

[2] FFT: Fast Fourier Transform (gyors Fourier transzformáció ≈ Fourier-sor felbontás)

[3] A mindennapi életben a rugóra függesztett rezgő test kitérései csillapodnak (egyre kisebbek lesznek), mert csökken a rezgő rendszer energiája. Ha az elveszett energiát a megfelelő ütemben pótoljuk, akkor a test tovább rezeg a "kényszer" hatására.

- [integrálása, deriválása is szinuszos jelet eredményez]

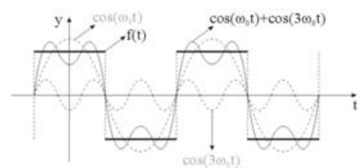
2. Minden **periodikus jel** előállítható szinuszos jelek összegeként (**Fourier-sor**). Ennek többféle ekvivalens alakja van, az egyik az ún. kompakt forma (*cos* hullámok szummája). A gyakorlatban *véges* számú tag (komponens) elegendő adott pontosságú leíráshoz.

(a) Ha a jelperiódus $\boldsymbol{T_0 = 1/ f_0}$, akkor a harmonikus komponens **frekvenciák** értéke: $n{\cdot}f_0$ (n = 1, 2, ... egész szám) és f_0 (= $1/T_0$) az alapharmonikus.

(b) A jelalak határozza meg az **amplitúdó** (A_n) és a **fázis** (φ_n) adatokat,[4] vagyis ezekkel egyértelműen jellemezhetjük az adott hullámformát: pl. az egyenletes „frekvencia skála" mentén, az amplitúdó-értékekkel arányos hosszúságú **vonalak**kal történő ábrázolás a jel **amplitúdó spektruma**.

Szinuszos jelnél – természetesen – csak egyetlen vonal van. Négyszög és háromszög jelnél csak páratlan számú komponensek lépnek fel. Az amplitúdó SPEKTRUM ábrázolásnál választott lineáris skálán a kis értékű komponensek már „eltűnnek" (nem igazán láthatóak), mint pl. a háromszög jel esetén. Ezért a gyakorlatban „torzított", a kis értékeket kiemelő, nagyságrendi megadás célszerű, vagyis logaritmikus skála (az alapharmonikus amplitúdójához viszonyított arány): „[dB] = 20·log (arány)" értékű megadás.

(c) A spektrumból a JELeket matematikai szoftver generálta (az adott képlet szerint).



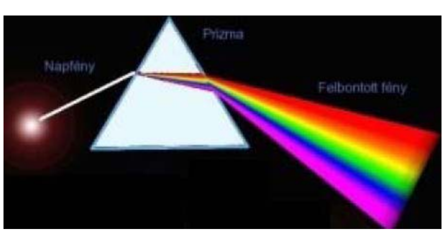
Négyszög (vagy fűrész) jelnél kevés 20 komponens a „jó" szintézishez. Ennek oka: az igen „éles" jelváltások miatt „széles" a spektrum (technikai zsargonban: nagy a sávszélesség), és a harmonikus szám növekedésével lassan csillapodnak a spektrum-vonalak (s ebből csak keveset használtunk fel a szintézishez). A vizsgálójel-források (generátorok) felépítésénél alapeljárás ez a szintézis-technika.

3. Ha speciálisan **véges számú** harmonikus komponenst tartalmaz az y(t) periodikus jel (matematikai nyelven: trigonometrikus polinom), akkor a jel spektrum komponensei az y(t) jel mintáiból is megadhatók! Mégpedig az $f_s = 1/\Delta t$ **egyenletes gyakorisággal** (a t = i·Δt, i = 1, 2, .., N helyeken) **mintavett** y(i·Δt) = y_i értékekből, és N mintából kevesebb mint $N/2$ harmónikus komponens (amplitúdó és fázis adat).[5]

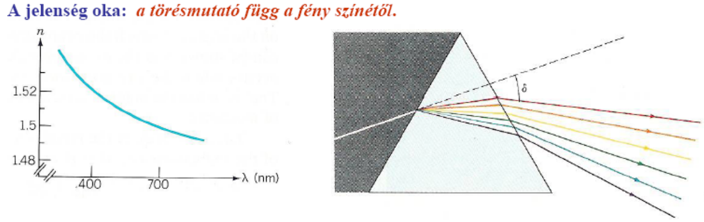
---

[4] A Fourier transzformáció teremt kapcsolatot az időtartománybeli leírás: a **jel** (hullámforma) és a frekvencia tartománybeli leírás: a **spektrum** között. (A komponensek kiszámítása a matematikusok dolga. Ismeretlen jeleknél mérőeszközt, spektrum analizátort használunk.) A kétféle megadás egyenértékű. A gyakorlatban a feladat szabja meg, hogy melyik tartományt célszerű használni.

A spektrum elnevezés a fénytanból ered. Newton (1664) vékony résen át keskeny fehér fénynyalábot bocsátott üvegprizmára. (A „legszebb tíz fizikai kísérlet" között a negyedik helyezett.) Azt tapasztalta, hogy a fehér fény már az első törés után színes nyalábokra bomlott. A színek csökkenő hullámhossz szerint: vörös, narancs, sárga, zöld, kék és ibolya.



A jelenség oka: ***a törésmutató függ a fény színétől.***



[5] Diszkrét adatokkal operáló mérési eljárásokhoz igen kedvező ez az ún. diszkrét Fourier transzformáció (DFT), aminek gyors kiszámítását végző **számítógépes algoritmus** az **FFT** (1965, Cooley & Tukey).

Fourier-sor – *kompakt* forma:

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi \cdot n f_0\, t + \varphi_n)$$

f_0 alap frekvencia, $2f_0$, … (fel)harmonikusok (n = 1, 2 ... egész szám)

Fourier-sor komponensek: A_n amplitúdó és φ_n fázis

SPEKTRUM ábra: csak az amplitúdó adatok

A_0 egyenszint – a harmonikus adatokat nem befolyásolja

Feszültség hullámformák: $\pm U$ volt, A_0 = 0 és minden JEL 20 komponensből szintetizálva

Szinusz jel (sine):

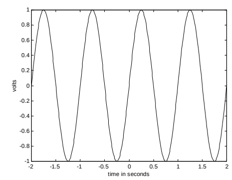
JEL

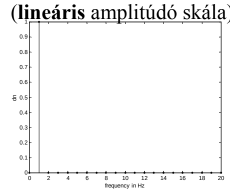
SPEKTRUM

(**lineáris** amplitúdó skála)

$A_1 = U$, $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ ($\varphi_1 = 0$, ha **cos** hullám!)

$$v(t) = U \cos\left(2\pi 1 \cdot f_0\, t - \frac{\pi}{2}\right) = U \sin(2\pi 1 \cdot f_0\, t)$$

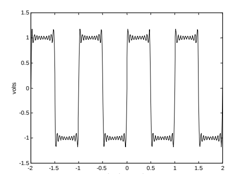


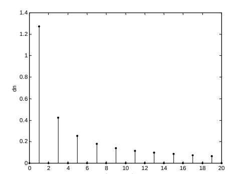


Négyszög jel (square):

$$n \text{ páratlan}: \quad A_n = \frac{4\,U}{n\pi} \quad \varphi_n = -\frac{\pi}{2}$$

$$n \text{ páros}: \quad A_n = 0 \quad \varphi_n = 0$$



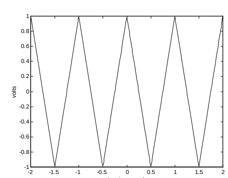


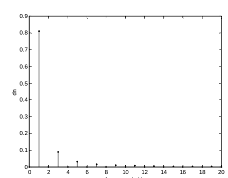
$$v(t) = \frac{4U}{\pi}\left[\frac{1}{1}\sin(2\pi\, f_0\, t) + \frac{1}{3}\sin(2\pi\, 3\, f_0\, t) + \frac{1}{5}\sin(2\pi\, 5\, f_0\, t) + \frac{1}{7}\sin(2\pi\, 7\, f_0\, t) + \ldots\right]$$

Háromszög jel (triangle):

$$n \text{ páratlan}: \quad A_n = \frac{8\,U}{n^2\pi^2} \quad \varphi_n = 0$$

$$n \text{ páros}: \quad A_n = 0 \quad \varphi_n = 0$$



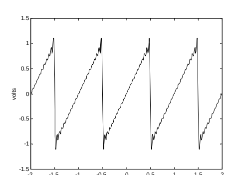


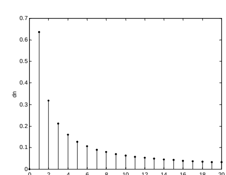
$$v(t) = \frac{8U}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cos(2\pi\, f_0\, t) + \frac{1}{3^2}\cos(2\pi\, 3\, f_0\, t) + \frac{1}{5^2}\cos(2\pi\, 5\, f_0\, t) + \frac{1}{7^2}\cos(2\pi\, 7\, f_0\, t) + \ldots\right]$$

Fűrész jel (saw-tooth, ramp):

$$n \text{ páratlan}: \quad A_n = \frac{2U}{n\pi} \quad \varphi_n = -\frac{\pi}{2}$$

$$n \text{ páros}: \quad A_n = \frac{2U}{n\pi} \quad \varphi_n = \frac{\pi}{2}$$





$$v(t) = \frac{2U}{\pi}\left[\frac{1}{1}\sin(2\pi\, f_0\, t) - \frac{1}{2}\sin(2\pi\, 2\, f_0\, t) + \frac{1}{3}\sin(2\pi\, 3\, f_0\, t) - \frac{1}{4}\sin(2\pi\, 4\, f_0\, t) + \ldots\right]$$

A mért mintasorozat (az N mintából álló időrekord) hossza $T_0 = N \cdot \Delta t$, ez adja a jel periódus-időtartamát, tehát az alapharmonikus frekvencia értéke:

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{N \cdot \Delta t} = \frac{f_s}{N}$$

Mivel az FFT $N/2$ számú harmonikus komponenst ad (azaz véges összegű a jelet visszaállító Fourier-sor), ezért a maximális komponens-frekvencia

$$\boldsymbol{f_{max}} = (N/2) \cdot f_0 = (N/2) \cdot (f_s/N) = \boldsymbol{f_s/2},$$

lehet, ami azt jelenti, hogy a jelben található max. frekvencia-komponensnél (legalább) **kétszer nagyobb** mintavételi frekvencia szükséges!

A frekvencia-felbontás[6] az N mintaszám növelésével javítható, de ez megnöveli a műveleti időt (hosszabb ideig tart a számítás). A mérhető spektrum sávja f_s növelésével szélesíthető.

1. *probléma*: ismeretlen jelnél nem tudjuk előre, hogy az „trigonometrikus polinom”-e. (Az FFT ugyanis feltételezi a T_0 szerinti periodicitást!)[7]
Megoldás: FFT-számítás előtt mesterségesen „periodikussá kényszerítjük” a mintasorozatot ún. ablak (súlyozó) függvénnyel való szorzással (amelynek értéke 1, de nullához tart a rekord szélén). Ez ugyan némiképp módosítja a jel-szegmens adatokat (és így a spektrumot is), de ismerve a változtatás hatását, az eredményt értelmezni tudjuk.

2. *probléma*: nem tudjuk előre, hogy van-e $f_s/2$-nél nagyobb frekvenciájú komponens a jelben. (Ez a mintavétel miatt felismerhetetlenül „belekeveredik” a kiszámított spektrumba!)
Megoldás: mintavétel előtt kiszűrjük az $f_s/2$-nél nagyobb frekvencia-komponenseket! Ha ez nem lehetséges, akkor „kiismerjük” ezt a frekvencia-bizonytalanságot (amit maga a mintavétel okoz) és más módon védekezünk, vagy megpróbálunk vele „együtt élni”, vagy kihasználjuk.

Az FFT spektrum-analizátor (numerikus mintasorozatot feldolgozó szoftver) a jel mintavett (mért) értékeiből számítja az összetett jel harmonikus komponenseinek amplitúdó (A_n) és fázis (φ_n) adatait, míg a frekvencia értékeket ($n \cdot f_0$, $n = 1, 2, \ldots N/2$) előre rögzíti a választott f_s mintagyakoriság és az N rekordhossz ($f_0 = f_s / N$).

4. Miért fontos a jelek frekvencia tartománybeli leírása (a spektrum)? Mert itt (a) a jel-torzítások (nem kívánt frekvencia komponensek) kimutathatók, (b) a lineáris rendszer-modell átvitele igen jól elemezhető, (c) a kommunikációban alkalmazott modulációs[8] eljárások sajátságai áttekinthetők és (d) a mintavétel hatása szemléletes.

---

[6] $\Delta f = f_0$ jelöléssel a képlet $\boldsymbol{\Delta t \bullet \Delta f = (1/N)}$ alakba írható, amiből kitűnik: az időtartomány Δt felbontása és a frekvencia-tartomány Δf felbontása nem választható meg egymástól függetlenül! A mérésnél tehát fontos paraméter az N rekordhossz.

[7] Ha nem ilyen a mérendő, akkor igen meglepő jelenséget tapasztalunk. Legyen $T_0 = 1$ s a mért időrekord hossza, azaz Δf $(= f_0) = 1$ Hz a spektrum felbontása (ami az FFT-vel számítható harmonikus komponensek közötti távolság). Ha a mérendő jel egyetlen szinusz, és frekvenciája pl. 77,5 Hz, akkor éppen „feleúton” van két, egyáltalán lehetséges (77 és 78 Hz) spektrum vonal között! (Tehát a mért jel-szegmensre nem áll fenn a T_0 szerinti periodicitás, mert az egy $n \cdot f_0$ frekvencia-értéket tételez fel.)
Az FFT, szerencsére, „nem vak” erre az esetre (az lenne a „rossz válasz”), hanem olyan komponens-adatokat generál, amelyekkel a Fourier-sor által szintetizált közelítő jel „[négyzetes] eltérése” a mérendő jeltől minimális. Más szóval: a közeli, létező spektrum vonalaknak ad értéket (merthogy nem tud egyetlen vonalat megadni!), szemléletes technikai zsargonnal: a spektrum „szétszivárog”.
A **spektrum-szivárgás** egyrészt frekvencia- és amplitúdó-érték hibát okoz, másrészt „elnyomja” (felismerhetetlenné teszi) a közeli, a mérendő jelben ténylegesen jelenlévő kis amplitúdójú frekvencia komponenseket. Ezeket a hatásokat enyhíti az ún. ablak (súlyozó) függvény alkalmazása. A célszerű ablak-függvényt a mérési cél határozza meg.

[8] Információátvitelre a szinuszos jel valamelyik paraméterét változtatjuk (= moduláljuk).