7. A kerék trükkje (avagy miért forog visszafelé?) / Hogyan kerekítsünk? **Mintavételezés, kvantálás**

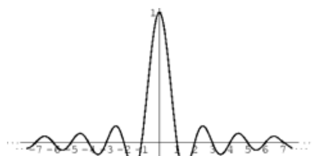
Amit látunk, az nem az!

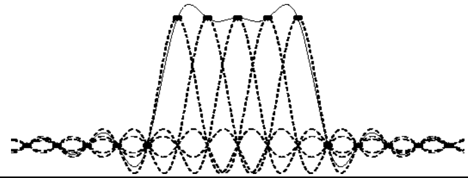
A mai (korszerű) mérőeszközök döntően **diszkrét** (időben mintavételezett és amplitúdóban kvantált) **adatokkal operáló mérési eljárások**at alkalmaznak. A műveleteknek a mérendőre gyakorolt lényeges hatásai meghatározzák a lehetséges felhasználásokat.

Mintavétel: pont (matematikai) mintavételezés esete

1. (kritikus) kérdés: visszaállítható-e a minták között a jel értéke?
A válasz: igen, ahogyan ezt az alábbi példa is szemlélteti – impulzus rekonstruálása[1] öt mintából, a minta-értékek: y_i = […,0,0,**1,1,1,1,1,**0,0,…]

$$SINC(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} \qquad \rightarrow \qquad y(t) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} y_i \cdot SINC\left(\frac{t}{\Delta t} - i\right), \qquad \Delta t = 1/f_s$$





A mintagyakoriság: $f_s = 1/\Delta t = 1$, a pontok: jelminták, a szaggatott vonalak: SINC függvények, folytonos vonal: rekonstruált folytonos jel[2] (SINC függvények összege, és egy pont-minta hozzájárulása a jelhez: minta-középpontú, a mintával skálázott és a mintagyakorisághoz illesztett [a többi minta helyén nulla értékű] SINC függvény). A mintahelyeken egzakt a visszaállítás.

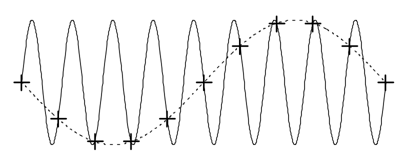
Az ún. SINC interpoláció (minden mintát felhasználó „végtelen összegzés") helyett a gyakorlatban közelítő, pl.

- szakaszonként konstans (csak egyetlen mintát felhasználó ún. „tartás"),
- lineáris (két mintát felhasználó „pont-összekötés"),
- csonkított SINC (néhány szomszédos mintát felhasználó „véges összegzés"),
- spline (három mintát felhasználó „harmadfokú közelítés")

visszaállítást – vagyis számítógépes algoritmust – alkalmazunk, a pontossági igénytől és egyéb feltételektől függően, a szükségesnél sűrűbb gyakoriságú adatokkal.

2. (alap) kérdés: mekkora f_s mintagyakoriság szükséges?

Mint az ábrából is kitűnik, két jel idő-mintái lehetnek azonosak, és mintavétel után (csak a mintákat tekintve) nem tudjuk, hogy valójában melyik jelet mintavételeztük! A jel-visszaállító algoritmusok mindig a kisfrekvenciás jelet, a (0, f_s/2) sávban lévő frekvencia-komponenst állítják elő, ezért ha a nagyobb frekvenciás jel volt a bemenet, akkor az „másnak mutatja magát", ún. **hasonmás (alias)** lép fel (az „alul"-mintavételezés miatt)!



A válasz (mint az FFT-nél adott kötés): legyen $f_s > 2 \cdot f_{max}$, ahol f_{max} a jel max. frekvencia

---

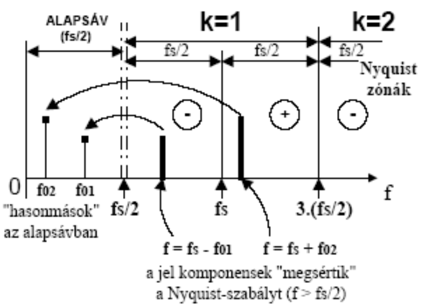
[1] Az időtartományban SINC interpoláció állítja vissza az egyenletes gyakoriságú mintákból a folytonos jelet (E.T. Whittaker, 1915. SINC: „sine cardinal"). Az ábrát matematikai szoftver generálta (lásd: képlet). Ugyanezt a funkciót a frekvencia tartományban az ideális aluláteresztő szűrő teljesíti: olyan fizikai eszköz (áramköri építőelem), amely frekvencia-szelektív, csak a (0, f_s/2) frekvencia-sávban „átlátszó".

[2] A ritka mintavétel – és az impulzus túl gyors változása – miatt a folytonos jel csak közelíti 1 értékét, „túllövés" és „hullámzás" tapasztalható (ún. Gibbs-jelenség, 1899). A helyzet hasonló ahhoz, amit már láttunk a négyszög-jelnek Fourier-sorral való közelítésénél.

komponense (alapsáv esetén, ún. Nyquist-szabály[3]).

Ennek oka a szinusz 2π szerinti periodicitása! (A Fourier-felbontás miatt elegendő egyetlen szinuszos komponenst vizsgálni.) Ha f_s (=1/Δt) gyakoriságú a mintavétel, akkor az $\boldsymbol{f_A < f_s/2}$, és minden $f = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{f_s} \pm \boldsymbol{f_A} > f_s/2$ (k = 1, 2, ...) frekvenciájú szinuszos jel mintái azonosak, mert

$$\sin(2\pi \cdot (kf_s \pm f_A) \cdot i \cdot \Delta t) = \sin(\pm 2\pi \cdot f_A \cdot i \cdot \Delta t + 2\pi \cdot k \cdot i) = \sin(\pm 2\pi \frac{f_A}{f_s} i)$$



itt f_A/f_s <½ a numerikus (f_s-re normált) frekvencia. A negatív előjel egyszerűen fázis-fordítást jelent: sin(-x) = -sin(x).

Grafikusan: a frekvencia tengelyt (0-tól kezdve) f_s/2 nagyságú ún. **Nyquist-zónák**ra osztva, a (0, f_s/2) alapsávon kívüli minden (a jelben lévő) frekvencia komponens ebbe az alapsávba „lapolódik át”, és ott f_A értékű kisfrekvenciás komponensnek „mutatja magát”! Az alulmintavételezett komponens tehát „belekeveredik” az alapsávba.

Mintavétel után már nem tudható, hogy pl. f_{01} valódi vagy „hamis” komponens-e. (Az amplitúdó spektrumban a fázis-fordítás nem látszik.) Nincs átlapolódás akkor, ha mintavétel előtt kiszűrjük[4] az f_s/2-nél nagyobb frekvenciájú komponenseket.

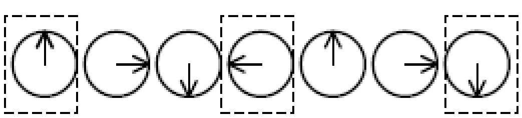
A nem elegendően gyakori mintavétel miatt fellépő **hasonmás (aliasing)** jelenségre a moziban is rácsodálkozhatunk: miért forog <u>vissza</u>felé az előrehaladó jármű kereke?

A film lejátszásánál 24 *álló* (mintavételezett) képkockát vetítenek le 1 s alatt, s ebből a szem (plusz az agy /DSP/) rekonstruálja a *mozgó* képet. Legyen $\boldsymbol{\varphi_A < \pi}$ a szögelfordulás (egyik vagy másik irányba) két, f_s (=1/Δt) gyakoriságú felvillanás között. A szögsebesség ω (= 2πf) = φ/Δt felhasználásával (a szögelfordulás 2π szerint periodikus!)

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{\pm \varphi_A + k \cdot 2\pi}{\Delta t} = k \cdot f_s \pm f_A$$

vagyis a tényleges f frekvencia helyett az f_A (= (1/2π)·(φ$_A$/Δt)) *látszólagos* értéket figyelhetjük meg, és a negatív érték a visszafelé forgás esete!

Szemléletesebb az alábbi példa: egy jelölt kerék jobbra forog 1 Hz-es fordulatszámmal, és ezt



így is látjuk f_s = 4 „villanás”/s gyakorisággal felvillanó fénynél. Ha azonban lecsökkentjük a mintavétel értékét f_s = 4/3 „villanás”/s értékre, ami azt jelenti, hogy csak <u>minden</u> <u>harmadik</u> képet látjuk, akkor a kerék látszólag <u>vissza</u>felé (balra) forog. (Igazoljuk ezt a frekvencia tengelyen is, a Nyquist-zónák felhasználásával!)

<u>Kérdés</u>: mikor áll[5] a kerék (látszólag)? Ismerünk-e olyan mérést, ami ezt hasznosítja?

3. (fontos) kérdés: periodikus jelből periodikus mintasorozat adódik-e?

Válasz: csak ha <u>koherens</u> a mintavétel, ha „m számú periódusból veszünk N mintát”.

Ugyanis egy mintasorozat i-ben csak akkor N periódusú, ha $\boldsymbol{f_A/f_s} = \mathbf{m}/\boldsymbol{N}$ és m = egész

$$y_i = y_{i+N} = \sin\left(2\pi \frac{f_A}{f_s}(i+N)\right) = \sin\left(2\pi \frac{f_A}{f_s} \cdot i + 2\pi \cdot \left(\frac{f_A}{f_s} \cdot N\right)\right) = \sin(2\pi \frac{f_A}{f_s} \cdot i)$$

---

[3] H. Nyquist, 1928. (Eredeti neve Jonsson ... „Nyquist was just an alias”.)

[4] A védelem megnevezése **AAF** (anti aliasing filter): hasonmásokat eltávolító szűrő. (Mozgófilm esetén pl. nincs ilyen optikai szűrő, ezért ott „együtt kell élni” a hasonmás jelenséggel.)

[5] “Nyquist vudu”: mintavétel <u>után</u> „nincs jel”! (El tudjuk ezt képzelni pl. az időtartományban szinuszos jel esetén? Igazoljuk a frekvencia tartományban, a Nyquist-zónák felhasználásával!)

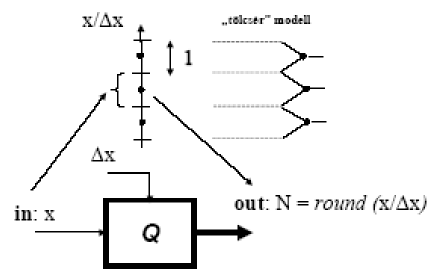
A feltétel másképp ($T_A = 1/f_A$ és $\Delta t = 1/f_s$ jelöléssel): $\mathbf{m \cdot T_A = N \cdot \Delta t}$ („m periódusból N minta”). Ez a kapcsolat nemcsak FFT-nél fontos (hogy ne legyen spektrum szivárgás), hanem pl. jel-generálás esetén is (ahol memóriában tárolt véges mintasorozatot „játszunk vissza” ismételten).

4. (lényeges) kérdés: milyen a mintavételezett jel spektruma?
Válasz: az egyenletes mintavétel eredménye periodikus spektrum. Az alapsávi spektrum ismétlődik minden $k \cdot f_s$ pont környezetében (a Nyquist-zónákban, a páros (-) zónában *fordított* frekvencia sorrendben), tehát f_s többszörösei centrummal **képmások (images)** jelennek meg!

A képmások nem harmonikusok, és az y_i mintavételezett jel nem végtelen teljesítményű. A képmások csak azt szemléltetik, hogy ezeken a helyeken lévő bármelyik frekvencia komponens mintavételezésével előállhatott az y_i mintasorozat. Ebből – szemléletesen – következik a **Nyquist-szabály**: ha a bemenet sávja kisebb, mint egy Nyquist-zóna, akkor a képmások „nem lapolódnak át”, és így a mintavétel *megfordítható*: a $(0, f_s/2)$ alapsáv kiszűrésével[6] visszaáll a mintavétel előtti (folytonos) jel.

Kvantálás (kerekítés): valós → egész (mérőszám) konverzió[7] esete

1. A kvantálás(Q), melynek metrikai egyenlete: $(x/\Delta x) + e = N$, visszavonhatatlan, $|e| < ½$ terjedelmű **hiba** (error) fellépésével jár. A hiba pillanatértéke bemenet-függő, és az N mérőszám egy intervallumot jelöl (mert nem tudjuk, hogy azt az intervallumban lévő melyik érték generálta; jól érzékelteti ezt a tölcsér modell).



Ha a mérendő analóg tartomány terjedelme X_{FS} (full scale), akkor **n** bites mérőszám (összesen 2^n állapot) esetén[8] az **egység** (a felbontás): $\Delta x = X_{FS}/2^n$. A legkisebb helyérték súlya többféle módon is megadható:

bit-szám **n**	állapot-szám (2^n)	$\Delta x = \frac{X_{FS}}{2^n}$ **ha X_{FS} = 10 V**	**%** FS $\left(\frac{1}{2^n}\cdot 100\right)$	**ppm** FS	**dB** FS [$20\cdot\log(1/2^n)$]
10	1024 (1000)	9.77 **mV** (≈10 mV)	0.098 (0.1)	977 (1000)	- 60
16	65 536	153 **μV**	0.0015	15	- 96
20	1 048 576	9.54 **μV** (≈10 μV)	0.0001	1	- 120

Bináris kódolás számítógépes interfésznél célszerű, vizuális megjelenítéshez viszont decimális a számkijelzés. A DIGITszám(d) – BITszám(n) *ekvivalencia*[9]: $d \approx 0{,}3 \cdot n$.

2. A kvantáló átvitele – a kimenet (N) a bemenet ($x/\Delta x$) függvényében – „lépcsős” karakterisztikájú, tehát igen erősen **nemlineáris**. Szinuszos jelre egy nemlinearitás felharmonikus frekvencia komponenseket állít elő, más szóval torzítást okoz. Ez azt jelenti, hogy a kvantálás módosítja a mérendő jel spektrumát, ami csak akkor elfogadható, ha a torzítás kis szintű (és lehetőleg legyen *zaj*-jellegű).

---

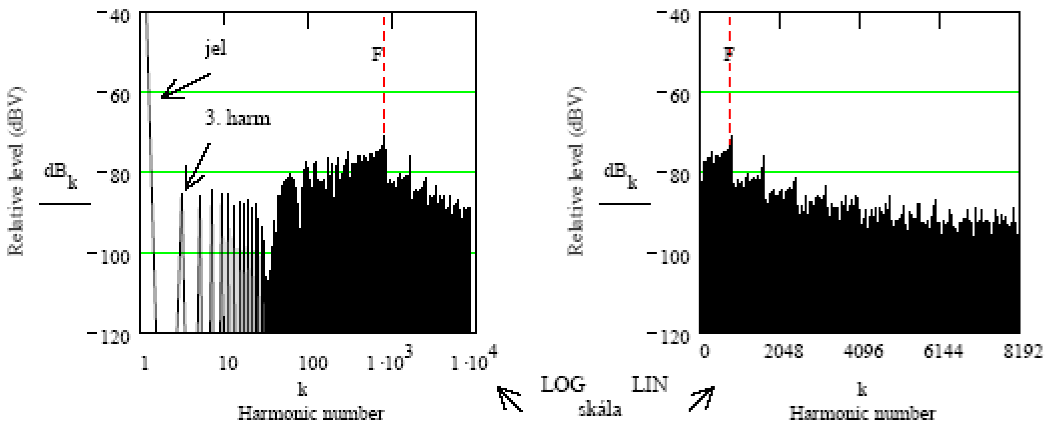
[6] A megnevezés **AIF** (anti imaging filter): képmásokat eltávolító szűrő.

[7] A matematikai szoftvereknél is megtalálható *round*() művelet.

[8] Ha viszont az egység (Δx) és a tartomány (X_{FS}) van előírva, akkor a szükséges bitszám:
$$(X_{FS}/\Delta x) = 2^n \;\rightarrow\; \log(X_{FS}/\Delta x) = n \cdot \log 2, \text{ és ebből } n \geq 3{,}3 \cdot \log(X_{FS}/\Delta x)$$

[9] Mert $2^n \approx 10^d \rightarrow \log 2^n \approx \log 10^d$, és innen $d \approx (\log 2)\cdot n = 0{,}3 \cdot n$ (mert $\log 2 \approx 0{,}3$).
Például “n = 16 bit (CD lejátszó)” kb. “d ≈ 4.8 digit → 4½ digites multiméter”. (Ha a kijelzés legmagasabb helyértékén nem teljes a digit-szám, akkor a technikai zsargon: “½ digit”; ez itt inkább „¾ digit”.)

Speciálisan a *round*() művelet csak páratlan számú harmonikus értékeket generál, ahogyan ezt az alábbi (N = 16K pontos FFT-vel számolt) ábra is szemlélteti:

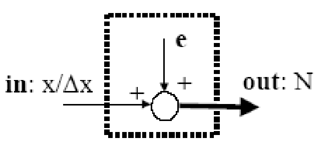


A bemenet: $\sin(2\pi\cdot(1/s)\cdot i)$, ahol $s = 2^{14}$, tehát jelentős a „túl”-mintavételezés (a hasonmások elkerülésére!), a felbontás: n = 8 bit, és a jel szintje: 0 dB.
(A max. szintű harmonikus száma: $F \approx \pi\cdot 2^n$, és ennek a szintje $\approx -9\cdot n + 6$ [dB])

A LOGaritmikus frekvencia skála a „páratlanságot”, a LINeáris skála pedig ebben az esetben a „fehér-zaj jelleget” jól szemlélteti.

3. A méréstechnika nagy csele: **lineáris** kvantáló modell

A nemlinearitás hatását igen nehéz számba venni, s ha mégis – mivel a szuperpozíció elv



nem használható –, minden bemenő jelre külön-külön kell a számítást elvégezni. Ráadásul a hiba pillanatértéke is bemenet-függő. Ezért ha elég nagy a felbontás, és a mérendő jel igen dinamikus (spektrálisan „összetett”), akkor a kvantáló hibáját a bemenettől *független*, szélessávú *zaj*-forrással[10] modellezzük: *round*() művelet esetén az **e** hiba egyenletes eloszlású (az |e| < ½ tartományban) és spektrálisan fehér zaj (egyenletes amplitúdó spektrum a 0, $f_s/2$ tartományban).

Mintavétel és kvantálás együtt:

Az f_s **mintavételi frekvencia** a sávszélességet (a mérhető spektrumot), az n bites **felbontás**ú kvantálás a dinamikát (a pontosságot) korlátozza. Eszközök összehasonlításához kiindulás lehet az „átviteli kapacitás”:

$$2^n / \Delta t = 2^n \cdot f_s$$

A két alap-paraméter (f_s és n) egyidejű javítása a gyakorlatban egymásnak *ellentmondó* követelmény! Jellegzetesen eltérő kategóriát képviselnek a nagy mintagyakoriságú (de emiatt kis felbontású), ill. a finom felbontású (de lassú, kis mintavételi frekvenciájú)[11] eszközök. Egy „univerzálisan” használható átalakítónál az várható, hogy „ebből is egy kicsit, abból is egy kicsit”.

---

[10] Ez rossz becslés kisszintű (durva felbontású) vagy periodikus jel, ill. konstans jel esetén.

[11] Egy trükk: a gyakorlatban igen nagy felbontású átalakítót úgy építünk, hogy igen kis bitszámú, de igen nagy mintagyakoriságú átalakító mintasorozatából **digitális szűrő** eltávolítja a kvantálási (fehér) zaj nagy részét, tehát lényegesen megnöveli a *jel/zaj arány*t és így a bitszámot is (!), miközben lecsökkenti a minták gyakoriságát (ún. decimáló szűrő).
Megjegyzés: tovább is lehet fokozni a kvantálási zaj „kisöprését” a hasznos (kis-frekvanciás) sávból ún. **zaj-formálás**sal (technikai megnevezéssel ez a ΔΣ elv /moduláció/).