

Egy - időállandós rendszer modell

Egyszerű, gyakran használt (több *ököl*szabályban is tettenérhető) közelítés; az átvitelt **RC (aluláteresztő) - szűrő** [$\tau = RC$ időállandó]¹ modellezi.

1. ALAPÖSSZEFÜGGÉSEK

A. Szinuszos, $\omega = 2\pi f$ frekvenciájú ($T = 1/f$ periódusidejű) és A amplitúdójú *bemenet (gerjesztés)* esetén - a feszültségosztás, valamint a komplex szám abszolút értéke és fázisa képletét felhasználva - a *kimenő jel (a válasz)*

$$\frac{u_{KI}}{A} = a \cdot \cos(\omega \cdot t - \Phi) = a \cdot \cos[\omega \cdot (t - \Delta t)]$$

ahol az **amplitúdó átvitel** (az abszolút érték):

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{B}\right)^2}} \quad \dots (1)$$

és itt B a sávszélesség (az a frekvencia érték, ahol $a = 1/\sqrt{2}$, azaz **-3 dB**)

$$B = \frac{1}{2\pi \cdot RC} \approx \frac{0,16}{\tau} \quad \dots (2)$$

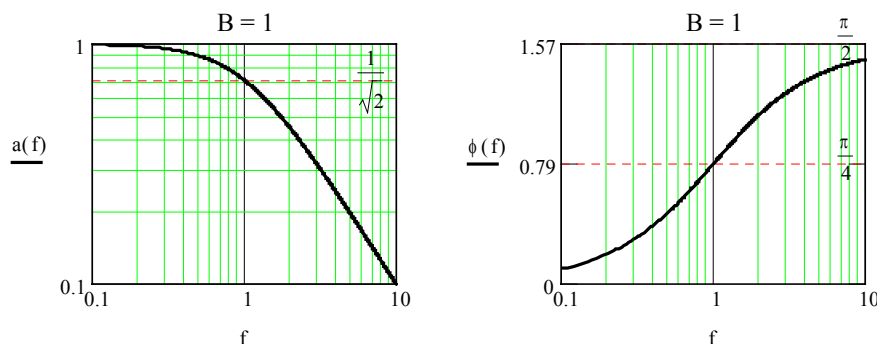
a (relatív) **fázis** nagysága:

$$\Phi = \arctg(\omega RC) = \arctg\left(\frac{f}{B}\right) \quad \dots (3)$$

(és $\Phi = 45^\circ = \pi/4$, ha $f = B$), illetve a fázissal ekvivalens Δt időkésleltetés értéke

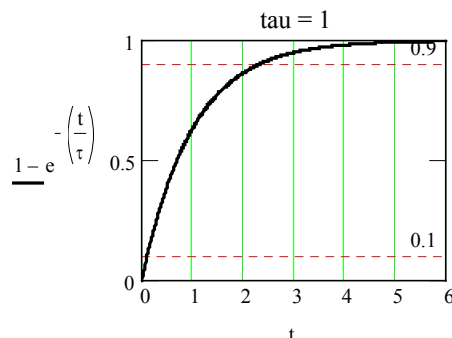
$$\Delta t = \frac{\Phi}{\omega}, \quad \text{azaz} \quad \frac{\Delta t}{T} = \frac{\Phi}{2\pi} \quad \dots (4)$$

Az átvitel (a) és a fázis (Φ) *frekvencia-függése* (B -re normált frekvencia):



¹ elsőrendű hálózat [1st -order low-pass (LP) system]

B. Egységugrás bemenetre a válasz “exponenciális”: $1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$ (5)



(τ -ra normált idő), a t_f felfutási idő (10-90%) értéke pedig

$$t_f = RC \cdot \ln 9 \approx 2,2 \cdot \tau \quad \text{..... (6)}$$

C. A felfutási idő (t_f) és sávszélesség (B) kapcsolata (6) és (2) alapján

$$\boxed{t_f = \frac{\ln 9}{2\pi \cdot B} \approx \frac{0,35}{B}} \quad \text{..... (7)}$$

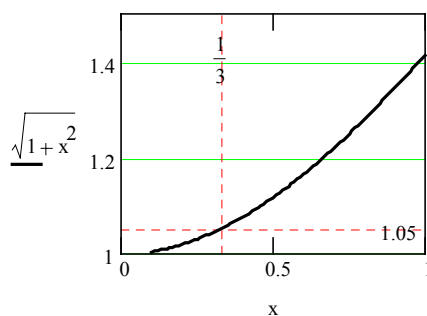
és ezt az összefüggést pl. az **oszilloszkópok** adatlapján is felfedezhetjük!

Megjegyzés:

egymást követő (**kaszkád** kapcsolású) egy-időállandós fokozatok esetén, az eredő t_{fe} felfutási idő értékére jó közelítés a “**négyzet-szabály**”

$$t_{fe} \approx \sqrt{(t_{f1})^2 + (t_{f2})^2} = t_{f1} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{t_{f2}}{t_{f1}}\right)^2} \quad \text{..... (8)}$$

ahol pl. **oszilloszkóp** esetén t_{fe} : a megfigyelt érték, t_{f1} : a *mérendo*, t_{f2} pedig az oszcilloszkóp saját felfutási ideje (lásd (7)).



Valójában, modell szinten is bonyolultabb² az összefüggés ...

² Csak mazochistáknak: C. Mittermayer, A. Steininger: “On the determination of dynamic errors for Rise Time measurement with an oscilloscope,” *IEEE Trans. on Instr. and Meas.*, pp. 1103-1107, Dec. 1999

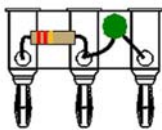
2. FELADAT

Egy-időállandós (RC **alul**áteresztő szűrő) rendszer *modell* alapján³ határozzuk meg

- (a) a felfutási idő (t_f) és a sávszélesség (B) kapcsolatát [$t_f \approx 0.35/B$],
- (b)* az amplitúdó hibát becslő “**hárm**as-szabályt” [3-szor nagyobb sávszélességű oszcilloszkóp kell 5%-os pontosságú méréshez],
- (c)* a felfutási idő hibáját becslő “**harmad**os-szabályt” [*harmadnyi* felfutási idejű oszcilloszkóp kell 5%-os hibához],
- (d) a **kapacitív terhelés** hatását egy forrásra [a felfutási idő: $t_f \approx 2,2 \cdot RC$],
- (e)* egy adott pontossághoz szükséges beállási időt,
- (f)* a diszkrét-idejű **EXPonenciális ÁTLA**Golás rekurzív algoritmusát.

³ A *-gal jelölt feladatok megoldását lásd a Függelékben.

3. KÍSÉRLET

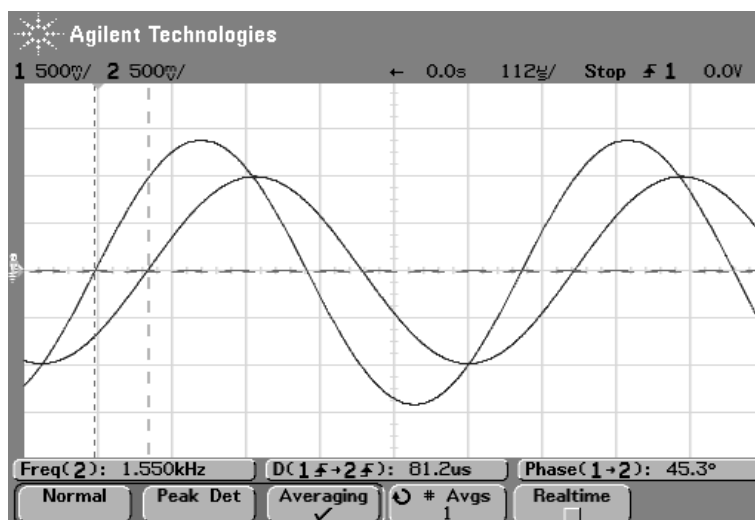


RC hálózat: ellenállás-méréssel $R = 9,91 \text{ k}\Omega$, C ismeretlen
Gerjesztés: ARB generátor, válasz-elemzés: digitális oszcilloszkóp (DSO) - (1) csatorna: *bemenet (gerjesztés)*, (2) csatorna: *kimenet (válasz)*

A1. Szinuszos gerjesztésnél, a mért adatokból

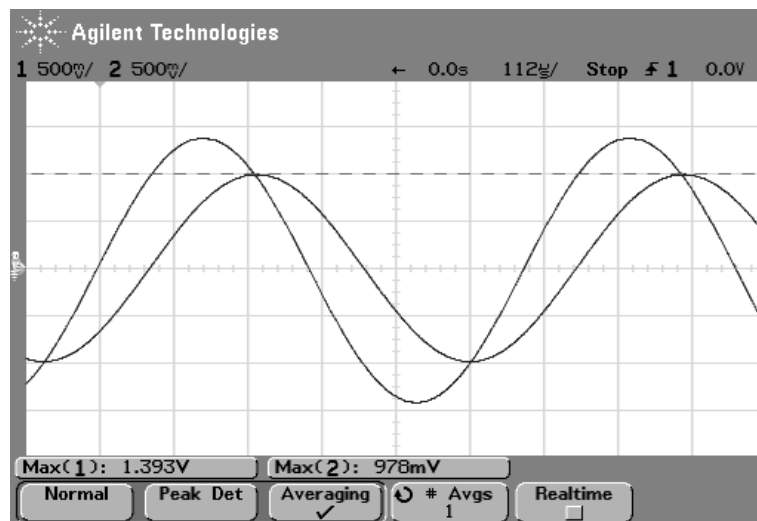
- (α) ellenőrizzük a Δt idő-késleltetés adatát,
- (β) határozzuk meg C értékét, ha $R = 9,91 \text{ k}\Omega$ és adjuk meg a B sávszélességet,
- (γ) a Lissajous-görbe alapján is ellenőrizzük a Φ fázis adatot.

(α) mért idő-adatok:



Útm: Δt késleltetés (**D**: Delay) ellenőrzéséhez lásd a (4) egyenletet [**vigyázat:** a képletben *rad*, a mérésnél *fok* a fázis dimenziója]

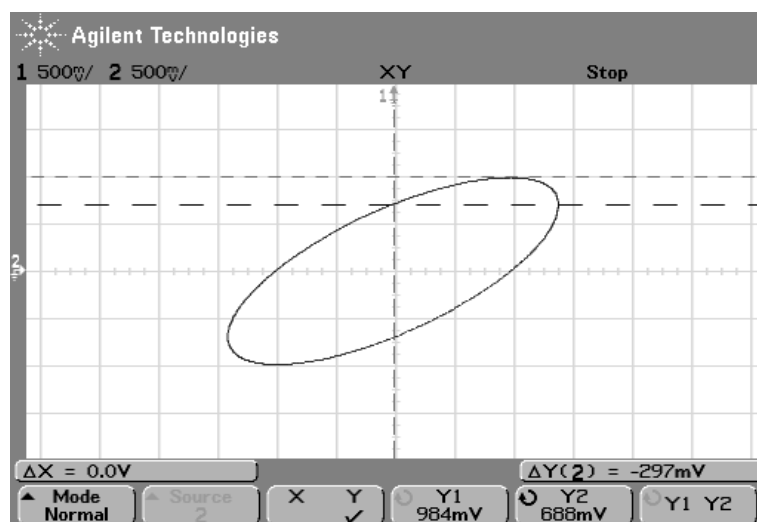
(β) mért **amplitúdó** adatok:



Útm: pl. $V_{\max(2)} = \frac{V_{\max(1)}}{\sqrt{1 + (\omega \cdot RC)^2}}$, ebből $C = \frac{\sqrt{\left(\frac{V_{\max(1)}}{V_{\max(2)}}\right)^2 - 1}}{\omega \cdot R}$

[lásd (α) mérésnél a frekvencia értékét], a *B* sávszélesség (2)-ből adódik. (Vegyük észre: mivel $\Phi \approx \pi/4$, ezért $B \approx$ “az (α)-nál mért frekvencia”)

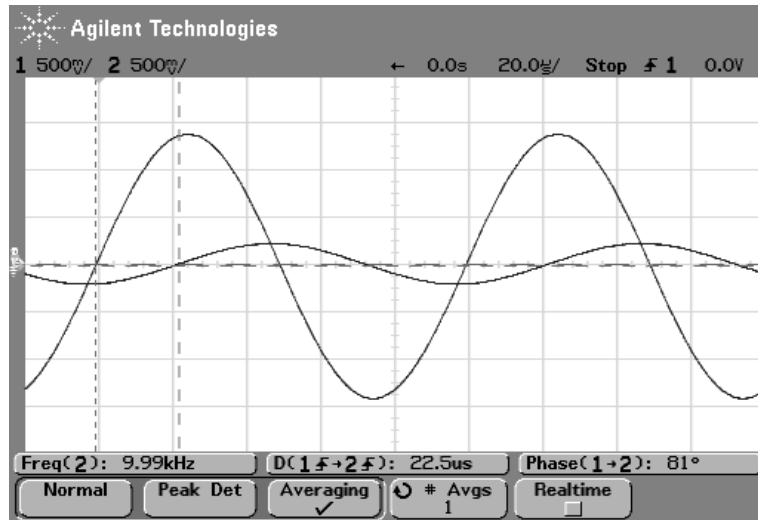
(γ) Lissajous-görbe: X = (1) csat, Y = (2) csat



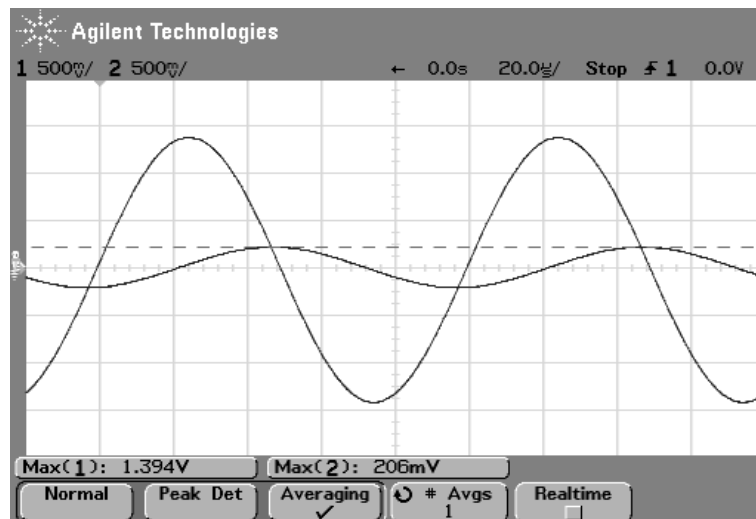
Útm: egyszerűen belátható, hogy $\sin(\Phi) = \frac{Y2}{Y1}$

(Megjegyzés: természetesen $Y1 \approx \text{Max}(2)$)

A2. Ugyancsak **szinuszos** gerjesztés, de “nagy”frekvencián:

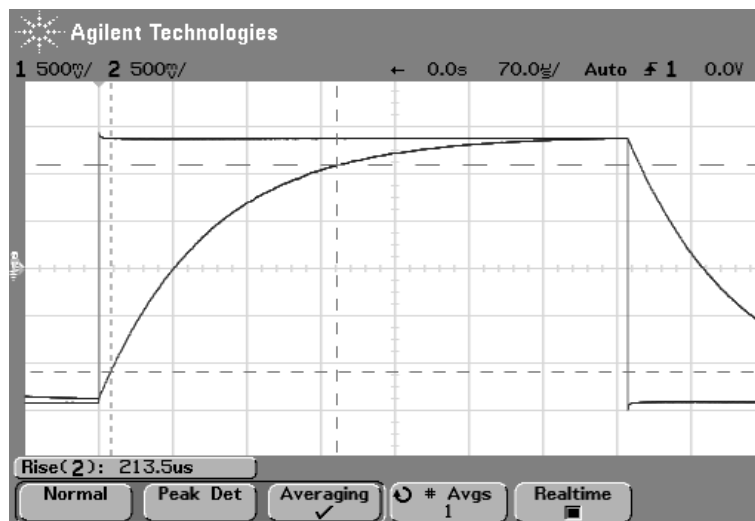


Ellenőrizzük most a $\Phi (= \Delta t \cdot \omega)$ **fázis** adatot!



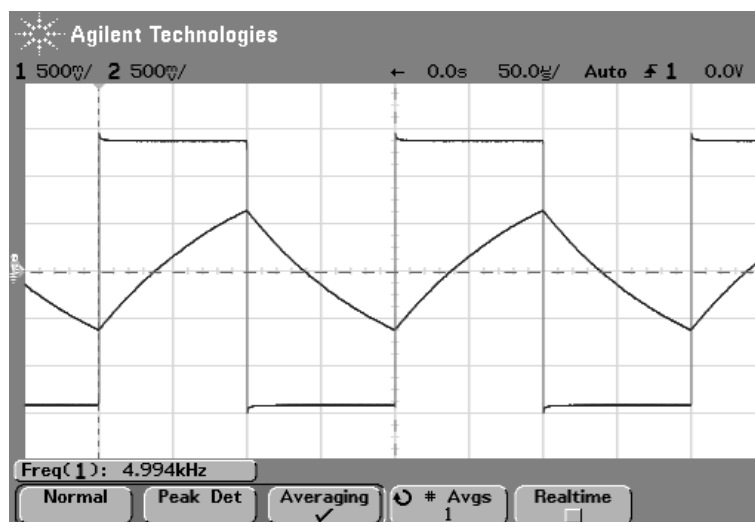
Határozzuk meg itt is **C** értékét (a mért amplitúdó adatokból, az ellenállás változatlanul **R = 9,91 kΩ**)!

B1. Egységugrás (1 kHz-es **négyszög**-impulzus) gerjesztésre a válasz:

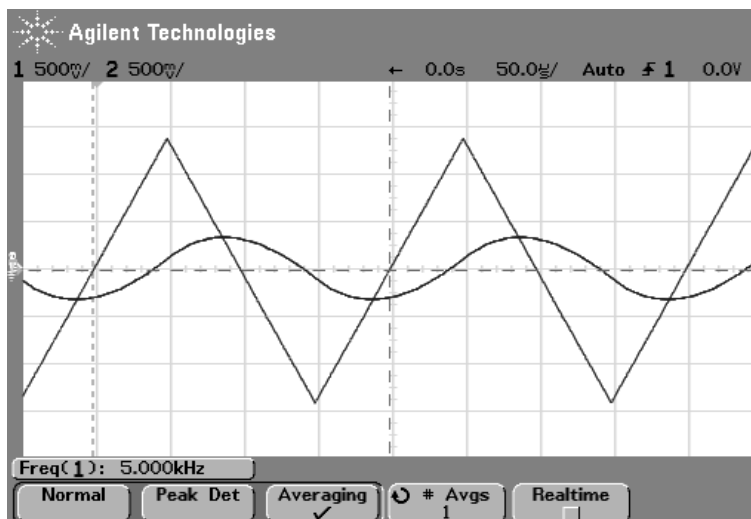


Határozzuk meg itt is C értékét a mért felfutási idő (Rise) adat - és az ismert R ellenállás - felhasználásával, lásd (6)-ot!

Megnövelt frekvenciájú **négyszög**-impulzus sorozatra adott válasz (az RC hálózat mint *integrátor* ...):

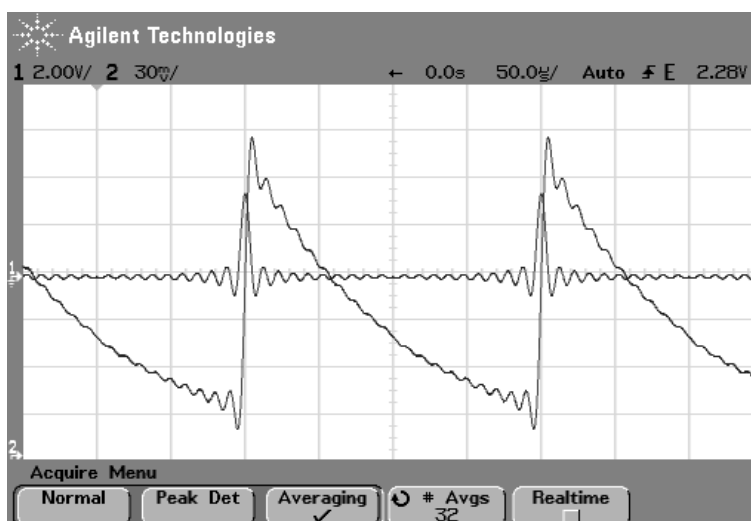


B2. “Nagy”frekvenciás háromszög jelre adott válasz:



Megjegyzés: ezen a frekvencián már láthatóan radikális a szűrő hatás ...

B3. SINC-pulzusra (\approx Dirac-impulzusra) adott válasz:



Megjegyzések:

- (1) Nagy amplitúdót kell használni – miért?
- (2) *Emlékezzünk* az RC-tag (Dirac)impulzus-válaszára!
- (3) Végezzük el a kísérletet **(a)** növelt számú (pl. 30) „zero cross” paraméterű SINC pulzussal [Waveform Editor], illetve **(b)** igen kis kitöltésű tényezőjű négyzet jellel (\approx Dirac-impulzus) – a generátor (33120A type) „burst” üzemmódját használva [carrier: Square, Freq: 100kHz, burst Count: 1, burst Rate: 100 Hz], vagy 33220A type esetén „pulse” üzemmód

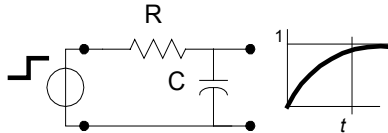
Határozzuk meg az ábra alapján a $\tau = RC$ időállandót!

FÜGGELÉK: feladat megoldások

(b) A “**hármas-szabály**”(1)-ből közvetlenül adódik (felhasználva az $\frac{1}{1+x} \approx 1-x$ közelítést, és azt, hogy a “relatív hiba” mellett - mert 1-nél jóval kisebb - elhanyagolható a “relatív hiba négyzete”),

(c) A “**harmados-szabályt**” (8)-ből kapjuk, lásd még a hozzá tartozó ábrát is.

(e) Egységugrás bementre a válasz “exponenciális”:



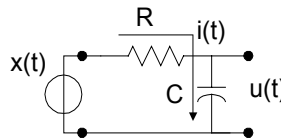
és a - végérték h relatív hibájú megközelítéséhez szükséges - t beállási idő az

$$\frac{1 - \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}{1} = h$$

egyenletről: $t = \tau \cdot \ln(1/h)$.

Például 1%-os pontosságú beálláshoz $t = 4,6 \cdot \tau$.

(f) Írjuk fel az áramkör egyenletet *diszkrét* alakját!



Az ábra alapján: $x = i \cdot R + u$, ebből a (töltés: $Q =$) $i \cdot dt = C \cdot du$ kapcsolat és $\tau = RC$ (időállandó) felhasználásával, a k -adik mintavételi időpillanatban a *differencia* egyenlet ($dt = \Delta t$ és $du = u_k - u_{k-1}$)

$$x_k = u_k + \tau \cdot \frac{u_k - u_{k-1}}{\Delta t}, \text{ vagyis a kimenet: } u_k = \frac{n-1}{n} \cdot u_{k-1} + \frac{x_k}{n}$$

ahol $n = 1 + (\tau/\Delta t)$ **konstans**.

Az aluláteresztő szűrővel ekvivalens *exponenciális átlagolás* fokozatosan “elfelejti” a régi mért (átlag)értékeket és csak “részben érvényesíti” az új adatot.

Megjegyzés: a *rekurzív* egyenlet másik, szokásosabb formája:

$$u_k = u_{k-1} + \frac{x_k - u_{k-1}}{n},$$

ahol tehát “ x_k ” az **új minta**, “ u_{k-1} ” a régi átlag és “ u_k ” az **új átlag**érték, n pedig az „időállandó”.