

ANALÓG MODULÁCIÓS ELJÁRÁSOK

Az eddigi fejezetekben foglalkoztunk a hírközlő csatorna additív zajával, véges sávzélességével, de még csak utalást sem tettünk arra, hogy milyen frekvenciasávban működik a csatorna. Jelenleg azokat az ún. modulációs eljárásokat vizsgáljuk meg, amelyek arra szolgálnak, hogy az analóg jelet a rendelkezésre álló csatorna frekvenciasávjába helyezték el, majd a csatorna kimenetén, lehető egyszerű eljárással, az eredeti jelet visszaállítsák.

A vizsgálat során az általánosan használt szinuszos vivőhullám esetére korlátozódunk, és ezen belül két csoportot különböztetünk meg: (i) a lineáris modulációs eljárásokat és (ii) a szögmodulációs eljárásokat.

Gyengén stacionárius, sávhatárolt folyamatokkal modellezzük a moduláló jelet, a szinuszos vivőt pedig a már korábban megismert, szintén gyengén stacionárius véletlenfázisú szinuszfolyamattal írjuk le. Tehát alkalmazhatjuk a spektrális előállítást, ami nagyon hasznos lesz a lineáris modulációs eljárásoknál.

SZINUSZOS VIVŐ LINEÁRIS MODULÁCIÓJA

Legyen a moduláló jel B -re sávhatárolt és gyengén stacionárius, azaz $\xi_t = \int_{-B}^B e^{j\omega t} d\beta_\xi(\omega)$, a

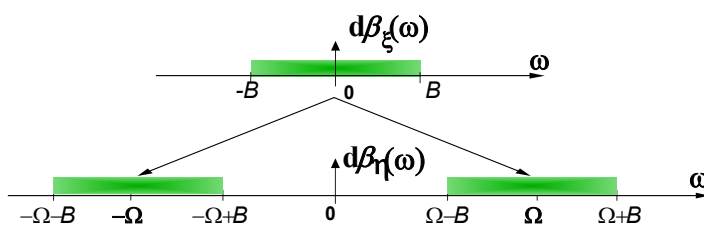
vivő pedig $v_t = 2 \cos(\Omega t + \Phi)$, ahol a 2-es amplitúdó kényelmes lesz az exponenciális írásmódban. Továbbá legyen az Ω a B sávhatárnál nagyobb vivőfrekvencia, a Φ pedig egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $(0, 2\pi]$ intervallumon.

Modulációs szabályok

A következőkben megvizsgáljuk a különböző modulációs szabállyal működő AM eljárásokat. Röviden AM-nek nevezik a szinuszos vivő lineáris modulációját. Kiindulási alapként mindegyik esetben a $\xi_t \cdot v_t$ szorzatot használjuk, amit η_t -vel jelölünk:

$$\begin{aligned} \eta_t &= \xi_t \cdot v_t = \int_{-B}^B e^{j\omega t} d\beta_\xi(\omega) \cdot 2 \cos(\Omega t + \Phi) = \int_{-B}^B e^{j\omega t} d\beta_\xi(\omega) \cdot (e^{j\Omega t} e^{j\Phi} + e^{-j\Omega t} e^{-j\Phi}) = \\ &= \int_{-B}^B e^{j(\omega+\Omega)t} e^{j\Phi} d\beta_\xi(\omega) + \int_{-B}^B e^{j(\omega-\Omega)t} e^{-j\Phi} d\beta_\xi(\omega) \end{aligned}$$

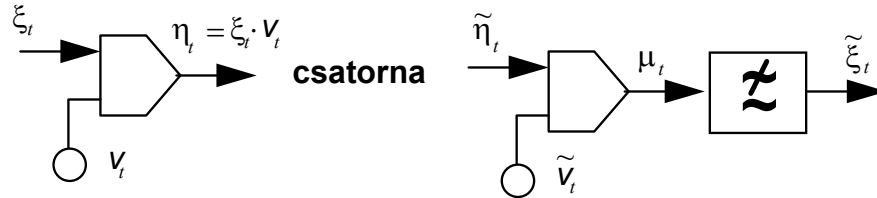
Az eredmény azt mondja, hogy a ξ_t folyamatot előállító $\beta_\xi(\omega)$ növekményei az $\omega+\Omega$ és az $\omega-\Omega$ frekvenciájú komponenseket súlyozzák, tehát a moduláló jel az Ω frekvenciájú vivővel történő szorzás hatására frekvenciában áthelyeződik, eltolódik, amint azt a következő ábra is szemlélteti:



A továbbiakban áttekintjük a kétoldalsávós-, egyoldalsávós- és a csonkaoldalsávós AM jelek előállítását és demodulálását.

AM-DSB-SC

A címben rövidített Amplitude Modulation-Double Side Band-Supressed Carrier, azaz a kétoldalsávós elnyomottvivőjű AM modulációs szabálya egyszerűen $\xi_t \cdot v_t$. A modulált jel előállítását és demodulálását a következő ábra szemlélteti:



Az η_t modulált jel a csatornán keresztül eljut az információ felfogójához. Az ideális csatornán, amely mentes a zajtól és a (lineáris és nemlineáris) torzítástól, a modulált jel véges ideig terjed, tehát a demodulálás végrehajtásánál, amelyet az ábra szerint ismét egy szorzással tehetünk meg, tekintettel kell lenni a fázisviszonyokra. Amennyiben a modulált jel késleltetése következtében a demoduláló szorzóba érkező $\tilde{\eta}_t$ jel úgy írható le, mint egy $\tilde{\Phi}$ fázisú vivővel rendelkező jel, akkor \tilde{v}_t -nek is ugyanilyen fázisúnak kell lenni:

$$\mu_t = \tilde{\eta}_t \cdot \tilde{v}_t = \xi_t \cdot \tilde{v}_t \cdot \tilde{v}_t = \xi_t \cdot \tilde{v}_t^2 = 2\xi_t (1 + \cos(2\Omega t + 2\tilde{\Phi}))$$

ha a demoduláló vivő amplitúdóját is 2-re választjuk. A kapott eredmény első tagja a moduláló jel kétszeresét, a második tagja pedig a 2Ω frekvenciájú szorzat-terméket képviseli, amit az ábrán feltüntetett aluláteresztő szűrő távolít el a kimeneten megjelenő demodulált jeltől.

A fázishelyes demoduláló vivő előállításának a leggyakoribb módja egy kísértékű, ú.n. pilotvivő hozzáadása a modulált jelhez, amely a jelen vizsgálat szempontjából elhanyagolható, de alkalmas szűréssel és erősítéssel a szorzáshoz szükséges szintre hozható.

AM-SSB(-SC)

Az előző oldalon szereplő $\xi_t \cdot v_t$ szorzat, mint az AM-DSB-SC jel spektrális előállítása azt mutatja, hogy a spektrális összetevők az Ω körüli $\pm B$ sávban helyezkednek el, pontosabban az Ω vivőfrekvencia alatti spektrális összetevők a $\beta_\xi(\omega)$ negatív frekvencián lévő

növekményeiből származnak. Az (1.28) összefüggéssel leírt $\beta_\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_t \frac{1 - e^{-j\omega t}}{j t} dt$ -ről

viszont könnyű kimutatni a következőt:

$$\beta_\xi(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_t \frac{1 - e^{j\omega t}}{j t} dt; \quad \overline{\beta_\xi(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_t \frac{1 - e^{-j\omega t}}{-j t} dt; \quad \beta_\xi(-\omega) = -\overline{\beta_\xi(\omega)}$$

azaz a negatív és a pozitív frekvencián vett komponensek szigorúan összefüggőek. Ezek szerint a kétoldalsávós AM jelben az egyik oldalsáv felesleges, mert csak mint egy tükörkép hordozza ugyanazt az információt, mint amit a másik oldalsáv. Érdemes tehát az egyik oldalsávot eltávolítani, mert így a szükséges átviteli sáv szélesség a DSB-hez szükséges érték felére csökken, azaz megegyező lesz a moduláló jel sáv szélességével.

Az egyik oldalsáv eltávolítása történhet szűrővel, vagy egy sajátos "kiejtési" módszerrel, amit az alábbiakban mutatunk be. Legyen a modulált jel a következő:

$$\eta_t = \frac{1}{2} \left[\xi_t \cdot \mathbf{v}_t \pm (\mathcal{H} \xi)_t \cdot (\mathcal{H} \mathbf{v})_t \right] \quad (6.1)$$

ahol $(\mathcal{H} \bullet)_t$ egy speciális lineáris invariáns transzformáció, amit Hilbert transzformációnak hívnak, és a következő összefüggéssel definiáljuk:

$$(\mathcal{H} \zeta)_t = \int_{-\infty}^{\infty} (-j \operatorname{sgn} \omega) \cdot e^{j\omega t} d\beta_\zeta(\omega)$$

A moduláló jel legyen nulla-frekvencia mentes, legyen egy b alsó sávhatára, így spektrális előállítás a következő lesz:

$$\xi_t = \int_{-B}^{-b} e^{j\omega t} d\beta_\xi(\omega) + \int_b^B e^{j\omega t} d\beta_\xi(\omega)$$

Helyettesítsünk be a (6.1) összefüggésbe a + esetre, akkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \eta_t = & \frac{1}{2} \left(\int_{-B}^{-b} e^{j\omega t} d\beta_\xi(\omega) + \int_b^B e^{j\omega t} d\beta_\xi(\omega) \right) \cdot (e^{j\Omega t} e^{j\Phi} + e^{-j\Omega t} e^{-j\Phi}) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\int_{-B}^{-b} j \cdot e^{j\omega t} d\beta_\xi(\omega) + \int_b^B -j \cdot e^{j\omega t} d\beta_\xi(\omega) \right) \cdot (-j e^{j\Omega t} e^{j\Phi} + j e^{-j\Omega t} e^{-j\Phi}) \end{aligned}$$

ahol a megfelelő frekvenciakomponenseken "végrehajtottuk" a Hilbert transzformációt. Végezzük el a szorzást, a második tagban vegyük figyelembe, hogy $-jj=1$ és $jj=-1$, így:

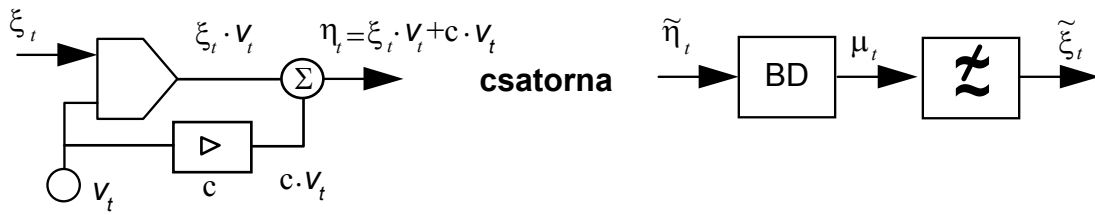
$$\begin{aligned} \eta_t = & \frac{1}{2} \left(\int_{-B}^{-b} e^{j(\omega+\Omega)t} e^{j\Phi} d\beta_\xi(\omega) + \int_b^B e^{j(\omega-\Omega)t} e^{-j\Phi} d\beta_\xi(\omega) \right) + \frac{1}{2} \left(\int_{-B}^{-b} e^{j(\omega-\Omega)t} e^{-j\Phi} d\beta_\xi(\omega) + \int_b^B e^{j(\omega+\Omega)t} e^{j\Phi} d\beta_\xi(\omega) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\int_{-B}^{-b} e^{j(\omega+\Omega)t} e^{j\Phi} d\beta_\xi(\omega) + \int_b^B e^{j(\omega-\Omega)t} e^{-j\Phi} d\beta_\xi(\omega) \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{-B}^{-b} e^{j(\omega-\Omega)t} e^{-j\Phi} d\beta_\xi(\omega) + \int_b^B e^{j(\omega+\Omega)t} e^{j\Phi} d\beta_\xi(\omega) \right) = \\ & = \int_{-B}^{-b} e^{j(\omega+\Omega)t} e^{j\Phi} d\beta_\xi(\omega) + \int_b^B e^{j(\omega-\Omega)t} e^{-j\Phi} d\beta_\xi(\omega) \end{aligned}$$

azaz csak az alsó oldalsáv marad meg, a felső oldalsáv kioltódik. A negatív előjel esetén pedig a felső oldalsáv marad meg.

A demodulációt ugyancsak szorzással lehet megvalósítani. Az előző esethez képest újat csak a $(\mathcal{H} \mathbf{v})_t \cdot \mathbf{v}_t$ jelent, ami csak 2Ω frekvencián ad újabb összetevőket.

AM(-DSB)

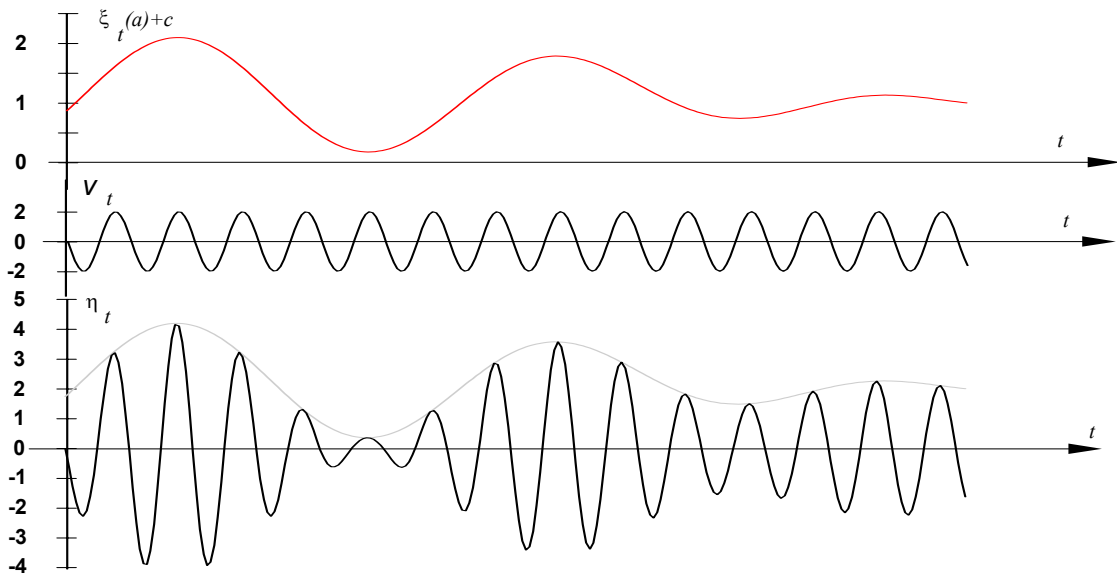
A szinuszos vivő lineáris modulációjának harmadik fajtáját szokták röviden AM-ként említeni. Ez tulajdonképpen a klasszikus amplitúdómoduláció, vagy pontosabban burkolómoduláció. A szorzóáramkörrel történő előállításánál a "hiányzó" vivőt pótolni kell, amit például a következő ábrán látható módon tehetünk meg. Az ábra egyben feltünteti a kétoldalsávú AM jel demodulálására alkalmas BD jelű burkolódetektort is.



A modulált jelet, a hozzáadott vivővel az alábbi módon írhatjuk le:

$$\eta_t = \xi_t \cdot v_t + c \cdot v_t = (c + \xi_t) \cdot v_t = (c + \xi_t) \cdot (e^{j\Omega t} e^{j\Phi} + e^{-j\Omega t} e^{-j\Phi})$$

Mi lehet ennek a burkolója? Ha szemügyre vesszük ezt a jelet, akkor felfedezni vélünk valamit, amely mintegy beburkolja a változó amplitúdójú vivőt:



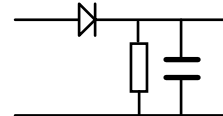
Hogyan ragadhatjuk meg matematikailag ezt a kissé homályos dolgot? Definiáljuk egy gyengén stacionárius jel ún. előburkolóját:

$$\gamma_\zeta(t) = 2 \int_0^\infty e^{j\omega t} d\beta_\zeta(\omega)$$

Ez egy komplex folyamat, amelynek abszolút értékét nevezzük a jel burkolójának. Ellenőrizzük, hogy mit ad ez eredményül a fenti η_t esetén!

$$|\gamma_\eta(t)| = \left| 2 \int_0^\infty e^{j\omega t} d\beta_\eta(\omega) \right| = |2(c + \xi_t) \cdot e^{j\Omega t} e^{j\Phi}| = |2(c + \xi_t)| \quad \text{ha } 2(c + \xi_t) \geq 0$$

Tehát ha olyan nagy c értéket adunk ξ_t -hez, hogy az összeg mindig pozitív legyen, akkor a fent definiált előburkoló abszolútértéke visszaadja a moduláló jelet. Megvalósítását tekintve, egy igen egyszerű áramkör, az ún. burkolódemodulátor jelenti a feladat megoldását:



AM-VSB

Az egyszerű szorzással előállítható DSB-SC változathoz képest láttuk az SSB jelet előállító módszert, ami kissé összetettebb, de megtakarítja a használt sáv szélesség felét.

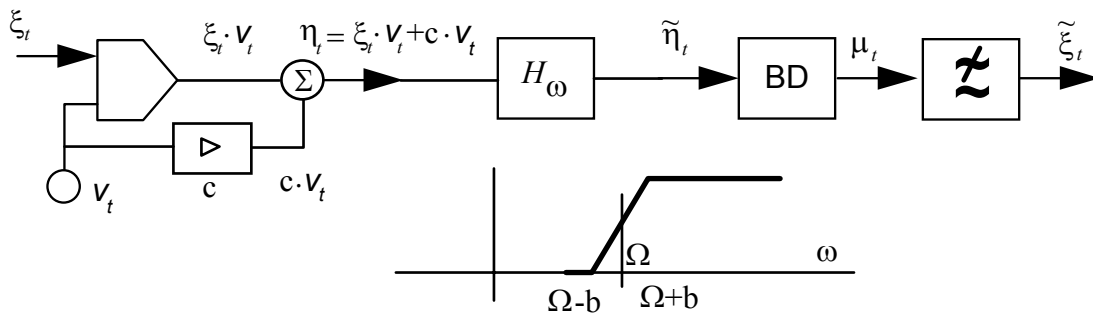
Mindkét változatban a demoduláció csak szorzással volt elvégezhető, amelyhez azonban szükség van a fázishelyes vivőre. Ezen a problémán segített az egyszerű DSB módszer, amely ugyan pazarol sáv szélességben, sőt még teljesítményben is, mert a vivőhullám nagy hányadát képviseli az összteljesítménynek, de ezek fejében nagyon egyszerű demodulálási lehetőséget teremt. Két kérdés merül fel ezzel összefüggésben:

- Nem lehetne-e megőrizni ezt az egyszerű demodulálást és mégis csökkenteni a sáv szélességet?
- Mit lehet tenni akkor, ha a moduláló jelnek van nulla-frekvenciás komponense, de mégis szeretnénk csökkenteni a modulált jel sáv szélességét?

A két kérdésre közös választ ad az ún. csonkaoldalsáv AM, vagy AM-VSB, ahol ez utóbbi a Vestigial Side Band rövidítése.

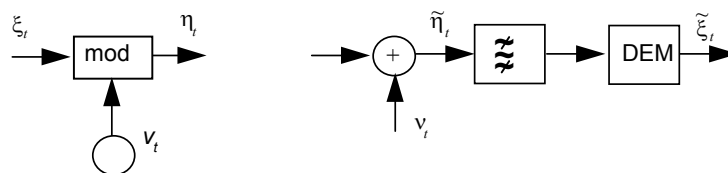
A csonkaoldalsáv AM jel előállításánál a szorzás után egyrészt gondoskodunk a burkoló pozitív értékének fenntartásáról egy megfelelő mennyiségű vivő hozzáadásával, másrészt lineáris invariáns transzformációval eltávolítjuk az egyik oldalsáv jelentős részét.

A csonkaoldalsáv módszer esetén használhatunk burkolódemodulátort is, ha toleráljuk a demodulált jel bizonyos mértékű nemlineáris torzítását. A VSB jel előállításának és demodulálásának módját, valamint a csatorna szükséges átviteli karakterisztikáját mutatja a következő ábra:



A modulált jelhez adódó zaj hatása a demodulált jelre

A zajos csatornán továbbított modulált jel esetén a zajnak a demodulált jelre való hatását a következő modell alapján vizsgáljuk:



Itt az η_t -vel jelölt modulált jelhez konstans spektrális sűrűségű, normális eloszlású v_t zaj adódik. Ezzel modellezzük a demodulálást végző vevő termikus zaját. A demoduláció előtt a zajos modulált jelet átvezetjük egy ideális sáváteresztő szűrőn, amely minden, a jelen kívüli sávba eső zajkomponenst eltávolít, miközben a modulált jelet torzítatlanul átengedi.

A vizsgált modelltől feltételezzük, hogy zajmentes esetben az eredeti moduláló jelet adja vissza, tehát ha a zaj, $v_t \equiv 0$, akkor $\tilde{\xi}_t = \xi_t$. A vizsgált hatás jellemzésére bevezetjük a zaj-jel viszonyt, mint a kimeneti zaj és jel négyzetes várhatóérkeinek viszonyát:

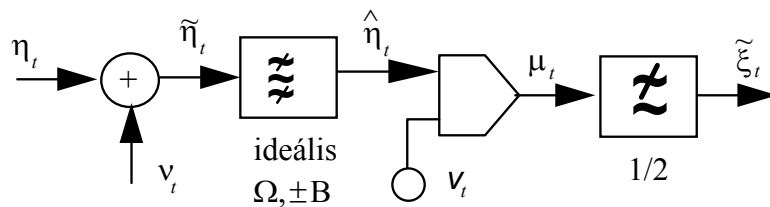
$$r := \frac{\mathbf{M}\tilde{v}_0^2}{\mathbf{M}\tilde{\xi}_0^2}$$

Azt várjuk, hogy a zaj-jel viszony függeni fog:

- a modulált jelhez adódó zajtól, amit $\mathbf{M}v_0^2$ jellemez,
- a modulált jeltől, amit $\mathbf{M}\eta_0^2$ jellemez,
- a modulációs szabálytól, ami AM-DSB-SC, SSB, AM-DSB vagy VSB lehet, és
- demodulálási módszertől, ami szorzó- és burkolódemoduláció lehet.

Az AM-DSB-SC zaj-jel viszonya

Az alábbiakban bemutatjuk a vizsgálatot az AM-DSB-SC példáján, természetesen szorzódemoduláció esetére. Ebben az esetben a vizsgált modell a következő lesz:



Az η_t modulált jelhez adódó v_t zaj hatására létrejövő $\tilde{\eta}_t$ zajos jelet az $(\Omega \pm B)$ sávra határolva kapjuk az $\hat{\eta}_t$ folyamatot, amely csak azt a zajt tartalmazza, ami a modulált jel sávjába esik. A $v_t = 2 \cos(\Omega t + \Phi)$ vivővel való szorzás után a 2Ω frekvencián keletkező szorzattermékeket az aluláteresztő szűrő távolítja el a μ_t jelből, és így végül a keresett $\tilde{\xi}_t = \xi_t + \tilde{v}_t$ -ot kapjuk.

Határozzuk meg először a zaj-jel viszony számlálóját, azaz $\mathbf{M}\tilde{v}_0^2$ -et! A szorzót megelődő sáváteresztő szűrő az $\tilde{\eta}_t$ folyamatból az $\hat{\eta}_t$ folyamatot állítja elő, amelyet azután a szorzó frekvenciában áthelyez.

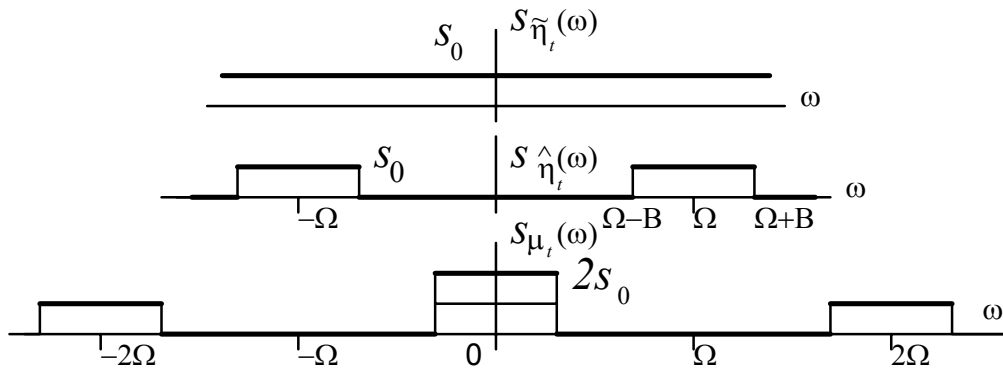
A szorzó kimenetén megjelenő spektrális sűrűségfüggvényt, ha most a jel, azaz $\eta_t \equiv 0$ az alábbi módon határozhatjuk meg:

$$s_\mu(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\mu(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2} \cos(\Omega\tau) R_v(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j\Omega\tau} + e^{-j\Omega\tau}) R_v(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau$$

ahol a spektrális sűrűség- és a korreláció-függvény közötti kapcsolatot felhasználva felírtuk a szorzat spektrális sűrűségét. Az összefüggést rendezve, valamint ismét kihasználva azt, hogy a spektrális sűrűség- és a korreláció-függvény Fourier transzformált pár, kapjuk az eredményt:

$$s_\mu(\omega) = \frac{A^2}{4} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_v(\tau) \cdot e^{-j(\omega-\Omega)\tau} d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_v(\tau) \cdot e^{-j(\omega+\Omega)\tau} d\tau \right) = \frac{A^2}{4} [s_v(\omega - \Omega) + s_v(\omega + \Omega)]$$

A spektrális sűrűségeket vázoltuk a következő ábrán:



Az ábrán tekintetbe vettük, hogy a demodulálást végző vivő amplitúdója 2. Az ábrán látható spektrális sűrűségekkel igen egyszerűen meghatározhatjuk a kimeneten lévő zaj négyzetes várhatóértékét:

$$\mathbf{M}\tilde{v}_0^2 = \frac{1}{4} \int_{-B}^B 2s_0 d\omega = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2 \cdot Bs_0 = Bs_0$$

ahol az 1/4-es tényező a szorzó utáni aluláteresztő átviteli karakterisztikájának 1/2-es értékéből származik, amire a 2-es amplitúdójú vivő miatt van szükség a moduláló jel szintheses visszaállításához.

Végül az utolsó lépés a nevezőben szereplő $\mathbf{M}\tilde{\xi}_0^2$ kiszámítása a modulált jel négyzetes várhatóértékével, azaz $\mathbf{M}\eta_0^2$ -el, amit jelöljünk W -vel! Ha a v_t zaj nulla, akkor:

$$W := \mathbf{M}\eta_0^2 = \mathbf{M}(\xi_0 \cdot v_0)^2 = \mathbf{M}\xi_0^2 \cdot \mathbf{M}v_0^2 = \mathbf{M}\xi_0^2 \cdot \mathbf{M}(2 \cos \Phi)^2 = 2 \cdot \mathbf{M}\xi_0^2 = 2 \cdot \mathbf{M}\tilde{\xi}_0^2$$

Ezzel a zaj-jel viszonyra a következőt kapjuk:

$$r := \frac{\mathbf{M}\tilde{v}_0^2}{\mathbf{M}\tilde{\xi}_0^2} = \frac{2Bs_0}{W}$$

amiről látjuk, hogy a moduláló jel sávjába eső zajteljesítménynek és a modulált jel teljesítményének a hányadosa. Ezt az értéket szokták használni referenciaként a különböző modulációs eljárások zajviszonyainak összehasonlítására is.

Érdekes lehet annak a kérdésnek a vizsgálata is, hogy miként változik a zaj-jel viszony a demodulálás során. Ennek érdekében definiálni lehet az ú.n. vivőhullámú zaj-jel viszonyt:

$$r_v := \frac{\mathbf{M}\hat{v}_0^2}{\mathbf{M}\hat{\eta}_0^2}$$

ami a vizsgált DSB-SC eljárás esetén:

$$r_v := \frac{\mathbf{M}\hat{v}_0^2}{\mathbf{M}\hat{\eta}_0^2} = \frac{4Bs_0}{W} = 2r$$

Ez azt mutatja, hogy a demodulátor bemenetén a zaj-jel viszony nagyobb, mint a kimenetén lévő, tehát ennél az eljárásnál a demodulálás során javul a "zajhelyzet".

Az SSB zaj-jel viszonya

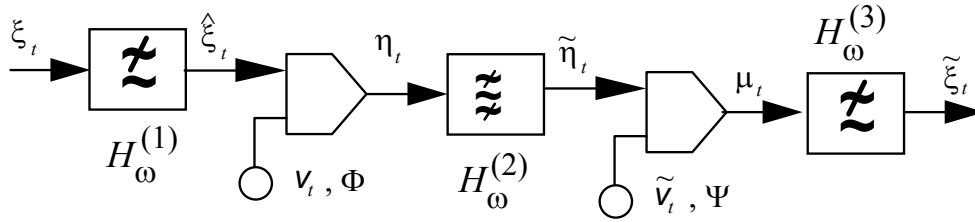
Teljesen hasonló módon igen egyszerű kiszámítani az SSB eljárás esetén a kimeneti és a vivőhullámú zaj-jel viszony értékeit. Az eredmény a következő lesz:

$$r := \frac{\mathbf{M}\hat{v}_0^2}{\mathbf{M}\hat{\xi}_0^2} = \frac{2Bs_0}{W}; \quad r_v := \frac{\mathbf{M}\hat{v}_0^2}{\mathbf{M}\hat{\eta}_0^2} = \frac{2Bs_0}{W} = r$$

azaz a kimeneti zaj-jel viszony és a vivőhullámú zaj-jel viszony megegyezik, és megegyezik egyébként a referencia zaj-jel viszonyal is, amire majd különösen a szögmoduláció vizsgálatokor fogunk hivatkozni.

A modulált jelet érő lineáris torzítások hatása a demodulált jelre

A moduláló jel átvitele során három lényegében különböző ponton érheti lineáris torzítás a jelet: (i) a moduláció előtt, (ii) magát a modulált jelet, és (iii) a demoduláció után. Az együttes hatás vizsgálatára a következő ábrán látható modellt vezetjük be:



Az előbb említett, és az ábrán feltüntetett lineáris invariáns transzformációkat $H_\omega^{(1)}$, $H_\omega^{(2)}$ és $H_\omega^{(3)}$ jelöli. A modulációhoz használt vivő $v_t = 2\cos(\Omega t + \Phi)$, míg a demoduláció a $\tilde{v}_t = \cos(\Omega t + \Psi)$ vivővel való szorzással történik. Az egységnyi amplitúdó közvetlenül szintheses demodulált jelet eredményez.

A gyengén stacionárius ξ_t spektrális előállításának a modellen való nyomonkövetésével határozzuk meg a lineáris transzformációk hatását a demodulált jelre. Ezen hatások közül kettő, nevezetesen a $H_\omega^{(1)}$ és a $H_\omega^{(3)}$ hatása triviális, az igazi problémát majd a $H_\omega^{(2)}$ fogja jelenteni, mert az a modulált jelre hat:

$$\xi_t = \int_{-B}^B e^{j\omega t} d\beta_\xi(\omega); \quad \hat{\xi}_t = \int_{-B}^B H_\omega^{(1)} e^{j\omega t} d\beta_\xi(\omega)$$

A szorzómoduláció hatását már vizsgáltuk, most csak röviden megismételjük az eredményt:

$$\eta_t = \hat{\xi}_t \cdot v_t = \int_{-B}^B H_\omega^{(1)} e^{j(\omega+\Omega)t} e^{j\Phi} d\beta_\xi(\omega) + \int_{-B}^B H_\omega^{(1)} e^{j(\omega-\Omega)t} e^{-j\Phi} d\beta_\xi(\omega)$$

Ezután következik a $H_\omega^{(2)}$, aminél arra kell ügyelni, hogy $\beta_\xi(\omega)$ növekményei most az $\omega + \Omega$, illetve az $\omega - \Omega$ frekvenciájú komponenseket súlyozzák a két integrálban, tehát $H_{\omega+\Omega}^{(2)}$ és $H_{\omega-\Omega}^{(2)}$ argumentumokkal kell a transzformációt alkalmazni

$$\tilde{\eta}_t = \int_{-B}^B H_\omega^{(1)} H_{\omega+\Omega}^{(2)} e^{j(\omega+\Omega)t} e^{j\Phi} d\beta_\xi(\omega) + \int_{-B}^B H_\omega^{(1)} H_{\omega-\Omega}^{(2)} e^{j(\omega-\Omega)t} e^{-j\Phi} d\beta_\xi(\omega)$$

A demoduláló szorzást a $\tilde{v}_t = \frac{1}{2}(e^{j(\Omega t + \Psi)} + e^{-j(\Omega t + \Psi)})$ vivővel végezzük, ahol a szükségestől eltérő fázis hatását is rögtön vizsgálhatjuk:

$$\mu_t = \frac{1}{2} \left(\int_{-B}^B H_{\omega}^{(1)} H_{\omega+\Omega}^{(2)} e^{j\omega t} e^{j(\Phi-\Psi)} d\beta_{\xi}(\omega) + \int_{-B}^B H_{\omega}^{(1)} H_{\omega-\Omega}^{(2)} e^{j\omega t} e^{-j(\Phi-\Psi)} d\beta_{\xi}(\omega) \right) +$$

+ a 2Ω frekvencia körüli komponensek

A szorzót követő aluláteresztő jellegű $H_{\omega}^{(3)}$ transzformáció hatása igen egyszerűen a következő:

$$\tilde{\xi}_t = \frac{1}{2} \left(\int_{-B}^B H_{\omega}^{(1)} H_{\omega+\Omega}^{(2)} H_{\omega}^{(3)} e^{j\omega t} e^{j(\Phi-\Psi)} d\beta_{\xi}(\omega) + \int_{-B}^B H_{\omega}^{(1)} H_{\omega-\Omega}^{(2)} H_{\omega}^{(3)} e^{j\omega t} e^{-j(\Phi-\Psi)} d\beta_{\xi}(\omega) \right)$$

A két integrál alig különbözik, de ami a lényeg, hogy a két integrál a kimenő $\tilde{\xi}_t$ folyamatnak egy-egy felét állítja elő. Lényegében $\beta_{\xi}(\omega)$ növekményeinek más a szorzója az egyikben, mint a másikban. A súlyozó tényezők összevonását elvégezhetjük az összegzés előtt, és így a következőt kapjuk:

$$\tilde{\xi}_t = \int_{-B}^B H_{\omega}^{(1)} \frac{H_{\Omega+\omega}^{(2)} e^{j(\Phi-\Psi)} + \overline{H_{\Omega-\omega}^{(2)}} e^{-j(\Phi-\Psi)}}{2} H_{\omega}^{(3)} e^{j\omega t} d\beta_{\xi}(\omega)$$

ahol a második tagban megcseréltük az argumentum előjelét, aminek következtében az átviteli karakterisztika konjugáltja jelent meg. Teljesen logikus az integrálban szereplő szorzótényezők közül a középsőt, a törtet kiemelni, és azt mondani, hogy ez az alapsávi ekvivalense a modulált jelre ható lineáris transzformációnak, vagy lehet a teljes átviteli út ekvivalensét is megadni, amint azt itt tettük:

$$H_{\omega}^{(e)} = H_{\omega}^{(1)} \frac{H_{\Omega+\omega}^{(2)} e^{j(\Phi-\Psi)} + \overline{H_{\Omega-\omega}^{(2)}} e^{-j(\Phi-\Psi)}}{2} H_{\omega}^{(3)}$$

Hasonló módon lehet más lineáris modulációs módszerekre is ekvivalens átviteli karakterisztikát meghatározni.

SZINUSZOS VIVŐ SZÖGMODULÁCIÓJA

A $v_t = A \cdot \cos(\Omega t + \Phi)$ vivőhullámnak eddig csak az A szorzótényezőjét módosítottuk a moduláló jellel, és bántatlanul hagytuk a koszinusz argumentumát. Miért ne használhatnánk fel ez utóbbi módosítását az információ továbbítására? Természetesen ennek semmi akadálya, csak lényeges, hogy olyan modulációs szabályokat rögzítsünk le, amelyek megvalósítása nem vet fel rendkívüli nehézségeket, valamint az inverz műveletnek, tehát a demodulációnak a szabálya is elfogadható erőfeszítéssel legyen realizálható. Mindezek megléte esetén már csak az a kérdés, hogy milyen tulajdonságú és teljesítőképességű modulációs eljárást fogunk így létrehozni. Ezt fogjuk a következőkben megvizsgálni.

Modulációs szabály, időfüggvény és spektrum

Jelenleg konstans az amplitúdó, és válasszuk azt az egyszerűség kedvéért egységnyinek. A modulált jelben a moduláció hangsúlyozására használjuk a következő jelölést:

$$\eta_t = \cos \varphi_t, \quad \text{ahol } \varphi_t := \Omega t + \Phi + \mu_t, \quad \text{és } \Psi_t := \Omega t + \Phi$$

azaz φ_t jelöli a vivő időben változó fázisát, amelynek két elkülönülő része van, nevezetesen az egyik a $\Psi_t := \Omega t + \Phi$, ami a "konstans" vivőfrekvenciát és a véletlen kezdőfázist tartalmazza, a másik pedig a μ_t , ami a modulációt jelöli.

Kétféle szögmodulációs szabályt rögzítünk le. Az egyik az lesz, amikor a μ_t arányos a moduláló jellel, a másik pedig, amikor a μ_t deriváltja arányos vele:

$$\mu_t = c \cdot \xi_t, \quad \text{illetve} \quad \mu'_t := \frac{d\mu}{dt} = c' \cdot \xi_t$$

Az első szabályt **fázismodulációnak** nevezzük, és PM-el rövidítjük, a másik neve **frekvenciamoduláció** és a rövidítése FM. Az így lerögzített szabályokkal a PM és az FM jel időfüggvénye a következő lesz:

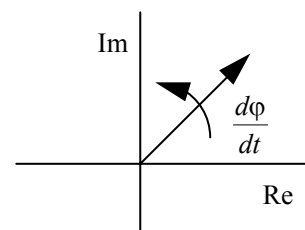
$$\text{PM: } \eta_t = \cos(\Omega t + \Phi + c \cdot \xi_t),$$

$$\text{FM: } \eta_t = \cos\left(\Omega t + \Phi + c' \cdot \int_0^t \xi_s d\vartheta\right)$$

A túloldalon szemléltettük a modulált jelet egy adott moduláló jel esetén. Az ábra világosan mutatja, hogy a konstans amplitúdójú jelek "periódusai" a modulálatlan vivőhöz képest sűrűsödnek és ritkulnak, valamint a PM és az FM jelek nagyon hasonlítanak, csupán időben elcsúszva jelennek meg bennük a sűrűbb és ritkább helyek.

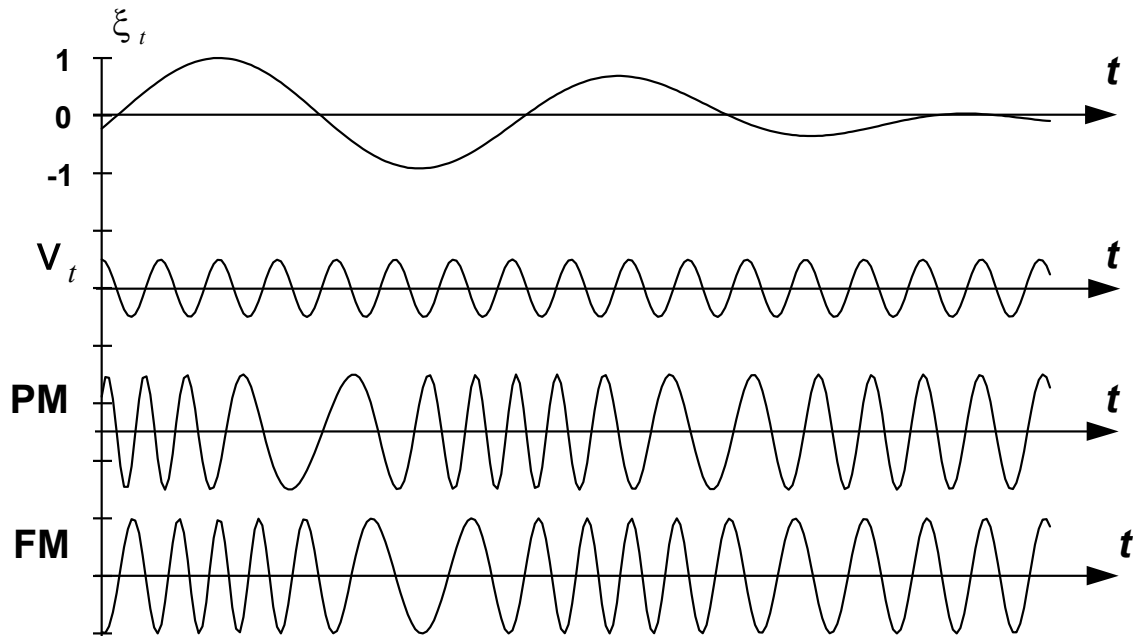
A további szemléltetéshez a forgó vektort, vagy más néven fázort (azaz az előburkolót) használhatjuk. A szinuszos vivőt ugyanis egyetlen ilyen, konstans Ω szögsebességgel forgó vektor képviselheti, amelynek a forgási síkban lévő valamelyik tengelyre vett vetülete adja az időfüggvényt. A szögmodulált jel esetén csupán annyi lesz a különbség, hogy a forgás szögsebessége változó lesz, és ennek jellemzésére bevezethetünk egy ú.n. pillanatnyi frekvenciát:

$$\hat{\omega}_t := \frac{d\varphi}{dt} = \Omega + \frac{d\mu}{dt}$$



ahol azt látjuk, hogy a forgó vektor szögsebessége a névleges vivőfrekvenciához képest változik, mégpedig PM-nél a moduláló jel deriváltjával, FM-nél magával a moduláló jellel arányosan! Az alábbi ábrán is jól látszik, hogy a modulált jel pillanatnyi frekvenciája egy maximum és egy minimum érték között változik. A pillanatnyi frekvenciának a névleges vivőfrekvenciától való eltérését (pontosabban az eltérés legnagyobb értékét) frekvencialöketnek nevezik.

Egy nagyon hasznos jellemző a fázislöket is, amely hasonlóan a frekvencialökethez, a cos argumentumának a $\Psi_t := \Omega t + \Phi$ -től való legnagyobb eltérését jelenti.



6.1. ábra Fázis- és a frekvenciamodulált jel

A pillanatnyi frekvenciával kapcsolatban fontos megjegyezni, hogy annak minimuma és maximuma közötti frekvenciakülönbség **nem** a modulált jel sávszélessége. A modulált jel spektrumának meghatározása összetett feladat, amelyből itt megmutatunk valamit FM jelre:

$$\eta_t = \cos(\Omega t + \Phi + c' \cdot \int_0^t \xi_{\vartheta} d\vartheta) = \cos(c' \cdot \int_0^t \xi_{\vartheta} d\vartheta) \cdot \cos(\Omega t + \Phi) - \sin(c' \cdot \int_0^t \xi_{\vartheta} d\vartheta) \cdot \sin(\Omega t + \Phi) \quad (6.1)$$

A trigonometrikus átalakítás eredménye felfogható, mint két, egymáshoz képest $\pi/2$ -re lévő vivővel készült AM-DSB-SC jel, azonban ezek modulációja az eredeti ξ_t moduláló jelnek elég bonyolult függvénye.

Zárt alakú eredményt viszonylag egyszerűbben kaphatunk ha moduláló jelként szinuszos mérőjelet választunk. Legyen $\xi_t := a \cdot \cos \omega_m t$, így a modulált jel a következő lesz:

$$\eta_t = \cos(\Omega t + \Phi + c' \cdot \int_0^t a \cdot \cos \omega_m \vartheta d\vartheta) = \cos(\Omega t + \Phi + c' \frac{a}{\omega_m} \sin \omega_m t)$$

ahol jól látható a fázislöket, amire külön jelet vezetünk be: $D_\varphi := c' \frac{a}{\omega_m}$, és ezt használjuk a

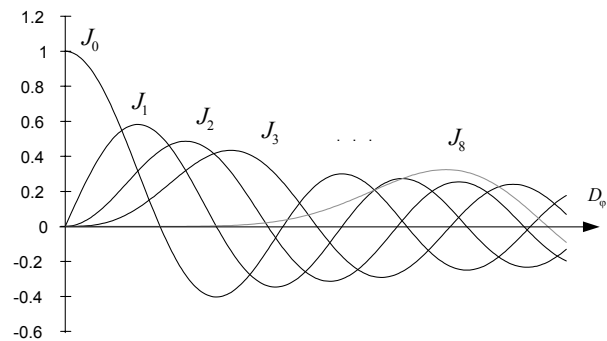
következőkben. A modulált jel ezzel az alábbi:

$$\eta_t = \cos(\Omega t + \Phi + D_\varphi \sin \omega_m t) = \cos(D_\varphi \sin \omega_m t) \cdot \cos(\Omega t + \Phi) - \sin(D_\varphi \sin \omega_m t) \cdot \sin(\Omega t + \Phi)$$

Ebben az egyszerű esetben a két vivőt szorzó függvények periodikusak, és az argumentumukban szinuszos függvényt tartalmazó koszinusz és szinuszos függvények Fourier sorba fejthetők:

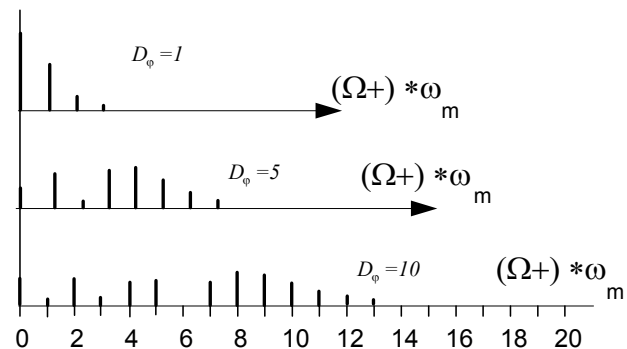
$$\eta_t = \left[J_0(D_\varphi) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(D_\varphi) \cdot \cos 2k\omega_m t \right] \cos(\Omega t + \Phi) - \left[2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(D_\varphi) \cdot \sin(2k-1)\omega_m t \right] \sin(\Omega t + \Phi)$$

A sorokban szereplő együtthatók a különböző rendű, első fajú Bessel függvények a D_φ argumentumnál. A fenti kifejezésből jól látszik, hogy ennek a jelnek a spektruma vonalakat tartalmaz az $\Omega \pm k\omega_m$ frekvenciákon, ahol k $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig megy. A vonalak hossza azonban k egy bizonyos értékéig, ami D_φ -től függ, föl-le változik, majd pedig rohamosan és monoton módon csökkenni kezd. Az alábbi ábrán vázoltunk néhány Bessel függvényt, az argumentum közel 13-as értékéig. Világosan látszik, hogy a rendszám növekedtével csak egyre nagyobb argumentumoknál emelkednek ki a nullából a függvények, majd egyre kisebb csúcsérték elérése után lecsengenek.



6.2. ábra Elsőfajú Bessel függvények

Szemléltetésként vázoltuk a szinuszos jellel modulált FM jel spektrumát néhány különböző fázislöketre. A D_φ -re választott értékek 1, 5 és 10 radián. Az ábra (helytakarékosan) csak a vivőt és a felette lévő oldalsáv-komponenseket ábrázolja. Az ábrából valami olyasmi látszik, hogy az észrevehető spektrumvonalak száma közel arányos a fázislöket értékével. Ezt a megfigyelést, tehát, hogy az FM jel számottevő spektrális összetevői a fázislökettel arányos frekvenciasávot foglalnak el, valóságos moduláló jelekkel végzett mérések is igazolják.



6.3. ábra FM jel spektrumok

Ennek értelmében bevezethető egy (gyakorlati) vivőfrekvenciás sáv szélesség, amelyben a számottevő spektrális komponensek találhatóak, és amit itt $2B_v$ -vel jelölünk. Egy általánosan használt ökölszabály a gyakorlati sáv szélességre a következő:

$$2B_v = 2(D_\omega + B)$$

ahol a D_ω a frekvencialöket, és B pedig a moduláló jel sáv szélessége. Az összefüggés jól rámutat arra a tényre, hogy igen kis frekvencialöketet okozó moduláció esetén a sáv szélesség nem nullához, hanem a moduláló jel sáv szélességének kétszereséhez tart.

Szögmodulált jel előállítása és demodulálása

Ismét csak az FM jellel foglalkozunk. Egyrészt azt mondhatjuk, hogy frekvenciamodulált jelet előállítani pusztán áramköri kérdés, mert kell csinálni egy olyan oszcillátort, amelynek a frekvenciáját feszültséggel arányosan lehet változtatni. Másrészt azonban, annak ellenére, hogy az előző feladatra az áramkörfejlesztők kiváló megoldásokat hoztak létre, amit Voltage Controlled Oscillator-nak, vagy röviden VCO-nak neveznek, rendszertechnikai feladat is felvetődik az előállított FM jel névleges frekvenciájának stabilitásával kapcsolatban. Ugyanis két egymásnak homlokegyenest ellentmondó követelményt jelent egy oszcillátor frekvenciáját könnyen változtathatóvá tenni, és közben a modulálatlan (a névleges) értékét nagy pontossággal változatlanul tartani. Márpedig ez utóbbira is szükség van, mert a modulációs rendszerekre általánosan igaz, hogy a vevőoldalon fel kell tudni tételezni valamilyen előzetes ismeretet a venni (demodulálni) kívánt jel frekvenciájáról.

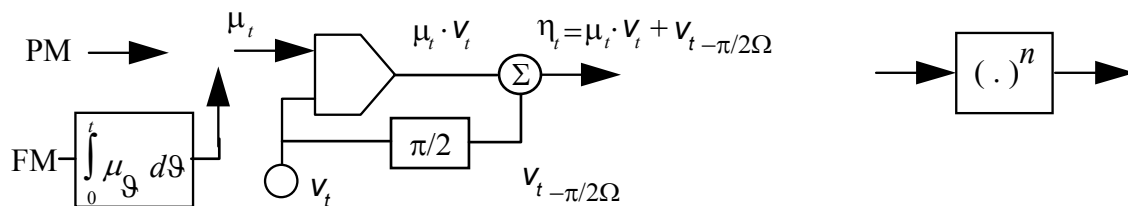
Az ellentmondó követelményekre a megoldást az FM jel ún. indirekt előállítása jelenti. Az ötlet a modulált jel (6.1) kifejezéséből vetődik fel, mivel ott két szorzatot látunk konstans frekvenciájú vivőkkel. Persze a kifejezés közvetlen megvalósítása komoly gondot okozna, hiszen a moduláló jel trigonometrikus függvények argumentumában szerepel. Nem lehetne valamilyen közelítést alkalmazni? A pozitív választ a következőben adjuk meg. Fejtsük sorba a modulált jel exponenciális függvénnyel leírt kifejezését:

$$\eta_t = \cos(\Psi_t + \mu_t) = \operatorname{Re}(e^{j\Psi_t} \cdot e^{j\mu_t}) = \operatorname{Re}\left[e^{j\Psi_t} \left(1 + j\mu_t - \frac{\mu_t^2}{2} - j\frac{\mu_t^3}{3!} + \dots\right)\right]$$

Ha biztosítjuk, hogy $\mu_t \ll 1$ legyen (ami a fázislököt 1 radiánál jóval kisebb értékét jelenti), és így a sornak csak az első két tagját tekintjük, akkor:

$$\eta_t \cong \operatorname{Re}(e^{j\Psi_t} + j\mu_t e^{j\Psi_t}) = \cos\Psi_t - \mu_t \sin\Psi_t = \cos(\Omega t + \Phi) - \mu_t \sin(\Omega t + \Phi)$$

A kapott összefüggés már tényleg egy AM-DSB-SC jelnek és egy modulálatlan vivőnek a megfelelő fázisú összege, amelynek realizálását az alábbi tömbvázlat szemlélteti, ahol feltüntettük a PM és az FM jel előállításához szükséges különbséget, amit egy integrátor képvisel, valamint a fázislököt növelésére szolgáló frekvenciasokszorozót is, amit a hatványozóval modelleztünk:



6.4. ábra A szögmodulált jel indirekt előállítása

A szögmodulált jel demodulálására az alábbi eljárás jelenti az alapot az egyik módszer számára. Ha deriváljuk a szögmodulált jelet, akkor a következőt kapjuk:

$$\eta_t = \cos(\Psi_t + \mu_t); \quad \eta'_t = -(\Psi_t + \mu_t)' \cdot \sin(\Psi_t + \mu_t) = -(\Omega + \mu'_t) \cdot \sin(\Psi_t + \mu_t)$$

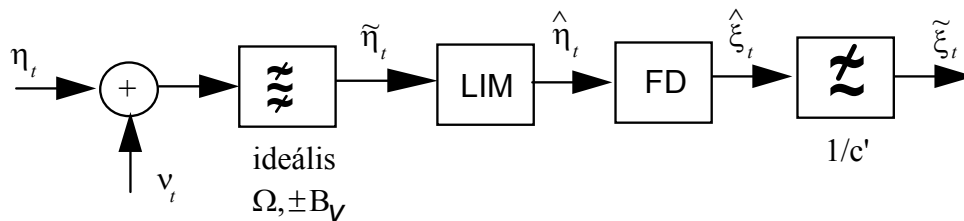
Az eredmény világosan mutatja, hogy a (változó frekvenciájú) vivő szorzójaként megjelent a moduláló jel (FM esetén), vagy annak deriváltja (PM esetén). Ebből a jelből valamilyen AM demodulációval visszanyerhető a moduláló jel.

Egy másik alapvető módszer a fázis-zárt hurok (PLL) alkalmazása, amelynél visszacsatolással egy oszcillátor frekvenciáját hozzákötjük a modulált jel frekvenciájához. Mivel ehhez a PLL-ben lévő VCO vezérlőfeszültségének meg kell egyeznie a moduláló jellel (FM esetén), ezért ezt a jelet, mint a demodulált jelet tekinthetjük.

A modulált jelhez adódó zaj hatása a demodulált jelre

A vizsgált hatás jellemzését, ugyanúgy mint az AM-nél a zaj-jel viszonytal végezzük, és ismét feltételezzük, hogy amennyiben a zaj nulla, akkor a demodulált jel megegyezik a moduláló jellel.

A vizsgálatnál alkalmazott modell csak a demodulátorban különbözik az AM esetén végzett vizsgálatban használttól. Pontosabban, különválasztottuk az FD jelű frekvenciademodulátort és az azt megelőző LIM jelű limitert (határolót), ami a szögmodulált jelek feldolgozásának nélkülözhetetlen eleme. Ugyanis a szögmodulált jel amplitúdóváltozása nem hordoz hasznos információt, jellegzetesen az additív zaj következménye a változás, tehát a demoduláció során meg kell tőle szabadulni, amit a külön kiemelt limiter hangsúlyoz.



A limiter az $|\gamma_{\hat{\eta}}(t)| \equiv \text{állandó}$, és az $\text{arc } \gamma_{\hat{\eta}}(t) \equiv \text{arc } \gamma_{\tilde{\eta}}(t)$ szabályt valósítja meg; az FD jelű frekvenciademodulátor transzformációs szabálya pedig a következő:

$$\hat{\xi}_t = \left(\text{arc } \gamma_{\hat{\eta}}(t) \right)'$$

Mivel a modulált jelhez adódó zaj által okozott amplitúdóváltozásokat kiküszöböltük, és a frekvenciademodulátor a modulált jelet leíró komplex előburkolónak csak a fázisára reagál, azt kell megvizsgálnunk, hogy miként változtatja meg a modulált jel fázisát az additív zaj.

Jelöljük az additív zaj hatására a modulált jelben létrejövő fáziseltérést az alábbi módon:

$$\varepsilon_t := \text{arc } \gamma_{\hat{\eta}}(t) - \text{arc } \gamma_{\eta}(t)$$

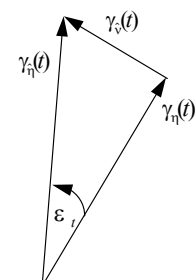
Nevezzük ezt a hibát fázis-zajnak! A továbbiakban először ezt határozzuk meg. Ehhez legyen a modulált jel A amplitúdójú és W négyzetes várhatóértékű, amelyek között nyilván az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\eta_t = A \cdot \cos(\Psi_t + \mu_t); \quad W = A^2/2, \quad \text{illetve} \quad A = \sqrt{2W}$$

Mivel $2B_V$ -re sávhatároltunk, a zajmentes modulált jel pozitív frekvenciájú összetevői, és ezzel az előburkolója egyszerűen írható:

$$\gamma_{\eta}(t) \cong A \cdot e^{j\Psi_t} \cdot e^{j\mu_t}$$

Hogyan fejezhetjük ki a zajos jel előburkolóját? Tekintettel az additív, független zajra, az nyilvánvalóan a zajmentes modulált jel és a zaj előburkolóinak összege lesz. A szemléletesség kedvéért ábrázoljuk



ezeket az előburkolókat, amelyek az előző kifejezésből is jól láthatóan időben változó komplex vektorok (fázorok), és így bármely időpontban egy pillanatfelvételt készíthetünk róluk.

Célszerű az előző három vektort $\gamma_{\eta}(t)$ -hez viszonyítani, mint a zajmentes modulált jelhez. Ezzel a fázis-zajra a következő összefüggést nyerhetjük:

$$\varepsilon_t = \arg \gamma_{\hat{\eta}}(t) - \arg \gamma_{\eta}(t) = \arg \frac{\gamma_{\hat{\eta}}(t)}{\gamma_{\eta}(t)} = \arg \frac{\gamma_{\eta}(t) + \gamma_{\hat{v}}(t)}{\gamma_{\eta}(t)} = \arg \left(1 + \frac{\gamma_{\hat{v}}(t)}{\gamma_{\eta}(t)} \right)$$

A zárójelben egy komplex mennyiség van, amelynek a szögét jelenti a fázis-zaj. Egy komplex mennyiség nyilván felírható $x \cdot e^{jy}$ alakban, ezért a fázis-zajra igaz a következő:

$$\varepsilon_t = \operatorname{Im} \ln \left(1 + \frac{\gamma_{\hat{v}}(t)}{\gamma_{\eta}(t)} \right) \cong \operatorname{Im} \frac{\gamma_{\hat{v}}(t)}{\gamma_{\eta}(t)}$$

ahol a közelítés akkor jó, ha a tört az 1-hez képest kicsi. Innen kezdve alkalmazzuk ezt a feltételezést és közelítést, ami egyébként szavakban azt jelenti, hogy a zaj kicsi a jelhez képest. Azt is szokták mondani, hogy a vizsgálatot **gyenge, független, szuperponált zaj** esetére végezzük.

A fázis-zajjal való eddigi ismerkedés alapvető célja az volt, hogy meghatározzuk a demodulátor kimenetén megjelenő zaj négyzetes várhatóértékét. Ezt a legegyszerűbben a spektrális sűrűségfüggvényének ismeretében, egy integrál kiszámításával tehetjük meg. Határozzuk meg tehát a kimeneti spektrális sűrűséget, de abban az egyszerű esetben, amikor nincs moduláció!

Először helyettesítsük be a fázis-zaj fenti kifejezésébe a modulált jel előburkolóját abban az esetben, amikor a moduláló jel, azaz $\xi_t \equiv 0$, és így $\mu_t \equiv 0$:

$$\varepsilon_t \cong \operatorname{Im} \frac{\gamma_{\hat{v}}(t)}{\gamma_{\eta}(t)} = \operatorname{Im} \frac{\gamma_{\hat{v}}(t)}{A \cdot e^{j(\Omega t + \Phi)}} = \frac{1}{A} \cdot \operatorname{Im}(\gamma_{\hat{v}}(t) \cdot e^{-j(\Omega t + \Phi)})$$

Ennek a folyamatnak a spektrális sűrűségét kell a v zaj spektrális sűrűségével kifejezni. A kapcsolat kiderítésére felhasználjuk a jelek ún. kvadratúra-felbontását.

Egy spektrális előállítással adott gyengén stacionárius folyamatot bontsunk szét negatív és pozitív frekvenciájú részekre, valamint emeljünk ki az egyes részekből $e^{\pm j(\Omega t + \Phi)}$ -t:

$$\zeta_t = \int_{-B}^B e^{j\omega t} d\beta_{\zeta}(\omega) = e^{-j(\Omega t + \Phi)} \int_{-B}^0 e^{j[(\omega + \Omega)t + \Phi]} d\beta_{\zeta}(\omega) + e^{j(\Omega t + \Phi)} \int_0^B e^{j[(\omega - \Omega)t - \Phi]} d\beta_{\zeta}(\omega)$$

Vegyük figyelembe, hogy $e^{\pm j(\Omega t + \Phi)} = \cos(\Omega t + \Phi) \pm j \cdot \sin(\Omega t + \Phi)$, ezzel kapjuk:

$$\begin{aligned}
\zeta_t &= [\cos(\Omega t + \Phi) - j \cdot \sin(\Omega t + \Phi)] \int_{-B}^0 e^{j[(\omega+\Omega)t+\Phi]} d\beta_\zeta(\omega) + \\
&\quad + [\cos(\Omega t + \Phi) + j \cdot \sin(\Omega t + \Phi)] \int_0^B e^{j[(\omega-\Omega)t-\Phi]} d\beta_\zeta(\omega) = \\
&= \cos(\Omega t + \Phi) \left[\int_{-B}^0 e^{j[(\omega+\Omega)t+\Phi]} d\beta_\zeta(\omega) + \int_0^B e^{j[(\omega-\Omega)t-\Phi]} d\beta_\zeta(\omega) \right] + \\
&\quad + j \cdot \sin(\Omega t + \Phi) \left[\int_0^B e^{j[(\omega-\Omega)t-\Phi]} d\beta_\zeta(\omega) - \int_{-B}^0 e^{j[(\omega+\Omega)t+\Phi]} d\beta_\zeta(\omega) \right]
\end{aligned}$$

Ha a jelet a $\zeta_t = \zeta_t^{(c)} \cdot \cos(\Omega t + \Phi) + \zeta_t^{(s)} \cdot \sin(\Omega t + \Phi)$ alakba írjuk, akkor az előzőek alapján a $\zeta_t^{(c)}$ és $\zeta_t^{(s)}$ ú.n. kvadratúra komponensekre a következő adódik:

$$\begin{aligned}
\zeta_t^{(c)} &= \int_{-B}^0 e^{j[(\omega+\Omega)t+\Phi]} d\beta_\zeta(\omega) + \int_0^B e^{j[(\omega-\Omega)t-\Phi]} d\beta_\zeta(\omega) \\
\zeta_t^{(s)} &= j \cdot \left[\int_0^B e^{j[(\omega-\Omega)t-\Phi]} d\beta_\zeta(\omega) - \int_{-B}^0 e^{j[(\omega+\Omega)t+\Phi]} d\beta_\zeta(\omega) \right]
\end{aligned} \tag{6.2}$$

A jel előburkolóját is könnyen kifejezhetjük a kvadratúra komponensekkel:

$$\gamma_\zeta(t) = 2 \int_0^B e^{j\omega t} d\beta_\zeta(\omega) = (\zeta_t^{(c)} - j \cdot \zeta_t^{(s)}) \cdot e^{j(\Omega t + \Phi)}$$

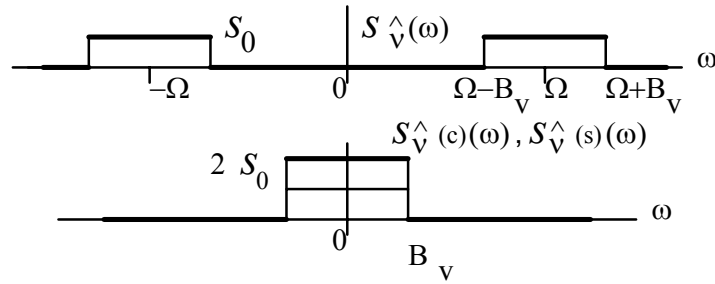
Ha átszorunk $e^{j(\Omega t + \Phi)}$ -vel és vesszük a képzetes részt, akkor a következőt kapjuk:

$$\text{Im}(\gamma_\zeta(t) \cdot e^{-j(\Omega t + \Phi)}) = -\zeta_t^{(s)}$$

Összehasonlítva ezt a fázis-zajra kapott nagyon hasonló kifejezéssel, írhatjuk:

$$\varepsilon_t \cong \frac{1}{A} \cdot \text{Im}(\gamma_{\hat{v}}(t) \cdot e^{-j(\Omega t + \Phi)}) = -\frac{1}{A} \hat{v}_t^{(s)}$$

Már csak az a kérdés maradt, hogy mi az összefüggés egy folyamat spektrális sűrűsége, és a kvadratúra komponenseinek spektrális sűrűsége között? A válasz megadásához semmi mást nem kell tenni, mint értelmezni a kvadratúra komponensek (6.2)-vel adott kifejezését. Az ugyanis azt mondja, hogy egy jel kvadratúra komponenseinek spektrális előállítását a jel spektrális folyamatának növekményeiből kapjuk, de a negatív frekvencián lévő növekmények az Ω -val növelt frekvenciájú komponenseket súlyozzák, a pozitív frekvencián lévők pedig az Ω -val csökkentett frekvenciájú komponenseket súlyozzák. Ez tehát egyszerűen azt jelenti, hogy a spektrális összetevők, elég sajátos módon ugyan, de frekvenciában áthelyeződnek. Természetesen ugyanez történik a spektrális sűrűséggel is. Ezt illusztráltuk az alábbi ábrán keskenysávú, Ω körüli jelek esetére:



Azaz: $s_{\hat{v}(c)}(\omega) = s_{\hat{v}(s)}(\omega) = s_{\hat{v}}(\omega + \Omega) + s_{\hat{v}}(\omega - \Omega)$. Így az ε_t és $\hat{v}_t^{(s)}$ közötti előbb kiderített kapcsolat következtében azt kapjuk, hogy:

$$s_{\varepsilon}(\omega) = \frac{s_{\hat{v}}(\omega + \Omega) + s_{\hat{v}}(\omega - \Omega)}{A^2} = \frac{s_{\hat{v}}(\omega + \Omega) + s_{\hat{v}}(\omega - \Omega)}{2W}$$

Ezzel nagyon közel jutottunk a végeredményhez, hiszen a fázis-zaj deriváltja jelenik meg az FM demodulátor kimenetén, ami a spektrális sűrűségben egy ω^2 szorzásként jelentkezik, tehát:

$$s_{\varepsilon}(\omega) = \omega^2 \cdot s_{\varepsilon}(\omega) = \omega^2 \frac{s_{\hat{v}}(\omega + \Omega) + s_{\hat{v}}(\omega - \Omega)}{2W}$$

Ezután vegyük tekintetbe a demodulátor utáni szűrőt, amely az $1/c'$ szorzótényezőn kívül sávhatárolást is végez B -re! Ezzel a kimenő zaj négyzetes várhatóértéke:

$$\mathbf{M}\tilde{V}_0^2 = \int_{-B}^B \frac{1}{(c')^2} s_{\varepsilon}(\omega) d\omega = \frac{1}{2W \cdot (c')^2} \int_{-B}^B \omega^2 [s_{\hat{v}}(\omega + \Omega) + s_{\hat{v}}(\omega - \Omega)] d\omega$$

Legyen az additív zaj spektrális sűrűsége s_0 , akkor az előző integrál eredménye:

$$\mathbf{M}\tilde{V}_0^2 = \frac{1}{2W \cdot (c')^2} \int_{-B}^B \omega^2 (s_0 + s_0) d\omega = \frac{2s_0}{2W \cdot (c')^2} \cdot \frac{2B^3}{3}$$

Végül a zaj-jel viszony:

$$r = \frac{\mathbf{M}\tilde{V}_0^2}{\mathbf{M}\xi_0^2} = \frac{2s_0}{2W \cdot (c')^2} \cdot \frac{2B^3}{3} \cdot \frac{1}{\mathbf{M}\xi_0^2} = \frac{s_0}{W} \cdot \frac{2B^3}{3} \cdot \frac{1}{(c')^2 \mathbf{M}\xi_0^2}$$

Ha viszonyítjuk ezt az eredményt az $r_0 = \frac{2Bs_0}{W}$ hivatkozási zaj-jel viszonyhoz, akkor a következőt kapjuk:

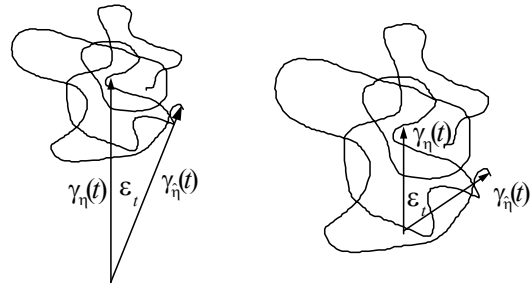
$$r = r_0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{B^2}{(c')^2 \cdot \mathbf{M}\xi_0^2} = r_0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{B}{d}\right)^2$$

ahol bevezettük $d^2 = (c')^2 \cdot \mathbf{M}\xi_0^2$ jelölést, amely mennyiséget **effektív** frekvencialökletnek nevezzük.

Ezek után felmerül a kérdés, hogy milyen különbség jelentkezik akkor, ha a zaj nem *gyenge*, azaz a zaj nem tekinthető kicsinek a jelhez képest? A rövid válasz erre az, hogy a különbség jelentős. Olyan jelenségek lépnek fel, amelyek döntően megváltoztatják a viszonyokat, és amelyek leírására alapvetően más modellre van szükség. Jelenleg a részletes vizsgálat helyett, csak a lényegét fogjuk bemutatni, azt is inkább csak az illusztráció szintjén.

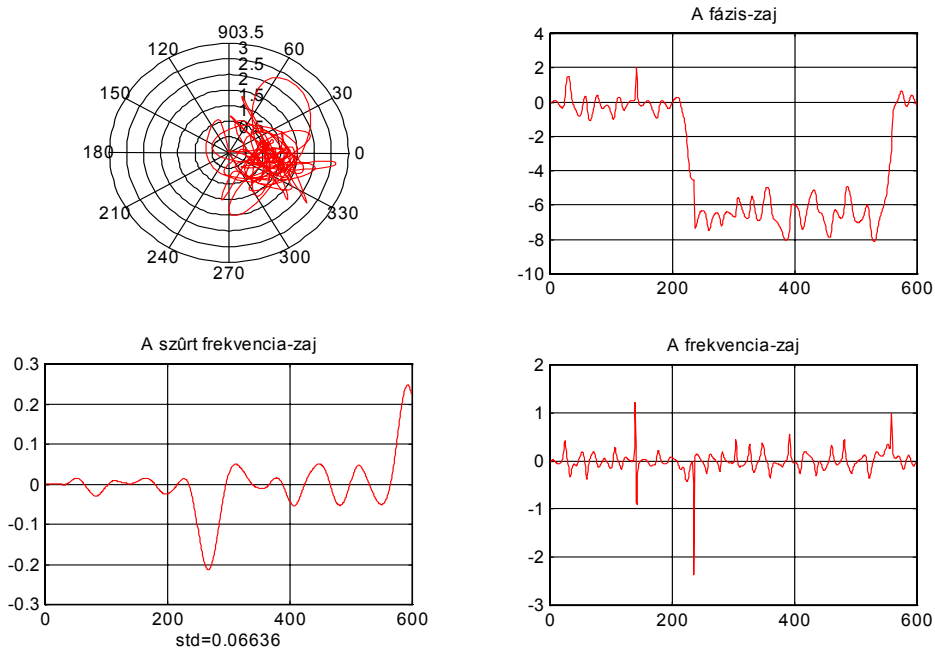
A modulált jelet érő **erős additív zaj** hatásának vizsgálata. Az erős zajban, azaz nagy zaj-jel viszony mellett fellépő jelenségek megértéséhez az előburkolókat, azaz a fázoros megjelenítést kell ismét elővenni, és az előburkolók hisztogramjának szemrevételezésével megállapítani a gyenge és az erős zaj esetén fellépő különbségeket.

Az ábra baloldali részében a kiszajú-, a jobboldali részben pedig a nagyzajú esetet szemléltettük. Mindezt úgy, hogy az eredő $\gamma_{\eta}(t)$ vektor végpontjának egy lehetséges vándorlását leíró görbét tüntettünk fel (miközben persze az egész ábra forog Ω szögsebességgel). A lényeges különbséget a két oldal között az jelenti, hogy a jobboldali részben előfordul olyan időszak is, amikor az eredő vektor végpontjának nyomvonala körülszaladja az origót.



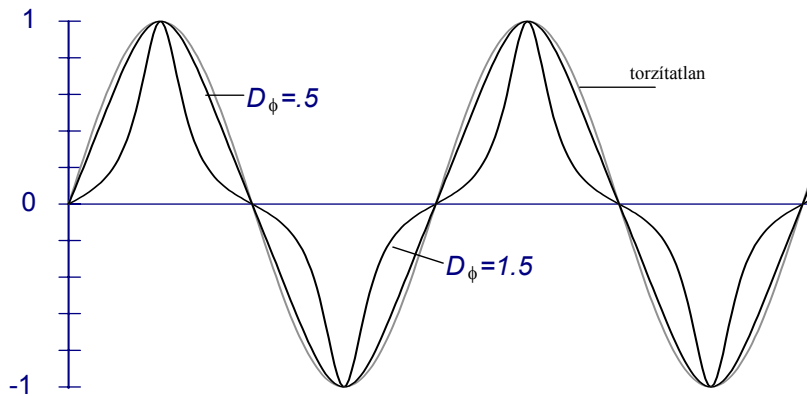
Miért olyan különleges ez? Mert ez azt jelenti, hogy az eredő vektor fázisában egy közel 2π értékű változás következik be hosszabb - rövidebb idő alatt, tehát azt is mondhatjuk, hogy egy fázisugrás. A frekvenciademodulátor viszont a fázisugrást egy impulzusként demodulálja, ami a kimeneten a zaj lényeges minőségi és mennyiségi megváltozásához vezet.

Egy szimulációs vizsgálat eredményeként kapott görbéket mutatja az alábbi ábracsoport. A bal felső sarokban egy polár koordináta-rendszerben a vivő plusz a zaj vektorának végpontja által leírt görbét "láthatjuk". Sajnos inkább csak sejtethjük. A vivő vektora jobbra vízszintesen a 0 fok irányába mutat, és egységnyi hosszú. A vivőhöz adódó zaj négyzetes várhatóértéke 2,5-ször nagyobb a vivőénél, azaz a jel-zaj viszony csupán 1/4. A jobb felső sarokban látható az eredő fázisa. A baloldali ábrán látható vektor végpontja az idő jelentős részében 1-2 radián közötti értékű fázisingadozásokat mutat, de a vizsgált 600 lépéses szimuláció során két esetben, méghozzá éppen ellenkező irányban, megkerüli az origót, tehát rövid idő alatt 2π fázisváltozást ér el. A jobb alsó sarokban lévő ábrán a felette lévő görbe deriváltját, azaz a frekvenciazajt láthatjuk. Érdekes, hogy bár meg lehet találni a két 2π radián értékű fázisugrások helyét a derivált görbén, ugyanakkor az ábra baloldalán is látunk hasonló nagyságú tüskét, ahol pedig nem is volt túlzottan nagy fázisváltozás. Viszont ha továbbmegyünk a bal alsó sarokban lévő görbéhez, amit oly módon kapunk, hogy sávhatároljuk a frekvenciazajt a moduláló jel sáv szélességére, akkor szembeszökő a különbség a frekvenciazaj tüskéi között. A 2π fázisváltozásból származó tüskék nagy energiájúak, sok kisfrekvenciás komponenszt tartalmaznak, így azokat az aluláteresztő szűrő szinte kiemeli. A kimeneten ezek az impulzusok jelentős zajt képviselnek.



A lineáris torzítás hatása

Csupán egy megjegyzés és illusztráció: az FM jel szimmetrikus sávhatárolása **nemlineáris** torzítást okoz, amit szinuszos mérőjelre a korábbi spektrumvizsgálat alapján könnyű kideríteni, és példaként az alábbi ábrán látjuk, hogy milyen lesz a demodulált jel, ha csak egy-egy oldalsávkomponenst tartunk meg:



A modulált jel:

$$\eta_t = J_0(D_\phi) \cdot \cos(\Omega t + \Phi) - 2J_1(D_\phi) \cdot \sin \omega_m t \cdot \sin(\Omega t + \Phi).$$

A demodulált jel:

$$\tilde{\zeta}_t = \frac{d}{dt} \tan^{-1} \left(2 \frac{J_1(D_\phi)}{J_0(D_\phi)} \cdot \sin \omega_m t \right)$$