

A DÖNTÉSELMÉLET ALAPJAI

Jóformán életünk minden percében döntéseket kell hoznunk, és tesszük ezt minden elméleti megalapozottság nélkül. Sajnos a mindennapi életben felmerülő egyedi döntésekre még nem sikerült igazán jó, elméletileg megalapozott módszereket találni, bár az úgynevezett szakértői, vagy tudásbázisú rendszerek éppen erre törekszenek. Mi itt az úgynevezett statisztikai döntési módszerekre korlátozzuk vizsgálódásainkat. Ezeknek az jelenti a lényegét, hogy nagyszámú hasonló esetben kell döntést hozni, és így nem *egy-egy* döntés jó vagy rossz volta a kérdés, hanem az, hogy a döntések általában (átlagosan) jók-e vagy rosszak.

De mit is értsünk azon, hogy jó vagy rossz a döntésünk? Hogyan minősítsük a döntéseket? Az egyik legáltalánosabb megközelítés az lehet, ha figyelembe vesszük, hogy valamennyi döntésünknek széles értelemben vett ára van, azaz költség rendelhető a döntéseinkhez, és ezeket a költségeket kívánatos minimalizálni. Mi a továbbiakban szűkíteni fogjuk ezt a megközelítést, és azt mondjuk, hogy a híradástechnikában felmerülő döntési helyzetekben dönthetünk helyesen, ami azt jelenti, hogy eltaláljuk a tényleges, az igazi helyzetet és ezért természetesen nem jár büntetés, vagy dönthetünk hibásan, amikor a ténylegestől eltérő helyzetet fogadunk el, azt tételezzük fel valóságosnak és így természetesen pórul járunk, károsodunk, kárt okozunk. Így nyilvánvalóan ebben a megközelítésben a téves döntések minimalizálására, a legkisebb kárra, a legkevesebb hibára kell törekedni.

Egy igen érdekes megközelítési, szemléletbeli kérdés a döntéselméletben az, hogy a különböző esetekben hozott téves döntések összevonva kezelhetőek-e és a téves döntéseknek egy átlagolt kárát minimalizálhatjuk, vagy pedig a döntési esetek olyan elkülönülő csoportokat képeznek, amelyekben az elkövetett tévedések következményei olyannyira különbözőek, hogy azok nem vonhatók össze és így nem lehet az eredményeket egy átlagolt értékkel jellemezni, egy átlagolt érték minimalizálására törekedni. Mi azt a szemléletet valljuk, és fogjuk követni, amelyik szerint meg kell különböztetni kétféle döntési, más néven hipotézisvizsgálati feladatot. Az egyik csoportba soroljuk azokat a feladatokat, amelyeknél a különféle tévedések összevonhatók és átlagoltan értékelhetők, a másik csoportba pedig az ettől eltérő eseteket soroljuk. Az első csoportot - egy jeles matematikusról elnevezve - *Bayes-típusú* (ejtsd Bész) feladatoknak nevezzük, míg a második csoportot *általános hipotézisvizsgálati* feladatoknak hívjuk.

A döntéselméleti alapokat több különböző síkon tárgyalhatjuk. Kezdjük egy általánosnak nevezhető síkkal, amelyben egy példa kapcsán (amit csupán azért említünk, hogy konkrét dolgokról lehető egyértelműen tudjunk beszélni) megadjuk az elnevezéseket, vázoljuk a tennivalókat és a lehetőségeket.

A FELADATOK ÉRTELMEZÉSE, CSOPORTOSÍTÁSA

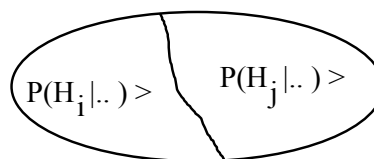
Legyen a példánk egy orvosi rendelés (például belgyógyászati), ahol páciensek jelennek meg különböző panaszokkal. Ekkor joggal feltételezhetjük, hogy az orvos véges sok diagnózist (betegséget) ismer (persze az egyik lehet az "ismeretlenek" csoportja is), és a páciensen végzett megfigyelései alapján be kell, hogy sorolja a tüneteket valamelyik "skatulyába".

Kétféle módon is megfogalmazhatjuk az orvos által végzett (kétségtelenül igen nehéz) döntési tevékenységet: azt mondhatjuk, hogy (i) az orvos a tünetek halmazát részhalmazokra osztja (particionálja), és az egyes részhalmazokhoz (partíciókhoz) betegségeket rendel; vagy egy másik megfogalmazás szerint (ii) az orvos a megfigyelései alapján a különféle lehetséges, ismert feltételezések (hipotézisek) közül elfogadja valamelyiket.

Persze a döntés lényegét nem ezek az elnevezések jelentik, hanem maga az módszer, ahogy a döntés születik. De hogyan is születnek efféle döntések? Van-e valami szabálya a döntések meghozatalának, és hogyan értékelhető a döntések minősége?

Jelöljük H_i -vel az i -edik **hipotézist**, illetve egyúttal annak **elfogadását** is. Továbbá jelöljük ζ -val a megfigyeléseket képviselő valószínűségi változót. Egy elég természetes követelményként azt a kívánalmat támaszthatjuk a döntéseinkkel, a döntési módszerünkkel szemben, hogy a $\zeta = z$ "értékű" megfigyelésre támaszkodva a legvalószínűbb hipotézist fogadjuk el. Azaz a $P(H_i|\zeta = z)$ -ből válasszuk a legnagyobbat. A $P(H_i|\zeta = z)$ valószínűséget a-posteriori, vagy magyarul a megfigyelés-utáni valószínűségnek nevezik. Tehát amennyiben elfogadjuk az a-posteriori valószínűség maximumát eredményező (vagy angolul Maximum A-posteriori Probability, rövidítve MAP) hipotézisek választását döntési szabályként, akkor a megfigyeléseink particionálását a 2.1. ábrán látható módon kell elvégezni, tehát minden megfigyelést a legnagyobb a-posteriori valószínűséget eredményező részhalmazba kell sorolni.

Sajnos a MAP döntési szabály realizálásához alapvetően az a-posteriori valószínűségek eloszlására lenne szükség, ami jellegzetesen ismeretlen. (Ha meggondoljuk, akkor hamar rájövünk, hogy ennek az ismeretnek a megszerzése magát a döntési feladat megoldását jelenti.) Valójában milyen ismereteink és lehetőségeink vannak a fenti cél megvalósítására?



2.1. ábra A megfigyelések particionálása

Az a-posteriori valószínűséget átalakíthatjuk az alábbi módon:

$$P(H_i|\zeta = z) = \frac{P(H_i \cap \zeta = z)}{P(\zeta = z)} = \frac{P(\zeta = z|H_i) P(H_i)}{P(\zeta = z)}, \quad (2.1)$$

ahol a feltételes valószínűség és az együttes valószínűség közötti kapcsolatot használtuk fel.

Ezek szerint, ha rendelkezésünkre áll az egyes hipotézisek valószínűsége (úgy is nevezik, hogy az a-priori = eleve adatott valószínűségek), valamint a megfigyeléseknek az egyes hipotézisekre vonatkozó feltételes valószínűségei, akkor a (2.1.) szerint meg tudjuk valósítani a MAP döntési szabályt.

Az a-priori valószínűségek és feltételes valószínűségek azonban csak a döntési feladatok egy részénél állnak rendelkezésre, míg más feladatoknál nem adhatók meg, nem becsülhetők, vagy nincs értelmük. Hivatkozva az orvosi diagnosztikai példákra, éppen egy olyan feladattal állunk szemben, amelynél az a-priori valószínűségek meghatározása komoly gondot jelentene, ha egyáltalán elősegítené a tényleges döntések jó elvégzését. Ugyanis az adott valószínűségek, azaz egy-egy betegség előfordulása nyilván nagyon függ például a földrajzi elhelyezkedéstől, de nagymértékben változik az életmód hatására is, és így tovább.

Van azonban még egy nagyon fontos eltérés a különféle döntési feladatok között, mégpedig a döntési hibák hatása, következménye. Az nyilván természetes, hogy hiába választjuk az adott megfigyeléshez tartozó legvalószínűbb hipotézist, a téves döntések nem küszöbölhetők ki, néha a kevésbé valószínű esemény következik be. Így elég természetesen merül fel a kérdés, hogy mennyire jó a MAP döntési szabály. Illetve milyen módon jellemezhetjük a döntési szabályunk minőségét?

Amennyiben sok hasonló döntést végzünk, akkor nyilván jó jellemzőnek tekinthetjük, hogy átlagosan a döntéseink mekkora hányada lesz jó, illetve remélvén, hogy ez közel lesz a 100%-hoz, így kifejezőbb lehet, hogy milyen arányban tévedünk, vagy mekkora a döntéseink hibavalószínűsége.

Igen ám, de még a legegyszerűbb esetben, azaz amikor csupán két lehetséges feltételezés (hipotézis) közül kell választani, akkor is felmerül az a kérdés, hogy a lehetséges kétféle tévedés összevonhatóan jellemezhető-e. Egyáltalán nem biztos, hogy bármely döntési feladatonál a bekövetkező különböző tévedéseknek valamilyen súlyozott összege helyesen képes jellemezni a döntések elvégzésének minőségét.

Összefoglalva az eddigieket, két alapvetően különböző döntési feladatcsoportot különíthetünk el:

Az egyik csoport feladatainál léteznek az a-priori valószínűségek és a megfigyelések feltételes sűrűségei, valamint a döntési tévedések jellemezhetőek egyetlen átlagos mennyiséggel, az átlagos döntési hibával. Ezeket a feladatokat *Bayes-típusú* feladatoknak nevezzük, és megoldásuknál az elsődleges célunk az átlagos döntési hiba, a hibavalószínűség minimalizálása.

A másik csoportba soroljuk azokat a feladatokat, amelyeknél nem léteznek, vagy nincs értelmük az a-priori valószínűségeknek, és/vagy nem lehet a döntési tévedéseket egyetlen átlagos jellemzővel minősíteni, mert a különböző tévedéseknek más és más a hatásuk, jelentésük, következményük. Az ilyen feladatokat *általános hipotézisvizsgálati* feladatoknak hívjuk. Ezekben a feladatokban valamelyik döntési tévedést kiragadjuk és (egyéb szempontok alapján) értékét megköjtjük, vagy pontosabban megengedünk rá egy maximumot, majd a másik (vagy többi) fajta tévedést minimalizáljuk.

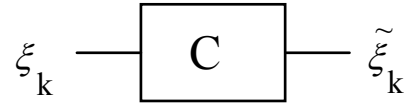
A következőkben áttérünk a döntésekkel kapcsolatos alapkérdések tárgyalásánál egy kevésbé általános síkra.

HÍRADÁSTECHNIKAI DÖNTÉSI FELADATOK

Milyen döntési feladatok merülnek fel a híradástechnikában? A teljesség igénye nélkül említsük itt meg a két legfontosabbat! Az egyik a hírközlés során lép fel, amikor egy forrás üzeneteit akarjuk egy csatornán keresztül eljuttatni egy nyelőhöz. Amennyiben digitális üzenet-átviteli (modulációs) módot választunk, akkor a csatorna kimenetén mindegyik időrésre vonatkozóan egy-egy döntést kell hozni, hogy a megérkező jel melyik szimbólumot képviselheti. A másik tipikus döntési feladat a (rádió)lokáció esetén merül fel, amikor egy adó által kibocsátott rövid idejű jel (impulzus) után az esetleges visszaverődésre várakozva, azt kell eldönteni, hogy van-e visszaverődés, vagy csupán a zajt lehet észlelni.

A digitális hírközlés döntési feladatai

A digitális hírközlés általános modellje szerint (2.2. ábra) a C digitális csatorna egy forrás által kibocsátott ξ_k szimbólumsorozatot továbbít a nyelőhöz. A digitális csatorna kimenetén megjelenő $\tilde{\xi}_k$ szimbólumsorozat eltéréseket mutathat a csatorna bemenetén lévő sorozattól. Az eltérések gyakoriságát a digitális csatorna megvalósítása határozza meg, az elviselhető értéket pedig a felhasználó döntheti el.



2.2. ábra A digitális hírközlés modellje

Az adott esetre joggal feltételezhetjük, hogy a kimeneten lévő szimbólumsorozatban előforduló tévedések összevontan értékelhetők, azaz nincs különös jelentősége, hogy melyik szimbólum változott meg és mire. Továbbá könnyű belátni, hogy az egyes hipotézisek, azaz a szimbólumok előfordulási valószínűsége, tehát az a-priori valószínűségek jól becsülhetők. A következőkben pedig részletesen bemutatjuk azt is, hogy a C csatorna elektronikus megvalósítása esetén milyen közvetlen módon adódnak a (2.1.)-ben szereplő feltételes valószínűségek. Ezek alapján természetes az a következtetés, hogy a digitális csatorna megvalósításakor Bayes-típusú döntési feladatot kell megoldani.

A feladat megoldása - miként már leszögeztük - egy adott döntési szabály meghatározása, tehát a megfigyelések halmazának részhalmazokra osztása. Jelölje nagy A a részhalmazokra osztást, azaz:

$$A := (A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_M), \quad (2.2)$$

ahol A_i jelenti az i -edik részhalmazt, az M pedig a részhalmazok, tehát a szimbólumok, azaz a hipotézisek számát.

Az adott döntési szabályhoz tartozó döntés minőségét pedig az alábbi jellemzővel, a hibavalószínűséggel adhatjuk meg:

$$P_e(A) := \sum_{i=1}^M P(\zeta \in A_i \cap \xi \neq H_i), \quad (2.3)$$

ahol tehát összeadjuk azoknak az eseményeknek az együttes valószínűségét, amikor az i -edik hipotézist fogadjuk el, de a küldött szimbólum valami más volt.

A legkisebb hibavalószínűséget eredményező \tilde{A} döntési szabályt *standard* döntési szabálynak hívjuk. A (2.1.) számlálójában és nevezőjében szereplő, a megfigyelések folytonos eloszlása esetén nulla értékű valószínűségeket helyettesítve a megfelelő valószínűség sűrűségfüggvényekkel, az alábbi kifejezést kapjuk:

$$P(H_i | \zeta = z) = \frac{P(\zeta = z | H_i) P(H_i)}{P(\zeta = z)} \Rightarrow \frac{f_{\zeta | H_i}(z) P(H_i)}{f_{\zeta}(z)}. \quad (2.4)$$

A standard döntési szabály i -edik partícióját pedig az alábbi módon adhatjuk meg:

$$\tilde{A}_i = \left\{ z \mid f_{\zeta | H_i}(z) P(H_i) \geq \forall_{j \neq i} f_{\zeta | H_j}(z) P(H_j) \right\}, \quad (2.5)$$

azaz azokat a z megfigyeléseket soroljuk az i -edik részhalmazba, amelyekre $f_{\zeta | H_i}(z) P(H_i)$ a legnagyobb.

A híradástechnikai felismerés döntési feladatai

Híradástechnikai felismerési feladatra példaként válasszuk a klasszikus felderítő rádiólokátort. Itt egy adóval nagyfrekvenciás szinuszcsoomagokat sugárunk ki a rádiócsatornába, és a csomagok szüneteiben azt figyeljük, hogy érkezik-e visszaverődés (echó) a csatornából, azaz van-e ott céltárgy, ami visszaverődést okoz. Az elektronikus megvalósítás következtében - alapvetően a mindig jelenlévő termikus zaj miatt - az echó jelenléte vagy hiánya a kritikus esetekben, tehát például nagy távolság esetén csak "feltételezhető", így itt egy bináris döntési feladattal állunk szemben. (Lényegét tekintve teljesen hasonló a helyzet az egészségügyi szűrővizsgálattal, pl. a közismert tüdőszűréssel is.)

A visszaérkező jel megfigyelése alapján ekkor is célszerű a legvalószínűbb esetet elfogadni, jelenleg azonban a (2.1.) kifejezésben szereplő valószínűségekkel gondok vannak. Egyrészt nem nehéz elképzelni, hogy megalapozatlan egy valószínűségi modellt szerkeszteni arra, hogy az egyes irányokból milyen gyakorisággal érkezik visszaverődés. Valóságos esetekben könnyen előfordulhat, hogy a lokátor teljes élettartama során bizonyos irányokból sohasem tapasztal echót, tehát a hipotézisek a-priori valószínűségei nem léteznek, vagy ésszerűtlenek.

Valójában persze az igazi cél teljesítése érdekében teljesen közömbös is, hogy léteznek-e, vagy ésszerűek-e ezek a valószínűségek, hiszen a lokátor feladata az, hogy amennyiben van céltárgy, akkor döntsön úgy, hogy észlelt echót, az ellenkező esetben pedig, hogy nem.

Azonban még a fenti problémánál is súlyosabb, hogy ennél a döntési feladatnál nem hasonló jelentőségűek, jelentőségűek, illetve következményűek a lehetséges tévedések. A két lehetséges tévedés közül az egyik az, amikor valójában nincs céltárgy, de a lokátor a vevő kimenetén megfigyelhető jel alapján úgy dönt, hogy érkezett echó. Ezt a tévedést magyarul vaklármanak nevezik, mivel indokolatlan riadalmat kelt. A másik tévedésnek, azaz amikor céltárgy létezése esetén az a döntés, hogy nincs echó, elmulasztott riasztás a neve.

A kétféle hiba következményei alapvetően eltérőek:

A vaklárma típusú hiba azt eredményezi, hogy szükségtelenül, indokolatlanul további intézkedésekre kényszeríti a rendszert. Például légi célfelderítésnél ez azt jelenti, hogy elfogó vadászpilótákat indítanak a cél felkutatására, míg egy tömeges egészségügyi szűrővizsgálathoz pedig további részletes klinikai vizsgálatra rendelik a páciens. Mindkét példa világosan mutatja, hogy jelentős költséget von maga után ez fajta a tévedés, valamint drága és korlátozott erőforrások felesleges igénybevétele következik be, ami csökkenti azok elérhetőségét az indokolt, tehát a szükséges esetekben.

Az elmulasztott riasztás következményei alapvetően különböznek az előzőtől. A légifelderítésnél, ha ellenséges és rossz szándékú céltárgy felderítésének elmulasztása következik be, akkor beláthatatlan mértékű rombolás, pusztítás - mind anyagiakban, mind emberéletben - következhet be. Az egészségügyi szűrővizsgálathoz pedig egy idejében fel nem ismert fertőző betegség a páciens komoly egészségkárosodásán túl még a szűkebb-tágabb környezetében élők megfertőzését is okozhatja.

Mivel a kétfajta tévedés összevonását a fentiek alapján nem tartjuk indokolhatónak, így nincs lehetőségünk azok együttes minimalizálásra. Ki kell tehát választani közülük az egyiket, amit elsődleges vagy elsőfajú hibának nevezünk, és meg kell adnunk rá egy korlátot. Majd ezután olyan döntési szabályt kell keresnünk, amely minimalizálja a másik

tevédeést, az úgynevezett másodfajú hibát. Annak kiválasztása, hogy melyik legyen az első-, illetve másodfajú hiba, érdekes problémát jelent, de szerencsére rövid gondolkodás után egyértelműen megoldható.

Megállapíthatjuk, hogy azt a fajta hibát kell elsődlegesnek tekinteni, amelyre nullánál nagyobb előfordulási valószínűség is elképzelhető, illetve amelyre egy korlát - a teljes rendszerre vonatkozó megfontolásokból - megadható. Mindkét példánál ez a hiba a vaklárma lesz. Ugyanis egyrészt az elmulasztott riasztásra "korlátként" csak nulla előfordulási valószínűséget tudunk elfogadni, hiszen nem mondhatjuk azt, hogy megfelelőnek tartjuk, ha a felderítési módszerünk úgy működik hogy a céltárgyak, vagy a tényleges betegek adott hányadát nem veszi észre. Másrészt viszont a vaklárma - ami többletmunkát okoz - korlátozható egy előfordulási valószínűségre, amelynél még nem következik be az egész rendszernek a túlterheléséből fakadó működésképtelensége.

Az egyes hibafajtákat külön-külön kell kezelni, számítani. A bináris esetre korlátozódva, jelöljük az első- és másodfajú hibákat az alábbi módon:

$$P_e^{(01)}(A) := P(\text{echóra döntünk, de nincs céltárgy}),$$

$$P_e^{(10)}(A) := P(\text{nem riasztunk, de van céltárgy}).$$

Az első- és másodfajú hiba jelének az argumentumában szereplő Δ jelöli a döntési szabályt. De milyen is legyen most ez a döntési szabály? A Bayes-típusú feladatoknál a MAP szabály elvezetett a standard döntési szabályhoz, amivel a legkisebb hibavalószínűséget érhetjük el. Jelenleg egy olyan particionálást kell keresni, amely rögzített elsőfajú hiba mellett minimalizálja a másodfajú hibát. Ezt a szabályt, amelyet most is \tilde{A} -al jelölünk, Neyman és Pearson találta meg, és a következő módon írható le:

$$\tilde{A} := \{z \mid \Lambda_{10}(z) \geq K\}, \quad (2.6)$$

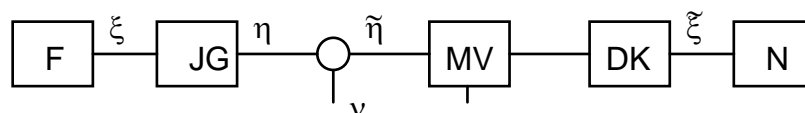
azaz azoknál a megfigyeléseknél döntünk úgy, hogy van echó, amelyek esetén az alább definiált $\Lambda_{10}(z)$ *likelihood-hányados* elér vagy túllép egy K korlátot.

A likelihood-hányados pedig nem más, mint azoknak a valószínűség sűrűségfüggvényeknek a hányadosa, amelyek leírják a megfigyeléseket a céltárgy jelenléte, illetve a céltárgy hiánya esetén:

$$\Lambda_{10}(z) := \frac{f^{(1)}(z)}{f^{(0)}(z)}. \quad (2.7)$$

EGYMINTÁS DÖNTÉSEK

Most áttérünk a híradástechnikai döntési feladatok tárgyalásánál az elektromos jelek és elektronikus csatornák síkjára. A vizsgálatokat a 2.3. ábrán látható modell alapján végezzük.



2.3. ábra A digitális csatorna modellje

Az F forrás szimbólumokat bocsát ki, amelyeknek a JG jelgenerátor elemi jeleket feleltet meg. Az elemi jelek sorozata bejut a hírközlő csatornába, ahol különféle hatások érik, amelyek közül most a v additív zajt vesszük figyelembe. A hírközlő csatorna kimenetén

megjelenő jel és zaj összegéből az MV mintákat vesz, méghozzá az időrések közepén, de lényeges, hogy az időrések határaitól lehető távol, hogy az itt előforduló jelváltozásoktól függetlenítsük a döntéseket. A DK döntőkészülék a minták, mint megfigyelések alapján meghozza a döntéseket, és kiadja az N nyelő számára a "legvalószínűbb" szimbólumokat.

A fenti modell alapján példák keretében szinguláris és reguláris feladatokat oldottunk meg mind Bayes-, mind általános hipotézisvizsgálat esetén.