

Információ, csatorna-kapacitás

Az információ mértékegységének választásánál nyilván valamilyen ésszerű módszert kell használni. (Csak emlékeztetőül megemlítyük, hogy például a hosszúság mértékegységeinek választásánál arra törekedtek, hogy könnyen reprodukálható mércék álljanak rendelkezésre, és például így választották a hüvelyket, a lábat, stb.) Mi lenne ésszerű mértékegység? Például válasszuk azt, ami a lehető legkisebb egységnek látszik! Hogyan jutunk információhoz, és mi lehet a legkisebb „természetes” mennyiség? Például megfigyeléseket végzünk, vagy kérdéseket teszünk fel, és a válaszokban jutunk az információhoz. Milyen kérdés-válasz esetén jöhet létre a legkisebb információ-mennyiség megszerzése? Erre valószínűleg mindenki elfogadja azt a választ, hogy eldöntendő kérdésekre adott igen-nem válaszok jelenthetik ezt a természetes, minimális mennyiségű információ-átvitelt. Azonban még néhány dolgot érdemes megfontolnunk. Egyrészt, ha a „nem tudom” választ kapjuk egy eldöntendő kérdésre, akkor nincs információ-átvitel, amennyiben nem az volt a kérdés, hogy tudja vagy nem tudja. Másrészt még azt is könnyen beláthatjuk, hogy nem mindegy milyen eloszlással kapjuk az eldöntendő kérdésünkre az igen nem válaszokat. Nyilván úgy érezzük, hogy amennyiben a két válasz közül valamelyiket sokkal gyakrabban kapjuk, mint a másikat, akkor azt kevesebbre fogjuk „értékelni” azt fogjuk mondani, hogy „persze, hiszen erre számítottunk”. Viszont amikor a ritkán kapott válasz érkezik, akkor azt „felértékeljük”. Emiatt, bár mértékegységként a *bináris egységet* (binary unit := bit) fogadjuk el, de egy eldöntendő kérdésre csak akkor tekintjük a választ 1 bit információjúnak, ha a lehetséges igen-nem válaszok azonos valószínűségűek.

Az entrópia

Tekintsünk egy információ-forrást, amelyik szimbólumokat bocsát ki megadott valószínűség-eloszlással (stacionárius), és a kibocsátott szimbólumok ne függjenek a megelőzőktől (memóriátlan). Kísérreljük meg egy ilyen forrás üzeneteit, azaz szimbólumsorozatait a legtömörebben leírni. Ehhez alkalmazzuk a következő ötletet: a gyakrabban előforduló szimbólumok jelölésére használjunk rövid jeleket, míg a ritkán előfordulókat jelöljük hosszabb jelekkel. Még konkrétabban: használjunk bináris szimbólumokat a leírásra, és legyen a használt bináris szimbólumok száma az egyes szimbólumok előfordulási valószínűségének reciprokával („meglepetési tényezőjével”) kapcsolatos, az alábbiak szerint:

$$\log_2 \frac{1}{p_i} \leq l_i < \log_2 \frac{1}{p_i} + 1,$$

azaz használjunk annyi bináris szimbólumot, amennyi az i -edik forrás-szimbólum valószínűsége reciprokának logaritmus, vagy a következő egész szám.

Bizonyítható, hogy ilyen választás mellett készíthető egyértelműen dekódolható, ún. prefix kód, amelyik nem igényel elválasztó szimbólumokat az egyes forrás-szimbólumok leírására használt kódszavak között, mert a határokat azok nélkül is meg lehet találni.

Ha kiszámítjuk a fenti javaslat alapján keletkező kódszavak átlagos hosszúságát, akkor a következő összefüggésre jutunk:

$$\sum_{i=1}^m p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i} \leq \sum_{i=1}^m p_i \cdot l_i < \sum_{i=1}^m p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i} + 1.$$

Az átlagot természetesen a valószínűségekkel súlyozottan vesszük, és ezzel az egyenlőtlenség-lánccal a forráskódolás Shannon által megfogalmazott egyik alaptételéhez jutunk. Nevezetesen: a lerögzített jellemzőkkel bíró forrás szimbólumait átlagosan nem lehet kevesebb bináris szimbólummal leírni, mint a baloldali mennyiség, amit *entrópiának* hívunk:

$$H(P) := \sum_{i=1}^m p_i \cdot \log_2 \frac{1}{p_i}$$

Ritka kivételektől eltekintve (amikor a valószínűségek 2 hatványai), a szimbólumonkénti átlagos kódszóhossz meghaladja az entrópiát. Amennyiben a forrás egymást követő szimbólumait blokkokba fogjuk, legyen mondjuk K szimbólum egy-egy blokkban, és erre a *kiterjesztett forrás*-ra megismételjük a fentieket, akkor csökkenni fog az egy forrás-szimbólumra eső átlagos kódszóhossz. Ezt mutatják az alábbi összefüggések:

$$\log_2 \frac{1}{p_i^{(K)}} \leq l_i^{(K)} < \log_2 \frac{1}{p_i^{(K)}} + 1$$

itt a felső indexben szereplő K jelöli, hogy a K hosszúságú blokkok valószínűségeit és az azokat leíró kódszavakat kell tekintetbe venni. Vegyük most is az átlagokat:

$$H(P^{(K)}) \leq \sum_{i=1}^{m^K} p_i^{(K)} \cdot l_i^{(K)} < H(P^{(K)}) + 1$$

Formálisan sem nehéz bizonyítani, hogy a memóriátlan forrás esetén nem változhat az információ (entrópia) attól, hogy blokkokat képezünk, tehát a K szimbólumból álló blokkok entrópiája K -szorosa lesz a szimbólumok entrópiájának:

$$K \cdot H(P) \leq \sum_{i=1}^{m^K} p_i^{(K)} \cdot l_i^{(K)} < K \cdot H(P) + 1.$$

Vegyük azonban észre, hogy most is csak legfeljebb egyhez közeli értékkel kell a jobboldalt megnövelni, amikor a blokkokra a kódszavak hosszát vesszük ahhoz, hogy azok egész értékűek legyenek.

Ha K -val osztjuk az egyenlőtlenséget, akkor a következőt kapjuk:

$$H(P) \leq \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{m^K} p_i^{(K)} \cdot l_i^{(K)} < H(P) + \frac{1}{K},$$

ami világosan mutatja, hogy a blokkhossz növelésével bármely memóriátlan forrásra a fenti módon készített leírás (kód) csak egy nullához tartó mennyiséggel kell, hogy az entrópiát meghaladja. Azt a kódot, amelyik átlagos kódszóhosszára teljesül a fenti egyenlőtlenség, kompakt kódnak hívjuk. Konstruktív szabályt Huffman adott ilyen kód szerkesztésére. Ezt a szabályt ismertnek tételezzük fel, így most csak egy hátrányos „tulajdonságára” utalunk, és bemutatunk egy olyan módszert, amely annak a kiküszöbölésére irányul.

Huffman kód szerkesztése esetén egyszerű a megoldás, ha forrás-szimbólumonként végezzük a kódolást. Ekkor azonban nem lesz elég „hatékony” a kód (nem lesz az átlagos kódszóhossz elég közel az entrópiához), amit úgy is lehet magyarázni, hogy a kód nem képes töredék-

biteket használni, pedig $\log_2 \frac{1}{p_i}$ szerint erre volna szükség az egyes szimbólumok kielégítő

leírásához. Láttuk, hogy ezen segít a szimbólumok blokkokba történő összefogása, de ennek alkalmazását praktikus lehetőségek korlátozzák. (A kisebb probléma, hogy az üzenet végén esetleg nem telik meg egy egész blokk, ami rontja a hatékonyságot, a nagyobb probléma, hogy a blokkokra kiterjesztett forrás abc-jének mérete óriási lesz, ami praktikusán kezelhetetlen. Sőt még azt is érdemes tekintetbe venni, hogy a memóriátlan forrás-modell alapján a kiterjesztés – ha az rövid blokkok esetén még akár kezelhető is – nem hoz akkora javulást, mintha tekintetbe vesszük az egymást követő szimbólumok kapcsolatait.)

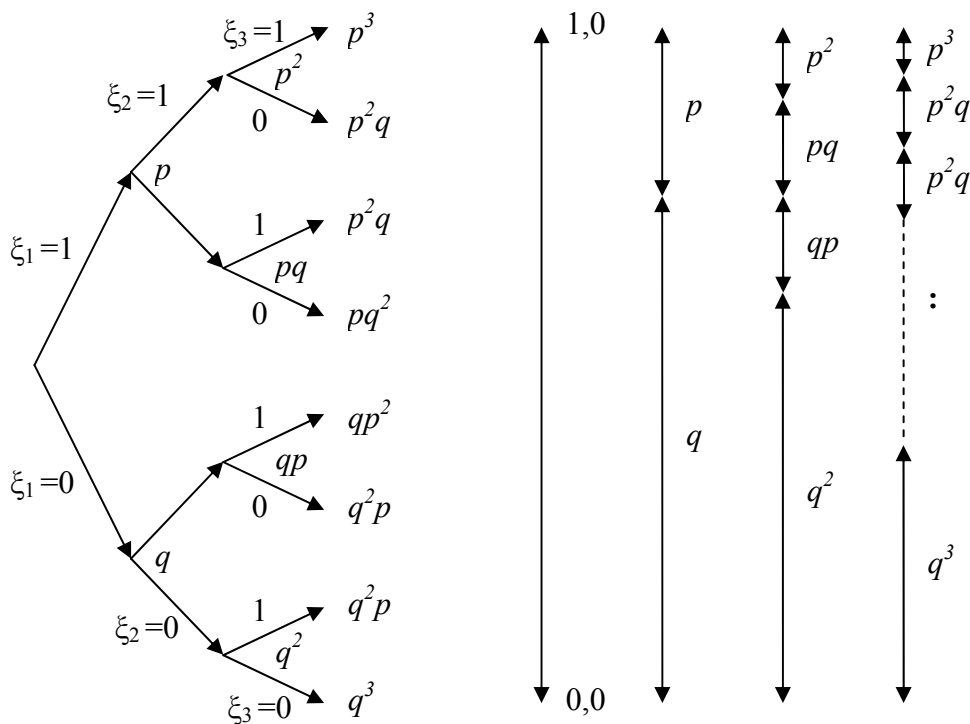
Az alábbiakban röviden bemutatásra kerülő aritmetikai kódolás „lehetővé teszi” a töredék-bitek használatát, bár azon az áron, hogy nem *pillanat-kódot* készít, azaz a kapott kód nem külön-külön írja le a szimbólumokat, hanem együtt az egész szimbólum-sorozatot.

Aritmetikai kódolás

Itt nem ismertetjük az egyébként érdekes technikai részleteket (még szabadalmak is védenek egyes eljárásokat, szabványok részeként is alkalmazzák), hanem csak az elvet, és az elvi lehetőséget mutatjuk meg.

Az ötlet lényege, hogy egy szimbólum-sorozatot írjunk le egy számmal, amely egyrészt a lehető legrövidebb, másrészt annak ismeretében a szimbólum-sorozat visszaállítható. Persze valójában minden forrás-kódolási eljárásnak ez a lényege, de az aritmetikai kódolás ezt szinte szó szerint megvalósítja. Az ötletet egyébként Elias nevéhez kötik.

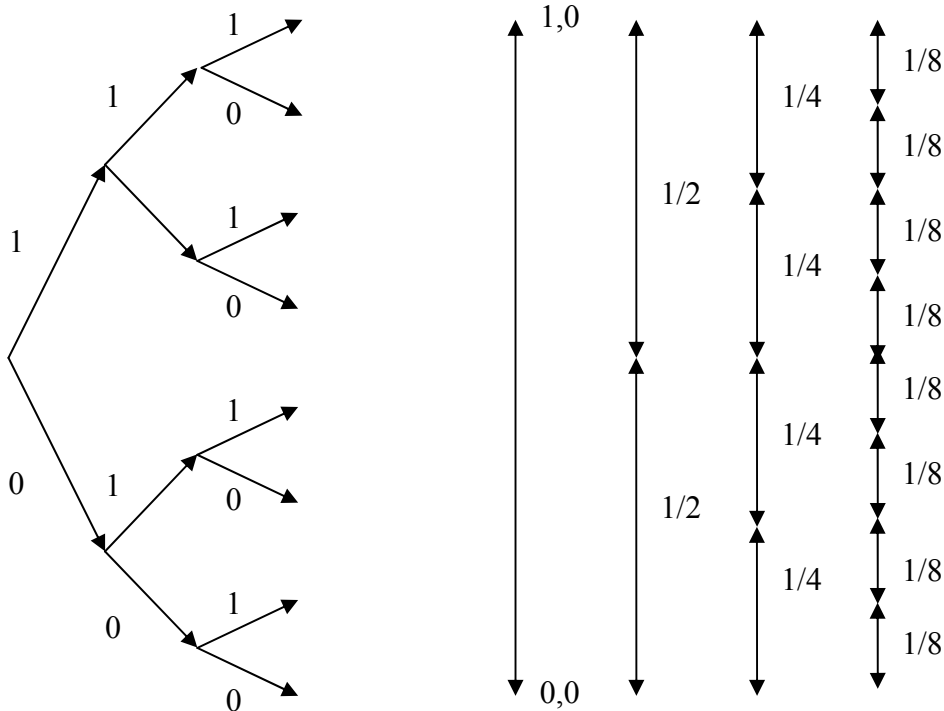
Tekintsük az alábbi, a lehető legegyszerűbb példát, amely azonban világosan megmutatja a kódolás elvét! Legyen egy bináris, memóriátlan, stacionárius forrásunk p és $q = 1-p$ valószínűség-eloszlással, és generálja ez a forrás a ξ szimbólum-sorozatot! Jellemezzük ezt a forrást az ú.n. forrás-fájával:



A fa azt tünteti fel, hogy milyen szimbólum-sorozatokat bocsáthat ki a forrás, és azoknak mekkora a valószínűsége. Az ábra jobboldalán illusztráltuk a sorozatok valószínűségeit a $[0;1)$ közötti szakaszon. Az ábrából egyrészt az látszik, hogy az egyes sorozatok valószínűsége, amelyet a rész-szakaszok ábrázolnak, egyre csökken, másrészt viszont az is látható, hogy amennyiben a rész-szakaszok sorrendjére lerögzítünk valamilyen szabályt, akkor egy-egy rész-szakasz, nevezzük intervallumnak, egyértelműen azonosíthat egy-egy szimbólum-sorozatot. Sőt, amennyiben rögzített a sorozatok hossza, akkor nincs szükség az intervallum határaitra sem, hanem elég egyetlen számérték az intervallumon belül a sorozat azonosítására. Lényegében ez az aritmetikai kódolás alapelve, de arra még választ kell adnunk, hogy mennyire hatékony ez a kód.

Most tehát arra keresünk választ, hogy átlagosan hány bináris szimbólummal írhatunk le egy-egy forrás-szimbólumot. (Csak az érdekesség kedvéért említjük, hogy Huffman kód esetén bináris forrás szimbólumonkénti kódolásánál ezt a kérdést fel sem tehetjük, mert értelmetlen lett volna.) A válaszhoz készítsünk egy bináris kód-fát! Első ránézésre ugyanolyan, de tekintsük azonos valószínűségűeknek a bináris szimbólumokat, és nézzük, hogy mekkora részekre osztják a bináris sorozatok a $[0;1)$ szakaszt! Lényegében egy triviális ismeretet

illusztrálunk, miszerint 1 bináris szimbóllummal azonosítható az alsó- vagy a felső fél, kettővel egy-egy negyed, 3 bináris szimbólum a nyolcadok azonosítására elég.



A feladatunk az, hogy az egyes forrás-sorozatok azonosítására (amelyek tehát egy-egy intervallumot jelölnek ki a $[0;1)$ közötti szakaszon) használjuk azt a legrövidebb kódszót, amelyikhez tartozó szakasz beleesik a kérdéses intervallumba. Jelölje $l^{(K)}$ a K hosszúságú szimbólumsorozat azonosítására használandó bináris kód hosszát! Ahhoz, hogy az $l^{(K)}$ hosszú bináris kód által azonosított szakasz biztosan beleessen a K hosszúságú szimbólumsorozat által kijelölt intervallumba, az alábbi viszonyoknak kell teljesülniük:

$$|I^{(K)}| \geq 2^{-l^{(K)}} \geq \left| \frac{I^{(K)}}{2} \right|.$$

Az $l^{(K)}$ hosszú kódszóhoz tartozó $2^{-l^{(K)}}$ szakasznak nyilván rövidebbnek kell lennie az intervallum hosszánál (az intervallumnak *pozíciója* is van), de nem kell, hogy rövidebb legyen, mint az intervallum fele. (Így még a legszerencsétlenebb helyzetben is beleesik az intervallumba a kódszóhoz tartozó szakasz.)

Vegyük a fenti egyenlőtlenség logaritmusát és rendezzük egy kicsit:

$$-\log_2 |I^{(K)}| \leq l^{(K)} \leq -\log_2 \left| \frac{I^{(K)}}{2} \right|$$

A forrás-fánál megmutattuk, hogy a K hosszúságú szimbólumsorozat által kijelölt intervallum a sorozatban szereplő szimbólumok valószínűségeinek a szorzata. Jelölje $p_i^{(K)}$ az i -edik K hosszúságú forrás-sorozat valószínűségét, akkor az egyenlőtlenség az alábbi lesz:

$$\log_2 \frac{1}{p_i^{(K)}} \leq l_i^{(K)} \leq \log_2 \frac{1}{p_i^{(K)}} + 1.$$

A negatív előjel természetesen eltűnt, mert a nevezőbe írtuk a valószínűséget, a jobboldalon pedig a plusz 1 a nevezőben lévő 2-es logaritmusából adódott.

Az utolsó lépésben számítsuk ki az egyenlőtlenségben szereplő mennyiségek átlagértékeit, az összes lehetséges K hosszúságú sorozatra:

$$\sum_{i=1}^{2^K} p_i^{(K)} \cdot \log_2 \frac{1}{p_i^{(K)}} \leq \sum_{i=1}^K p_i^{(K)} \cdot l_i^{(K)} \leq \sum_{i=1}^{2^K} p_i^{(K)} \cdot \log_2 \frac{1}{p_i^{(K)}} + 1.$$

A baloldalon a K hosszúságú sorozatok entrópiája szerepel, középen az átlagos kódszóhossz, a jobboldalon pedig az entrópia plusz egy. Ha egy forrás-szimbólumra számítjuk a fentieket, akkor a következőt kapjuk:

$$H(P) \leq \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{2^K} p_i^{(K)} \cdot l_i^{(K)} \leq H(P) + \frac{1}{K}.$$

Az összefüggés korábbról ismerős, és azt mondja, hogy az aritmetikai kód aszimptotikusan optimális, mert a kódolt sorozat hosszának növekedésével az egy forrás-szimbólumra eső átlagos kódszóhossz a forrás entrópiájához tart.

Természetesen az elmondottakat nem csak bináris forrásra lehet alkalmazni. Ugyanakkor azt is látni kell, hogy kód készítése még számos technikai probléma megoldását igényli, amelyeket az elmúlt évtizedekben el is végeztek. Elemi, illusztratív példák [itt](#) láthatók.

Megjegyzések

Az entrópiáról elmondottakat nem csak bináris kód esetére lehet alkalmazni, de itt nem mutatjuk meg a viszonyokat m -áris kódra, valamint csupán megemlítjük azt is, hogy voltak kísérletek nem-bináris információ-mértékegység bevezetésére, amit egyszerűen eltérő alapszámú logaritmus képzésével kaphatunk.

Fontosabb megjegyzés viszont az alkalmazott forrás-moddal kapcsolatos. Kétségtelenül a diszkrét, memóriátlan modell a legegyszerűbb, és tanulságos eredményekre vezet, de elég ritka, hogy valóságos forrást jól közelítsen. A természetes, diszkrét források, mint például élő nyelvek írott formái nem memóriátlanul használják az egymást követő szimbólumaikat. Számos modellt konstruáltak ilyen esetekre, de ezek vizsgálatával itt nem foglalkozunk. Folytonos értékészletű források leírásánál fogjuk az „emlékezetet” tekintetbe venni.

Folytonos források üzeneteinek leírása

Ha feltesszük azt a kérdést, hogy érzésünk szerint mennyi információhoz jutunk, ha meghallgatunk egy általunk ismert nyelven tartott 1 órás előadást, garantálhatjuk, hogy senki sem fogja erre azt válaszolni, hogy végtelen sok információhoz juthat, de ugyancsak meglepődhetünk, ha valaki erre azt válaszolja, hogy kb ennyi-meg-ennyi bit. És mit válaszolnánk mi? Az alábbiakban elsősorban erre a kérdésre szeretnénk az érzéseknél mélyebb választ adni.

Használjuk fel az eddigi ismereteinket! Tekintsünk egy forrást, amelynek kimenetén folytonos eloszlású jel jelenik meg! Tételezzük fel, hogy a jelből vett (természetesen folytonos eloszlású) minták függetlenek! Határozzuk meg ennek a forrásnak az entrópiáját olyan módon, hogy a minták értékeinek kis Δa nagyságú szakaszaira vonatkozó valószínűséget $\Delta a \cdot f(a_i)$ -vel adjuk meg (integrál helyettesítő téglány). Ezáltal valójában a folytonos eloszlású forrást egy diszkrét eloszlású forrással közelítjük. Helyettesítsük be a fenti szorzatokat az entrópia kifejezésébe!

$$\begin{aligned} H(A) &= \sum_A P(a_i) \cdot \log_2 \frac{1}{P(a_i)} = \sum_A f(a_i) \cdot \Delta a \cdot \log_2 \frac{1}{f(a_i) \cdot \Delta a} = \\ &= \sum_A f(a_i) \cdot \Delta a \cdot \left(\log_2 \frac{1}{f(a_i)} - \log_2(\Delta a) \right) = \\ &= \sum_A f(a_i) \cdot \log_2 \frac{1}{f(a_i)} \Delta a - \log_2(\Delta a) \cdot \sum_A f(a_i) \cdot \Delta a \end{aligned}$$

Csökkentsük Δa értékét minden határon túl!

$$H(A) \Rightarrow \int_A f(a) \cdot \log_2 \frac{1}{f(a)} da - \log_2(0)$$

Az eredmény igen érdekes, és jól értelmezhető: (i) az entrópiára kapott kifejezés első tagja azt mondja, hogy egy folytonos forrás által kibocsátott információnak van egy, a forrás által kibocsátott jel eloszlásától függő jellemzője. Ezt *differenciális entrópiának* nevezik. (ii) a második tag pedig rámutat arra, hogy a folytonos források, vagy a belőlük származó analóg jelek végtelen sok információt hordozhatnak, HA KÉPESEK LENNÉNK A JELEKET VÉGTELEN PONTOSSÁGGAL, ÉS ZAVAROKTÓL MENTESEN AZONOSÍTANI, KEZELNI, TÁROLNI, FELDOLGOZNI.

Természetesen jól tudjuk, hogy ez képtelenség, és nem is törekszünk a végtelen pontosságú kezelésre, hanem Δa értékét véges nagyságúra választjuk, amikor a folytonos értékészletű mintákat kvantáljuk:

$$H(A) = \int_A f(a) \cdot \log_2 \frac{1}{f(a)} da - \log_2(\Delta a),$$

ahol a Δa az úgynevezett kvantálási lépcső, amit korábban már q -val jelöltünk. Az egyenletes kvantálót vizsgáltuk, ahol a $\pm C$ -re korlátozott értékészletű jelet $2 \cdot N$ értékre kerekítettük, a $q = C/N$ kerekítési lépcsővel. Ha N értéke elég nagy, akkor a kerekítés által okozott négyzetes

középhiba (más néven kvantálási torzítás) jó közelítéssel $\mathbf{M} \nu_0^2 = \frac{q^2}{12}$ -re adódott. Amennyiben

a kvantált folytonos forrás entrópiáját akarjuk megadni, akkor a fentiek felhasználásával a következőt kapjuk:

$$H(A) = \int_A f(a) \cdot \log_2 \frac{1}{f(a)} da - \log_2(\sqrt{12 \cdot \mathbf{M} \nu_0^2}).$$

Az entrópiát tehát a forrás eloszlása és kvantálási torzítás határozzák meg. Növekvő torzítás csökkenő entrópiát eredményez.

A kapott kifejezést „figyelmesen” kell használni, mert a különbség a logaritmus alatti hányadosból származik. Ennek az a következménye, hogy a logaritmusok argumentumában mértékegységgel rendelkező számok vannak, tehát valójában csak a hányadosuk logaritmusá képezhető.

Nézzük a legegyszerűbb példát! Legyen egyenletes az eloszlás $\pm C$ -ben, és nulla azon kívül, valamint kerekítsünk $2N$ szintre egyenletesen! Ekkor:

$$H(\text{egyenletes}) = \int_{-C}^C \frac{1}{2C} \cdot \log_2(2C) da - \log_2\left(\frac{2C}{2N}\right) = \log_2(2C) - \log_2\left(\frac{2C}{2N}\right) = \log_2(2N) = n,$$

ahol a kvantálásnál feltételezett $2N=2^n$ -el éltünk. A kapott eredmény összhangban van a korábbiakkal: azaz n bináris számjegy szükséges a fenti jelből vett független minták $\mathbf{M} \nu_0^2$ hibával történő leírásához, mivel az ekkora hibával kerekített egyenletes eloszlású forrás entrópiája $\log_2(2N)$.

Vegyünk még egy példát! Legyen a $\pm C$ -beli eloszlás lineárisan csökkenő nullától $\pm C$ -ig!

$$\begin{aligned} H(\text{csökken}) &= \int_{-C}^0 \frac{a+C}{C^2} \cdot \log_2\left(\frac{C^2}{a+C}\right) da + \int_0^C \frac{-a+C}{C^2} \cdot \log_2\left(\frac{C^2}{-a+C}\right) da - \log_2\left(\frac{C}{N}\right) = \\ &= \log_2 C + \frac{1}{2 \cdot \ln 2} - \log_2 \frac{C}{N} = \log_2 N + \frac{1}{2 \cdot \ln 2} = n - 1 + \frac{1}{2 \cdot \ln 2} = n - 0,28. \end{aligned}$$

Az eredmény összhangban van a várakozásunkkal: egyenlőtlen eloszlás kevesebb információt képvisel, mint az egyenletes.

A későbbiekben még visszatérünk a differenciális entrópiához, amely tehát a forrást jellemzi, hiszen a fenti példákban is mutatják, hogy a levonandó mennyiség csak a megengedett kvantálási zajtól függ.

Üzenetek tömörítése

A digitális források üzeneteinek tömörítési módszereit megismertük. Analóg (folytonos) források üzeneteinek tömöríthetőségében vannak sajátos lehetőségek, amelyre korábban már utaltunk, amikor azt mondtuk, hogy a forrás „belső kötöttségei” által nyújtott lehetőségeket itt fogjuk vizsgálni. A belső kötöttségek alatt azt értjük, hogy természetes digitális források (például élő nyelv írott változata) nem egymástól függetlenül generálják az egymást követő szimbólumokat, vagy folytonos források esetén nem függetlenek az egymást követő minták értékei.

Üzenetek továbbítása

Az eddigiekben meghatároztuk, hogy mennyi információt képesek kibocsátani a források, valamint azt, hogy az üzeneteket miként tudjuk az információjukat jól megközelítő mértékűre tömöríteni. Mostantól azzal foglalkozunk, hogy miként tudjuk ezt az információt továbbítani.

- % -

Jöjjen a régi \mathcal{C} -es Csatorna-kapacitás-a

- % -

Folytonos csatorna

Miután megismerkedtünk a csatorna-kapacitás fogalmával, és példát is láttunk a legegyszerűbb csatorna modell esetére, vizsgáljuk meg kicsit bonyolultabb, de szintén nagyon fontos modellek esetén a kapacitást!

A csatorna kimenetének és bemenetének a kapcsolatát leíró kölcsönös információ kifejezése: $I(A;B) = H(A) - H(A|B)$, több különböző formában is felírható. Használjuk fel a feltételes entrópiára korábban kapott összefüggést:

$$H(A|B) = \sum_B \sum_A P(b_j) \cdot P(a_i|b_j) \cdot \log_2 \frac{1}{P(a_i|b_j)}$$

Ezáltal a kölcsönös információ

$$I(A;B) = \sum_A P(a_i) \cdot \log_2 \frac{1}{P(a_i)} - \sum_B \sum_A P(b_j) \cdot P(a_i|b_j) \cdot \log_2 \frac{1}{P(a_i|b_j)},$$

illetve kibővítvé az első tagot az alábbi módon:

$$\sum_A \sum_B P(a_i, b_j) \cdot \log_2 \frac{1}{P(a_i)} = \sum_A P(a_i) \cdot \log_2 \frac{1}{P(a_i)}$$

két kettős szumma különbségeként kapjuk a kölcsönös információt. Sőt jobban megfigyelve mindkettőben szerepel az a és b együttes valószínűsége:

$$\begin{aligned} I(A;B) &= \sum_A \sum_B P(a_i, b_j) \cdot \log_2 \frac{1}{P(a_i)} - \sum_B \sum_A P(b_j) \cdot P(a_i|b_j) \cdot \log_2 \frac{1}{P(a_i|b_j)} = \\ &= \sum_A \sum_B P(a_i, b_j) \cdot (\log_2 P(a_i|b_j) - \log_2 P(a_i)) \end{aligned}$$

A két logaritmust összevonva:

$$I(A;B) = \sum_A \sum_B P(a_i, b_j) \cdot \log_2 \frac{P(a_i|b_j)}{P(a_i)} = \sum_A \sum_B P(a_i, b_j) \cdot \log_2 \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i) \cdot P(b_j)},$$

ahol a második lépésben felhasználtuk az együttes valószínűség és a feltételes valószínűség közötti kapcsolatot. Ez az eredmény azért fontos, mert világosan megmutatja a kölcsönös információ szimmetriáját. Így „visszafelé” rendezve, a következőt is kaphatjuk:

$$I(A;B) = \sum_A \sum_B P(a_i, b_j) \cdot (\log_2 P(b_j|a_i) - \log_2 P(b_j)) = H(B) - H(B|A).$$

A kölcsönös információ kifejezésének ezt az alakját már felhasználtuk a BSC kapacitásának meghatározásakor.

Most viszont a folytonos csatorna kölcsönös információját akarjuk meghatározni. Induljunk ki a „szimmetrikus” alakból, és járjunk el ugyanúgy, mint a folytonos forrás entrópiájánál tettük:

$$I(A;B) = \sum_A \sum_B P(a_i, b_j) \cdot \log_2 \frac{P(a_i, b_j)}{P(a_i) \cdot P(b_j)} = \sum_A \sum_B f(a_i, b_j) \cdot \Delta a \cdot \Delta b \cdot \log_2 \frac{f(a_i, b_j)}{f(a_i) \cdot f(b_j)},$$

azaz helyettesítsük a valószínűségeket a sűrűségfüggvények kis részeinek integrálközelítő összegével. Vegyük észre, hogy a logaritmus alatt egy hányados van, így a $\Delta a \cdot \Delta b$ intervallum-szorzatok kiesnek. Az intervallumok méretét csökkentve, a következő összefüggést kapjuk:

$$I(A;B) = \iint_{A \times B} f(a, b) \cdot \log_2 \frac{f(a, b)}{f(a) \cdot f(b)} da db,$$

ami a kölcsönös információ a folytonos csatorna kimenete és bemenete között. A folytonos csatorna kapacitását pedig a fenti kifejezésnek a bemeneten lévő eloszlás általi maximuma adja:

$$C := \max_{f(a)} I(A;B).$$

Amennyiben meg akarjuk határozni valamilyen tulajdonságokkal rendelkező folytonos csatorna kapacitását, akkor kedvezőbb lehet a kölcsönös információnak a diszkrét csatornánál is használt kifejezése, amely két entrópia különbsége:

$$\begin{aligned} I(A;B) &= H(A) - H(A|B) = \sum_A P(a_i) \cdot \log_2 \frac{1}{P(a_i)} - \sum_B \sum_A P(a_i, b_j) \cdot \log_2 \frac{P(b_j)}{P(a_i, b_j)} = \\ &= \sum_A f(a_i) \cdot \Delta a \cdot \left(\log_2 \frac{1}{f(a_i)} - \log_2(\Delta a) \right) - \sum_B \sum_A f(a_i, b_j) \cdot \Delta a \cdot \Delta b \cdot \log_2 \frac{f(b_j) \cdot \Delta b}{P(a_i, b_j) \cdot \Delta a \cdot \Delta b} = \\ &= \sum_A f(a_i) \cdot \Delta a \cdot \left(\log_2 \frac{1}{f(a_i)} - \log_2(\Delta a) \right) - \sum_B \sum_A f(a_i, b_j) \cdot \Delta a \cdot \Delta b \cdot \left(\log_2 \frac{f(b_j)}{f(a_i, b_j)} - \log_2(\Delta a) \right) = \\ &\Rightarrow \int_A f(a) \cdot \log_2 \frac{1}{f(a)} da - \log_2(\Delta a) - \iint_{A \times B} f(a, b) \cdot \log_2 \frac{f(b_j)}{f(a_i, b_j)} da db + \log_2(\Delta a) = \\ &= \int_A f(a) \cdot \log_2 \frac{1}{f(a)} da - \iint_{A \times B} f(a, b) \cdot \log_2 \frac{f(b_j)}{f(a_i, b_j)} da db \end{aligned}$$

Eredményünk, összhangban az előzővel, azt mutatja, hogy a folytonos csatorna kapacitásának meghatározásánál nincs végtelenhez tartó tag, miként a folytonos forrás entrópiájánál, mert a különbséget képező bemeneti entrópia és a feltételes entrópia egyaránt tartalmazza a végtelenhez tartó $\log_2(\Delta a)$ tagot, és így kiesik.

Differenciális entrópia

A folytonos csatorna kapacitásánál tehát megmarad a *differenciális entrópia*, amelynek fontos szerepe van a kölcsönös információ maximumának meghatározásában. Jelenleg ezért megvizsgáljuk, hogy mennyi a különböző eloszlások differenciális entrópiája. Az

összehasonlításnál fontos megkötés, hogy megegyező négyzetes várhatóértékű eloszlásokat vegyünk tekintetbe.

Nézzük először a legegyszerűbbet, az egyenletes eloszlást! Jelöljük σ -val a négyzetes várhatóértéket, A -val a nullára szimmetrikus eloszlás terjedelmét. Ezzel a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\sigma^2 = \int_{-A}^A x^2 \cdot \frac{1}{2A} dx = \frac{A^2}{3} \Rightarrow A = \sqrt{3} \cdot \sigma; f(x) = \frac{1}{2\sqrt{3} \cdot \sigma}, \text{ ha } x \in [-A, A], 0 \text{ egyébként.}$$

A differenciális entrópia pedig:

$$H_e(x) = \int_{-\sqrt{3} \cdot \sigma}^{\sqrt{3} \cdot \sigma} \frac{1}{2\sqrt{3} \cdot \sigma} \log_2(2\sqrt{3} \cdot \sigma) dx = \log_2(2\sqrt{3} \cdot \sigma) = \log_2 \sigma + 1,7925.$$

A következő legyen az úgynevezett Laplace eloszlás! Ez lényegesen különbözik az előzőtől abban, hogy nem korlátos az ilyen eloszlású jel értéke:

$$f_L(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}.$$

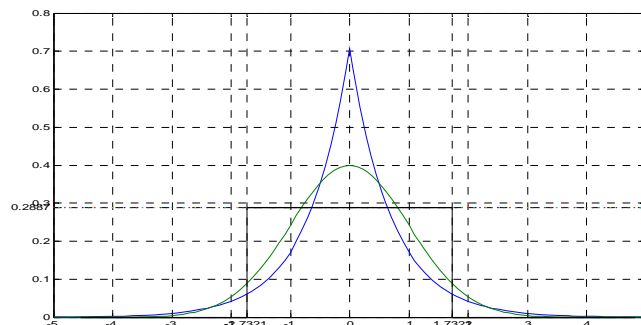
A differenciális entrópia:

$$H_L(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_L(x) \log_2\left(\frac{1}{f_L(x)}\right) dx = \log_2(\sqrt{2} \cdot e \cdot \sigma) = \log_2 \sigma + 1,9427$$

Az utolsó példánk pedig a bizonyíthatóan legnagyobb differenciális entrópiájú Gauss eloszlás:

$$H_G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \log_2\left(\frac{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}{e^{-x^2/2\sigma^2}}\right) dx = \log_2(\sqrt{2\pi} \cdot e \cdot \sigma) = \log_2 \sigma + 2,0471.$$

Illusztrációként mellékelten vázoljuk a fenti három eloszlás sűrűségfüggvényét egységnyi szórás esetére:



Digitális bemenetű és analóg kimenetű csatorna-modell

Feltétlenül érdekes az a csatornamodell, amelynek bemenetén digitális szimbólumok vannak, a kimenetén viszont még nem a digitális szimbólumok jelennek meg, hanem az ezeket megelőző analóg jelek, amelyek a bemeneti szimbólumok leírására használt jeleknek a csatornában fellépő zaj által módosított megfelelői. Ez a modell alkalmas annak értékelésére, hogy a vizsgált csatornát követő döntőkészülék mennyire képes kihasználni a csatorna által nyújtott lehetőségeket.

A csatornkapacitás kifejezésében a kimenetre vonatkozóan kell a folytonosra történő átmenetet elvégezni:

$$I(A;B) = \sum_A \sum_B P(a_i) \cdot P(b_j|a_i) \cdot \log_2 \frac{P(b_j|a_i)}{P(b_j)} = \sum_A \sum_B P(a_i) \cdot f(b_j|a_i) \cdot \Delta b \cdot \log_2 \frac{f(b_j|a_i) \cdot \Delta b}{f(b_j) \cdot \Delta b}$$

Ha Δb tart 0-hoz, akkor a második összeg integrálba megy át:

$$I(A;B) = \sum_A \int_B P(a_i) \cdot f(b|a_i) \cdot \log_2 \frac{f(b|a_i)}{f(b)} db.$$

A digitális \rightarrow folytonos csatorna kapacitásának kifejezése pedig nyilván a kölcsönös információnak a bemeneti eloszlás szerint vett maximuma lesz:

$$C_{d \rightarrow f} = \max_{P(a)} \sum_A \int_B P(a_i) \cdot f(b|a_i) \cdot \log_2 \frac{f(b|a_i)}{f(b)} db$$

Jellegzetes példaként vizsgáljuk meg a bináris bemenetű, additív, fehér- Gauss-zajú, memóriátlan csatorna kapacitását!

$$C_{b \rightarrow f} = \max_{P(a)} \left\{ p_0 \int_B f(b|0) \cdot \log_2 \frac{f(b|0)}{f(b)} db + p_1 \int_B f(b|1) \cdot \log_2 \frac{f(b|1)}{f(b)} db \right\},$$

Ahol p_0 és p_1 jelölik a két szimbólum, azaz **0** és **1** a-priori valószínűségeit.

Az egyszerűség kedvéért legyen U és $-U$ a két bináris szimbólumot leíró két elemi jel! A feltételes sűrűség-függvények a következők lesznek:

$$f(b|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(b-U)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{és} \quad f(b|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(b+U)^2}{2\sigma^2}}.$$

Szükség van még a kimenő jel feltétel-nélküli eloszlására is, amit az alábbi módon kaphatunk meg:

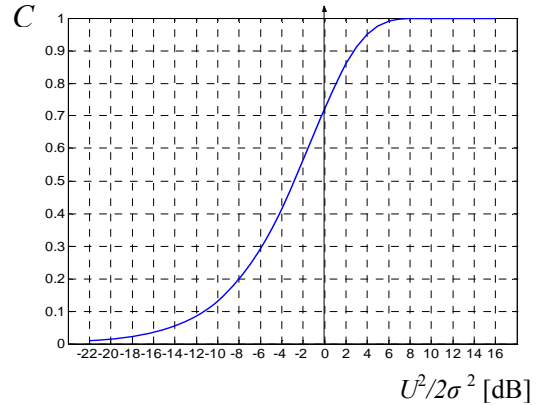
$$f(b) = \sum_A f(b|a_i) \cdot P(a_i) = p_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(b-U)^2}{2\sigma^2}} + p_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(b+U)^2}{2\sigma^2}}.$$

Behelyettesítve a kapacitás kifejezésébe:

$$C_{b \rightarrow f} = \max_{P(a)} \left\{ p_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(b-U)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log_2 \frac{e^{-\frac{(b-U)^2}{2\sigma^2}}}{p_0 \cdot e^{-\frac{(b-U)^2}{2\sigma^2}} + p_1 \cdot e^{-\frac{(b+U)^2}{2\sigma^2}}} db + \right. \\ \left. + p_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(b+U)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log_2 \frac{e^{-\frac{(b+U)^2}{2\sigma^2}}}{p_0 \cdot e^{-\frac{(b-U)^2}{2\sigma^2}} + p_1 \cdot e^{-\frac{(b+U)^2}{2\sigma^2}}} db \right\} = \\ = \max_{P(a)} \left\{ -\frac{p_0}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(b-U)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log_2 \left(p_0 + p_1 \cdot e^{-\frac{4bU}{2\sigma^2}} \right) db - \frac{p_1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(b+U)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log_2 \left(p_1 + p_0 \cdot e^{-\frac{4bU}{2\sigma^2}} \right) db \right\}$$

Sajnos az integráloknak nincs zárt alakjuk, csak numerikusan értékelhetők ki. A maximumot kapjuk, ha $p_0 = p_1 = 1/2$. Ekkor:

$$C_{b \rightarrow f} = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(b-U)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{4bU}{2\sigma^2}} \right) db - \\ -\frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(b+U)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{4bU}{2\sigma^2}} \right) db = \\ = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(b-U)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log_2(1 + e^{-\frac{4bU}{2\sigma^2}}) db - \\ -\frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(b+U)^2}{2\sigma^2}} \cdot \log_2(1 + e^{-\frac{4bU}{2\sigma^2}}) db$$



Az ábra a vizsgált csatorna kapacitását mutatja a jel-zaj viszony függvényében. Leolvashatjuk, hogy például 0 dB jel-zaj viszonynál mintegy 0,7 bit vihető át a csatornán szimbólumonként, viszont 7÷8 dB jel-zaj viszonynál a kapacitás teljesen megközelíti az 1 bit/szimbólumot.

Analóg bemenetű és analóg kimenetű csatorna-modell

Ezt a modellt tekinthetjük a legáltalánosabbnak abban értelemben, hogy mind a bemenetén, mind a kimenetén az elektronikus hírközlésben használt jeleket veszi tekintetbe.

Az egyszerűség, illetve a kezelhetőség kedvéért most is additív, fehér Gauss zajú és memóriátlan csatornát tételezünk fel.

Csak ismétlésként leírjuk az alapvető összefüggéseket a kapacitásra, illetve a kölcsönös információra:

$$C := \max_{f(a)} I(A; B)$$

$$I(A; B) = \iint_{A B} f(a, b) \cdot \log_2 \frac{f(a, b)}{f(a) \cdot f(b)} da db$$

$$I(A; B) = \int_A f(a) \cdot \log_2 \frac{1}{f(a)} da - \iint_{A B} f(a, b) \cdot \log_2 \frac{1}{f(a|b)} da db$$

Egy kis lépéssel továbbmenve, bevezetjük a bemenet és a kimenet *együttes entrópiá-ját*:

$$H(A, B) = \iint_{A B} f(a, b) \cdot \log_2 \frac{1}{f(a, b)} da db$$

Jól látszik, hogy ez szoros kapcsolatban van a feltételes entrópiával:

$$H(B|A) = \iint_{A B} f(a, b) \cdot \log_2 \frac{f(a)}{f(a, b)} da db =$$

$$= \iint_{A B} f(a, b) \cdot \log_2 \frac{1}{f(a, b)} da db - \int_A f(a) \cdot \log_2 \frac{1}{f(a)} da db = H(A, B) - H(A)$$

Illetve:

$$H(A, B) = H(A) + H(B|A) \stackrel{\text{vagy}}{=} H(B) + H(A|B).$$

A bemenet és kimenet együttes entrópiája a bemenet entrópiája plusz a kimenetnek a bemenetre vonatkozó feltételes entrópiája, vagy fordítva: a kimenet entrópiája plusz a bemenetnek a kimenetre vonatkozó feltételes entrópiája.

Most vegyük figyelembe, hogy a kimeneti valószínűségi változó nem más, mint a bemeneti plusz a zaj:

$$b = a + z,$$

ahol z jelöli az additív, jeltől független, fehér, gaussi zajt. Ha ezt behelyettesítjük az együttes entrópia fenti kifejezésébe, akkor a következőt kapjuk:

$$H(A, B) = H(A, A + Z) = H(A, Z) = H(A) + H(Z|A) = H(A) + H(Z).$$

(Csak emlékeztetőül: a nagybetűk az eloszlást, míg a kicsik a valószínűségi változót jelölik.) Értelmezve a kapott összefüggést: ha a kimeneti valószínűségi változó a bemeneti plusz a zaj, akkor a bemenet és a kimenet együttes entrópiája a bemeneti entrópia plusz a zajnak a bemenetre vonatkozó feltételes entrópiája. Viszont, ha a és z független, akkor együttes entrópiájuk az entrópiáik összege lesz..

Korlátos átlagteljesítményű, additív zajú, analóg csatorna.

A teljesítménykorlát bevezetése nagyon fontos a modell gyakorlati értéke szempontjából, hiszen korlátlan teljesítménnyel bármekkora zajt le lehetne győzni.

Az előbbieken a független additív zajú csatorna esetén az együttes entrópiára két különböző összeget kaptunk.

$$H(A, B) = H(A) + H(Z) = H(B) + H(A|B).$$

Rendezve a jobboldali egyenletet, egy kifejezést kapunk a kölcsönös információra. Ennek maximuma a csatorna kapacitása:

$$I(A; B) = H(A) - H(A|B) = H(B) - H(Z).$$

A levonandó entrópia az additív Gauss zajé, amelyet korábban kiszámoltunk, így csak a kimenő valószínűségi változó entrópiáját kell maximálni.

A kimenő valószínűségi változó egyenlő a bemenő plusz az additív zaj. Ha valamilyen megszorítást teszünk a bemenő valószínűségi változóra, akkor igen egyszerű és szemléletes összefüggést kaphatunk. Tegyük megszorítást a négyzetes várhatóértékre! Ez gyakorlatilag is hasznos:

$$\mathbf{M}(b^2) = \mathbf{M}(a^2) + \mathbf{M}(z^2)$$

A kimenet entrópiája akkor maximális, ha b Gauss eloszlású. Mivel a zajról azt tételeztük fel, hogy gaussi, ezért akkor kapunk maximális csatornkapacitást a kimenet limitált négyzetes várhatóértéke mellett, ha a is Gauss eloszlású:

$$H(B) = \frac{1}{2} \log_2 [2\pi \cdot e \cdot \mathbf{M}(b^2)] = \frac{1}{2} \log_2 [2\pi \cdot e \cdot (S + N)],$$

ahol S jelöli a bemenő jel négyzetes várhatóértékét, és N az additív zajét! Behelyettesítve a kölcsönös információ fenti kifejezésébe:

$$I(A; B) = H(B) - H(Z) = \frac{1}{2} \log_2 [2\pi \cdot e \cdot (S + N)] - \frac{1}{2} \log_2 [2\pi \cdot e \cdot N] = \frac{1}{2} \log_2 \left[\frac{2\pi \cdot e \cdot (S + N)}{2\pi \cdot e \cdot N} \right].$$

Ezzel a kapacitás:

$$C_f = \max_{f(a)} I(A; B) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{S + N}{N} = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad [\text{bit/minta}]$$

Vegyük figyelembe a W (Hz-ben mért) sáv szélesség esetén időegységenként továbbítandó minták számát, és akkor a másodpercenként továbbítható információt kapjuk:

$$C_f = W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad [\text{bit/sec}]$$

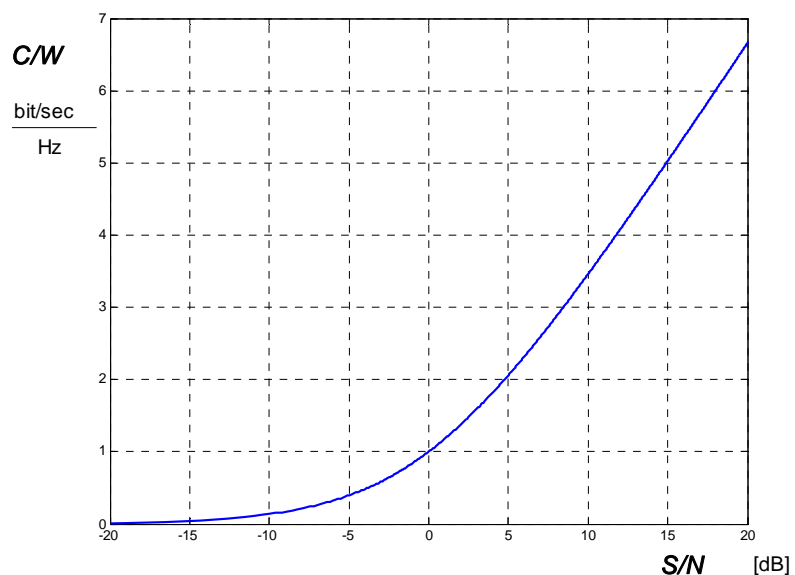
(1 Hz-et 2 minta/sec ír le, illetve 1 minta/sec $\frac{1}{2}$ Hz sáv szélességet jellemez.)

A mellékelt ábra mutatja, hogy miként változik a fenti csatorna Hz-enkénti kapacitása a jel-zaj viszony függvényében.

Egyáltalán nem meglepő, hogy amennyiben a jel-zaj viszony nő, akkor az egységnyi sáv szélességre jutó kapacitás nő.

Mivel a jel-zaj viszonyt logaritmikus léptékben ábrázoltuk, ezért nagy jel-zaj viszonyok esetén lineáris az összefüggés.

Hangsúlyozni kell, hogy a korlátozott teljesítmény miatt



a jel-zaj viszony növekedése csak a zaj csökkentése révén lehetséges.

Érdekes azt is megvizsgálni, hogy mi történik a sávzélesség változtatásakor. Ezt annak feltételezésével tegyük meg, hogy az additív, független Gauss-zaj fehér. Azaz válasszuk azt a gyakran használt, rendkívüli egyszerűsítéseket lehetővé tevő modellt, amely konstans spektrális sűrűségű $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig! Természetesen nem győzzük hangsúlyozni, hogy egy ilyen folyamat négyzetes várhatóértéke nem korlátos, tehát ilyen „zaj” nincs. Amennyiben azonban korlátos a sávzélesség (W), akkor természetesen a konstans spektrális sűrűségű folyamatból „kivágott szelet” véges négyzetes várhatóértékű lesz. Az additív zaj négyzetes várhatóértékét N -el jelöltük, amit a spektrális sűrűségből az alábbi módon kapunk:

$$N = 2B \cdot s_0 = 2W \cdot 2\pi \cdot s_0,$$

és így:

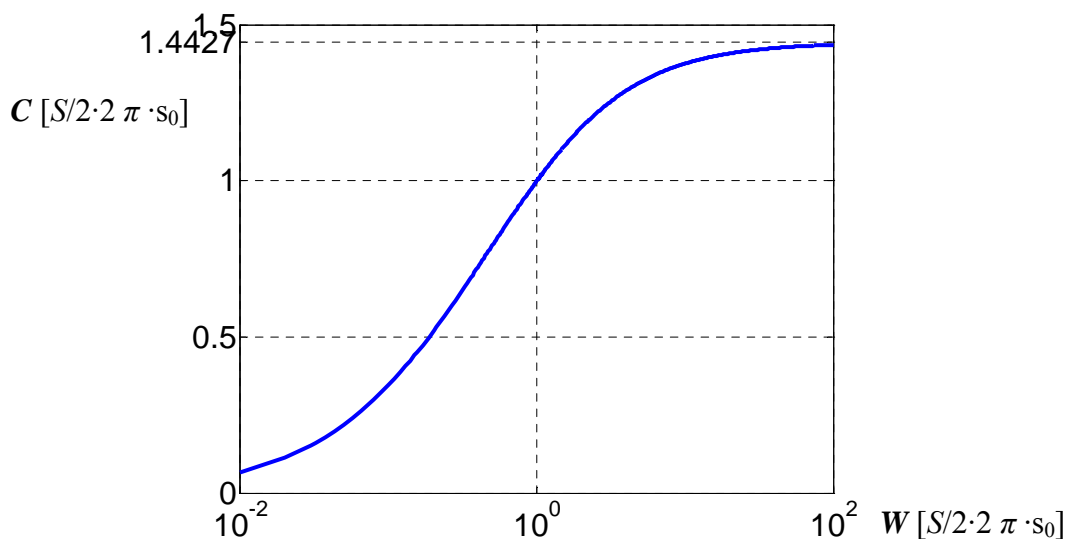
$$C_f = W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{S}{2 \cdot W \cdot 2\pi \cdot s_0} \right).$$

Itt s_0 az 1 rad/sec sávra jutó teljesítmény, így $2\pi \cdot s_0$ az 1 Hz sávra jutó. Mindkét esetben kétoldalas spektrumot tekintve. Ezeknek a duplája van egyoldalas spektrum esetén, amit intenzitás-sűrűségnek is szoktak nevezni.

Ha a sávzélesség nulla, akkor nyilván nulla a csatorna kapacitása. Ha a sávzélesség minden határon túl nő, akkor a kapacitás $1/\ln(2)$ -ször jelteljesítmény/zaj intenzitás-sűrűséghez tart:

$$\lim_{W \rightarrow \infty} C_f = \lim_{W \rightarrow \infty} W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{S}{2 \cdot W \cdot 2\pi \cdot s_0} \right) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{S}{2 \cdot 2\pi \cdot s_0}$$

Az alábbi diagramban mind a sávzélességet, mind a kapacitást $S/2 \cdot 2\pi \cdot s_0$ egységben mérjük.



Az ábrából az is jól látszik, hogy a kapacitás az $S/2 \cdot 2\pi \cdot s_0$ sávzélességig gyorsan növekszik, és ekkor eléri az $S/2 \cdot 2\pi \cdot s_0$ értékét, majd növekedése lelassul, és tart ennek az értéknek a közel másfélszereséhez. Szokták ezt az értéket határnak tekinteni, amely alatt a sávzélesség „szabadon” rendelkezésre áll, és a kapacitást a jel/zaj viszony korlátozza, felette viszont a sávzélesség válik a korlátozó tényezővé.

A most szerkesztett diagram arra a fontos ismeretre hívja fel a figyelmet, hogy miközben a csatornkapacitás az információátviteli sebesség felső határa, ennek a határnak maximuma van, amennyiben korlátos a jel-teljesítményünk.

Későbbi céljaink érdekében „húzzunk le még egy bőrt” a folytonos csatorna kapacitásának most kapott összefüggéséről! Vegyük figyelembe, hogy a digitális csatorna megvalósításakor a digitális szimbólumokat analóg jelekkel reprezentáljuk, majd ezeket a jeleket továbbítjuk az

analóg csatornán, amelynek a kimenetén lévő analóg jeleket megfigyelve, digitális szimbólumokra döntünk.

Az analóg csatorna bemenő teljesítményét szimbólum-időnként, vagy az egyszerűség kedvéért, bit-időnként leírhatjuk, a bináris szimbólumot reprezentáló jel energiája és a csatornára másodpercenként „rátehető” bináris szimbólumok számának szorzataként.

Additív zajként továbbra is a gaussi fehér zaj modellt választva, a zajteljesítmény az előbbi:

$$S = C \cdot E_b$$

$$N = 2 \cdot W \cdot 2\pi \cdot s_0$$

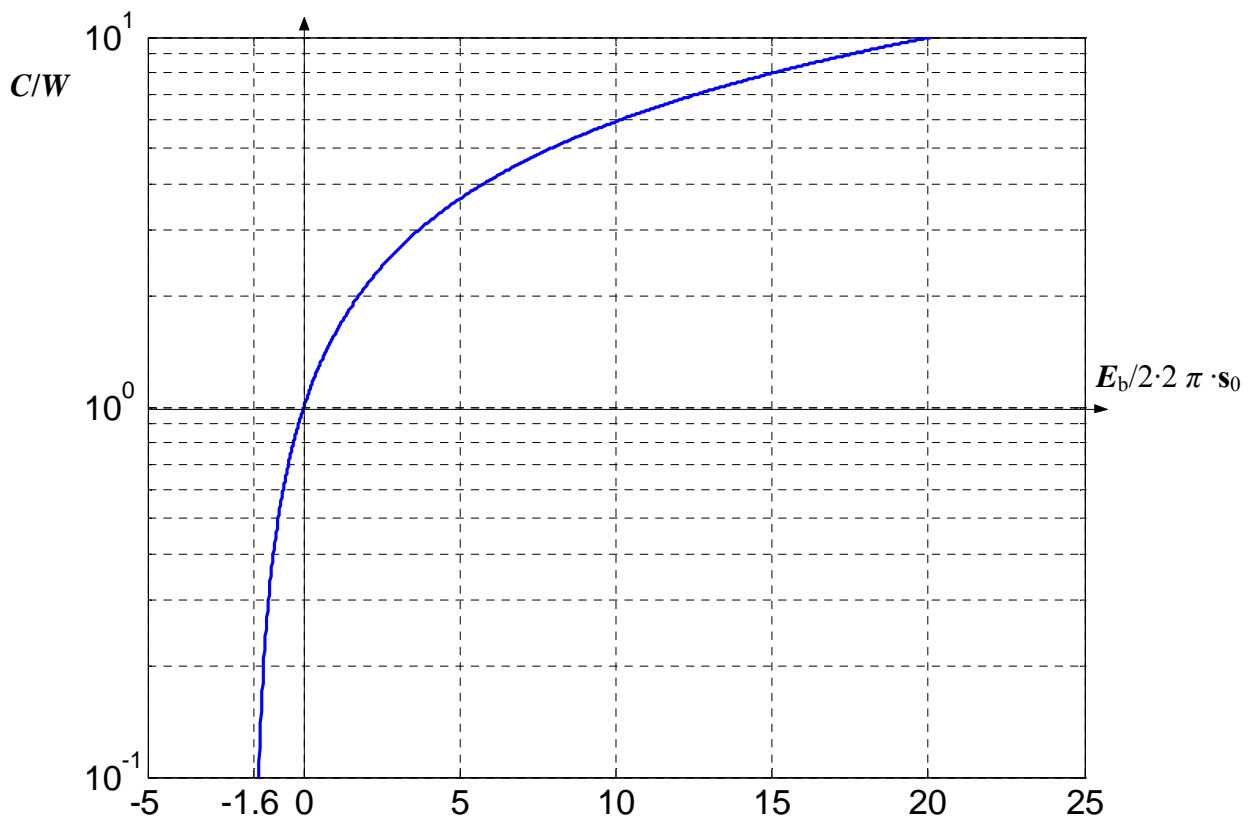
A csatornkapacitás pedig nem lehet nagyobb, mert nem „jut át több bináris szimbólum, mint a kapacitás”.

$$C \leq W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{C \cdot E_b}{2 \cdot W \cdot 2\pi \cdot s_0} \right)$$

Kis rendezés után az egyenletet $E_b/2 \cdot 2\pi \cdot s_0$ -ra megoldva, a következőt kapjuk:

$$\frac{C}{W} \leq \log_2 \left(1 + \frac{C}{W} \cdot \frac{E_b}{2 \cdot 2\pi \cdot s_0} \right) \Rightarrow 2^{C/W} \leq 1 + \frac{C}{W} \cdot \frac{E_b}{2 \cdot 2\pi \cdot s_0} \Rightarrow \frac{E_b}{2 \cdot 2\pi \cdot s_0} \geq \frac{2^{C/W} - 1}{C/W}$$

Kaptunk egy összefüggést a C/W (Hz-enkénti kapacitás) és a jelenergia/zajenergia között ($E_b/2 \cdot 2\pi \cdot s_0$). Mivel egyszerűen a C/W függvényében lehet az $E_b/2 \cdot 2\pi \cdot s_0$ -t ábrázolni, viszont valójában az inverz függvény az érdekes, szükség van egy transzformációra, amelynek eredményét mutatja az alábbi ábra:



A korlátos teljesítmény miatt -1,6 dB-nél kisebb jel-zaj viszony nem tesz lehetővé információátvitelt. Azt, hogy ezzel a határral szemben mit tudnak a hírközlési módszerek elérni, a későbbi fejezetekben vizsgáljuk meg.