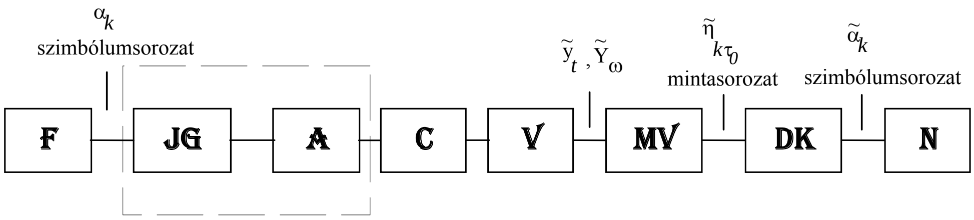
4

A SZIMBÓLUMKÖZI ÁTHALLÁS

Ebben a fejezetben a digitális hírközlésnek az additív zajon kívüli másik alapproblémájával, azaz a véges átviteli sávszélesség hatásával foglalkozunk.

Először rögzítsük le a vizsgált modellt! Ennek egy fontos elemét képviseli az adóoldalon az elemi jel előállításának modellezése, amelynél Dirac impulzusból szűréssel alkítjuk ki az elemi jelet. Ez természetesen nem a gyakorlati megvalósítás útja, de az elemi jelgenerátor ilyen módon való felbontása igen hasznos a feladat vizsgálatában. Ekkor az A-C-V jelű blokkok, azaz az ú.n. adószűrő, csatorna és vevőszűrő együttes karakterisztikája fogja meghatározni a mintavételi ponton az elemi jel spektrumát.



4.1. ábra A vizsgált modell

A véges sávszélességű átviteli út hatását a legáltalánosabban az impulzusalakú jeleknek a továbbítás során bekövetkező szétterülésével jellemezhetjük. Idegen szóval ezt diszperziónak nevezik, az ilyen csatornára (a valóságban mindegyik ilyen) azt mondják, hogy *diszperzív*. A diszperzív csatornán átjutó elemi jelek "szétterülnek" a szomszédos időrésekre is, így a vett minták, amelyekből el kell dönteni, hogy milyen szimbólumot bocsátott ki a forrás az aktuális időrésben, több szimbólumtól függhetnek. Ez röviden azt jelenti, hogy a különböző szimbólumok zajmentes mintái közötti különbségek csökkennek, a szomszéd időrésekből jövő áthallás egymáshoz közelíti az elemi jeleket. Ennek következtében a zajos minták esetén a téves döntések valószínűsége megnő.

A NYQUIST MÓDSZER

Engedjük meg az elemi jelnek a mintavétel helyén olyan "szétterülését", amelynek τ_0 időközű mintái **egy kivételével** valamennyien nulla értékűek (erre egy példa a 4.2. ábrán látható).

Vezessük be a Nyquist ekvivalens fogalmát, amivel a csatorna kimenetén, a mintavevőnél megjelenő elemi jel spektrumát jellemezzük:

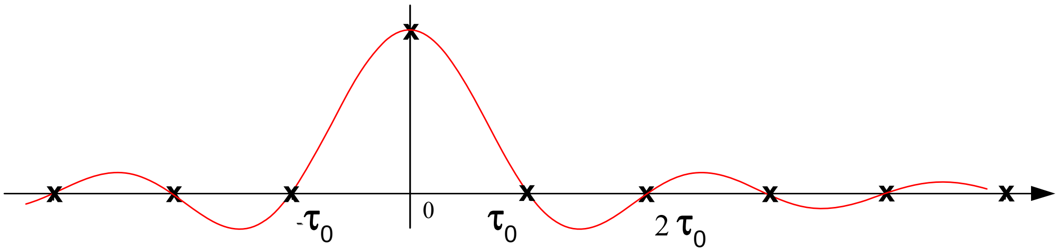
$$\tilde{Y}_\omega^{(N)} := \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{Y}_{\omega - k\frac{2\pi}{\tau_0}}, & ha\ \omega \in \left(-\frac{\pi}{\tau_0}, \frac{\pi}{\tau_0}\right) \\ 0, & egyébként \end{cases}$$

Ahol az $\tilde{Y}_\omega$ az elemi jel spektruma a döntés előtti mintavétel helyén.

Ha a mintavevőnél lévő elemi jel Fourier transzformáltjának Nyquist ekvivalense teljesíti az alábbi összefüggést, akkor a minták áthallásmentesek:

$$C_1 \cdot e^{j\omega\tau_1}$$

Hogyan lehet ezt az állítást belátni? Nézzünk egy vázlatos bizonyítást! A Nyquist módszer lényege az, hogy az elemi jelek szétterülését (diszperzióját) olyanná tegyük, amelynél az időrésenként vett minták egy kivételével mind nullát adnak. Erre mutat egy példát az alábbi ábra, ahol az **x**-ek jelölik a τ_0 időközű mintákat:



4.2. ábra Az "áthallásmentes" minták egy "szétterült" elemi jelből

A mintavétel elméletéből viszont jól tudjuk, hogy a minták spektruma az eredeti jel spektrumának a minták frekvenciája szerinti periódikus ismétlődéseinek az összege.

Ha $\tilde{y}_{k\tau_0}$ jelöli a mintákat, akkor a minták spektruma a következő: $\tilde{Y}_{\omega}^{(k\tau_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{Y}_{\omega - k\frac{2\pi}{\tau_0}}$.

Itt az $\tilde{Y}_{\omega}$ annak a jelnek a spektruma, amelyből a mintákat vesszük.

A Nyquist ekvivalens tehát nem más, mint a minták spektrumának a $\pm\pi/\tau_0$-ra csonkított része.

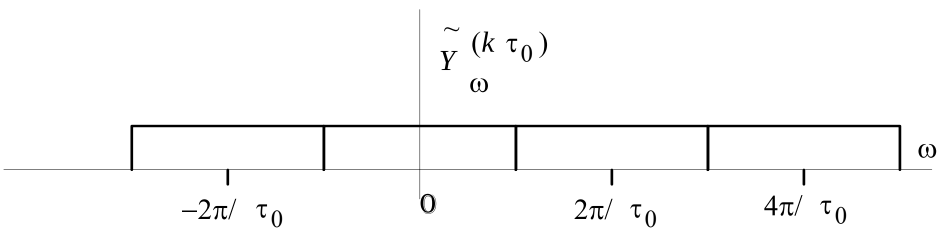
Ezek után az az alapvető kérdés, hogy milyen lehet a minták spektruma, vagy ha úgy tetszik, akkor a Nyquist ekvivalens, ha azt akarjuk, hogy a minták átmenjenek a megadott pontokon?

Először is leszögezhetjük, hogy különböző alakkal, de azonos mintákkal szétterülő jeleknek megegyező a minta-spektruma, azaz a Nyquist ekvivalense.

Másodszor pedig könnyen tudunk találni **egy** olyan függvényt, amely átmegy az adott pontokon, és ismert a Fourier transzformáltja is. Ez a függvény az

$$M_0 \frac{\sin \frac{\pi}{\tau_0} t}{\frac{\pi}{\tau_0} t}$$

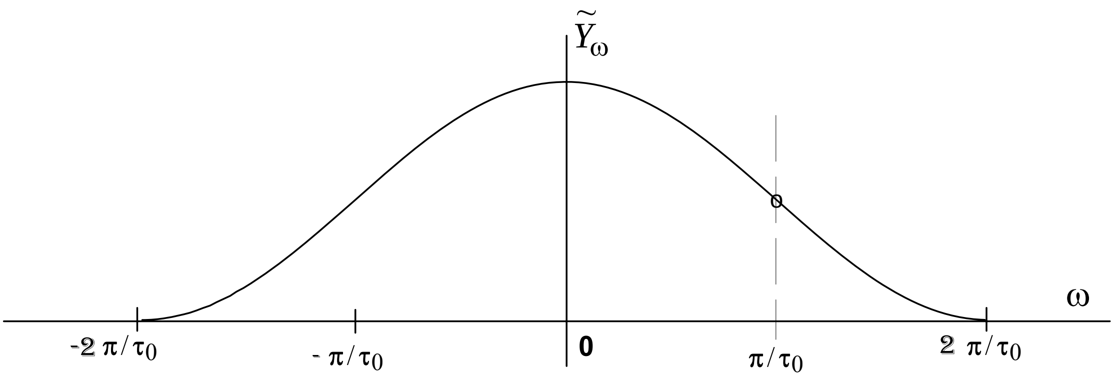
ahol M_0 a 0 időpillanatbeli minta értéke. Ennek a függvénynek a Fourier transzformáltja, azaz spektruma a $\pm\pi/\tau_0$-ig konstans, azután pedig eltűnő függvény. Ha ebből a jelből τ_0 időközönként mintákat veszünk, akkor a spektrum a következő ábrán látható lesz:



Az eddigi gondolatmenet szerint bármilyen alakú legyen is az elemi jel, ha átmegy a korábban lerögzített mintákon, akkor annak a fenti spektrummal kell rendelkeznie, tehát a Nyquist ekvivalensének konstansnak kell lenni $-\pi/\tau_0$ és π/τ_0 között.

Abban az esetben, ha a 4.2. ábrától eltérően, általános helyzetben, azaz nem a nullához kötötten vesszük a mintákat, akkor a spektrum fázisjellemzői is megjelennek és - itt nem részletezett módon - a konstans abszolútérték mellet a lineáris fázisspektrumot adják eredményül.

A Nyquist ekvivalensre vonatkozó fenti követelménynek minden olyan spektrum eleget tesz, amely a π/τ_0-ra centrálisan szimmetrikus. Ezzel lehetővé válik a követelményeket jól közelítő átviteli karakterisztika kialakítása, amelyre egy közismert példa az "emelt koszinusz", amit az alábbi ábrán vázoltunk:

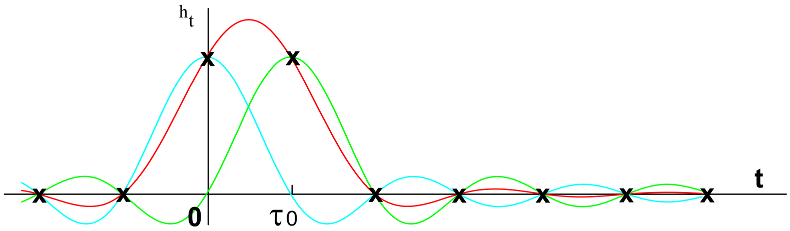


A RÉSZLEGES VÁLASZFÜGGVÉNYŰ MÓDSZER

A Nyquist módszert "teljes válaszfüggvényű" módszernek is nevezik, mert az egyes minták, mint válaszfüggvény, teljes egészében meghatározzák egy-egy szimbólumnak az összes többitől független átvitelét. De hát ez is volt a cél! Miért akarnánk - a címben jelzett módon - valami mást csinálni? Mi szükség lenne arra, hogy a minták ne teljes egészében, hanem csak "részlegesen" határozzák meg a szimbólumokat? Nyilván nem erre van szükségünk, hanem valami mást szeretnénk elérni ezen a módon.

Egyáltalán mit szeretnénk elérni? Egy természetes törekvés lehet az, hogy a π/τ_0 értékű minimálisan szükséges átviteli sávszélességet ne csak elvileg, hanem gyakorlatilag is használhassuk. Ennek érdekében engedjük meg jobban szétterülni az elemi jelet, így biztosan kisebb sávszélesség elegendő lesz. Kérdés persze, hogy tudunk-e olyan szétterülést biztosítani, amelynél az elemi jel spektruma gyakorlatilag is elfér a π/τ_0 sávban?

Tegyünk egy kísérletet! Válasszunk olyan átviteli utat, amelynek súlyfüggvénye **két** nullától különböző értékű mintát (most legyenek éppen egyenlők) tartalmaz a 0 és a τ_0 időpontokban!



Az ábrából is látjuk,

hogy ilyen görbét könnyen létrehozhatunk két, egymástól eltólt sin(x)/x összegeként. Kérdés, hogy milyen átviteli karakterisztika esetén kapunk olyan súlyfüggvényt, amelynek a mintái átmennek a megadott pontokon?

A fenti elemi jel analitikusan az alábbi lesz:

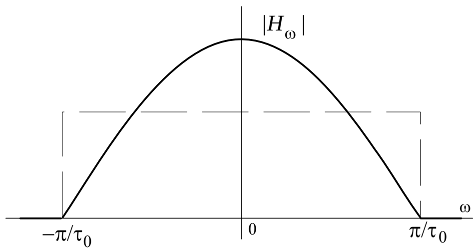
$$h_t = h_t^{(1)} + h_t^{(2)}; \quad h_t^{(1)} = h_0 \frac{\sin \frac{\pi}{\tau_0} t}{\frac{\pi}{\tau_0} t}; \quad h_t^{(2)} = h_{t-\tau_0}^{(1)}$$

Ennek a jelnek a spektrumát a következő módon határozhatjuk meg:

$$H_\omega^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} h_t^{(1)} \cdot e^{-j\omega t} dt; \quad H_\omega^{(2)} = H_\omega^{(1)} \cdot e^{-j\omega\tau_0};$$

$$H_\omega = H_\omega^{(1)} + H_\omega^{(2)} = H_\omega^{(1)}\left(1 + e^{-j\omega\tau_0}\right) = H_\omega^{(1)} e^{-j\omega\frac{\tau_0}{2}}\left(e^{j\omega\frac{\tau_0}{2}} + e^{-j\omega\frac{\tau_0}{2}}\right) = 2H_\omega^{(1)} e^{-j\omega\frac{\tau_0}{2}} \cos\left(\omega\frac{\tau_0}{2}\right)$$

Mivel $H_\omega^{(1)}$ $\pm\pi/\tau_0$-ig konstans, azután pedig eltűnik, az eredő átviteli karakterisztika a következő ábrán látható lesz. Itt szaggatott vonallal $H_\omega^{(1)}$-t is feltüntettük. Az ábrából világosan látszik, hogy a szükséges átviteli karakterisztika π/τ_0-nál nem nagyobb sávszélességű, és nincs ugrása a sávhatáron, tehát sokkal közelebb áll a realizálhatósághoz, mint az ideális aluláteresztő szűrő.



Miután a sávszélességcsökkentési célkitűzést elértük, vizsgáljuk meg, hogy mi ennek az ára. Milyen megoldandó problémát eredményez az, hogy mindegyik kimeneti minta egynél több (a példában kettő) szimbólumtól függ.

Írjuk le a mintákat a szimbólumokkal és a súlyfüggvénnyel! Az $\tilde{\eta}_{k\tau_0}$ jelölje a *k*-adik időrésben a mintát! Ekkor a jelenlegi példában a következőt kapjuk:

$$\tilde{\eta}_{k\tau_0} = \alpha_k \cdot h_0 + \alpha_{k-1} \cdot h_{\tau_0} \tag{4.1}$$

Tehát mindegyik minta értéke két forrásszimbólumtól függ, azaz a jelenlegitől és a megelőzőtől. A következő kis táblázatban összefoglaltuk a bináris esetben lehetséges mintaértékeket:

α_{k-1}	0	0	1	1
α_k	0	1	0	1
$\tilde{\eta}_{k\tau_0}$	0	h_0	h_{τ_0}	$h_0 + h_{\tau_0}$

A táblázatból világosan látszik, hogy a feltételezett válaszfüggvény eredményeként a (zajmentes) minták több, mint kétféle értéket vehetnek fel, tehát zajos esetben egy nembináris döntési feladatot kell megoldani.

A többértékű mintákkal összefüggésben van még egy további probléma is. A mintákból (a döntés után) számítással kell becslést adni az aktuális szimbólum értékére. Ezt nyilván úgy tehetjük meg, ha megoldjuk a (4.1) egyenletet α_k-ra:

$$\hat{\alpha}_k = \frac{\tilde{\eta}_{k\tau_0}}{h_0} - \hat{\alpha}_{k-1}\frac{h_{\tau_0}}{h_0} \tag{4.2}$$

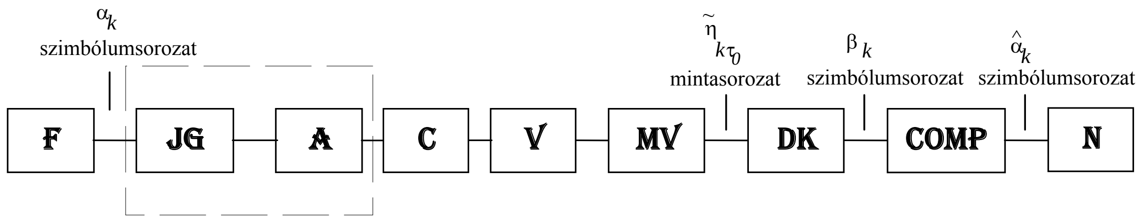
ahol a ^ jellel a becsült értéket jelöljük.

Becsléseink tévesek lehetnek egy zajos mintából végzett hibás döntés következtében, sőt az előző kifejezés világosan rámutat, hogy egy téves becslés további tévedéseket is okozhat, mert mindegyik szimbólum értékének kiszámításánál az előző szimbólum becsült értékét is fel kell használni. Ezt a jelenséget, amely az egyszer elkövetett hiba tartós hatását jelenti, hibaterjedésnek nevezik, és a részleges válaszfüggvényű módszer lényegéből következik. Természetesen ezt egy súlyos hátránynak kell tekinteni, hiszen egyetlen hiba egy hosszú tévedéssorozatot eredményez.

Felmerül a jogos kérdés: Nem lehetne ettől megszabadulni? Hiszen a tévedések terjedése nem véletlenszerűen, hanem a forrás tényleges szimbólumsorozata következtében jön létre. Nem lehet-e úgy átalakítani a szimbólumsorozatot, hogy ellensúlyozzuk a csatornában kialakuló kapcsolatokat?

A válasz pozitív, és a hibaterjedés megakadályozását lehetővé tevő ú.n. előkódolást mutatjuk most meg az adott példában.

Először vizsgáljuk meg, hogy a fenti diszperzióval rendelkelző csatorna hogyan modellezhető a bemenő szimbólumok és a kimenő szimbólumok között. A 4.1. ábrában szereplő modellt kicsit finomítjuk:

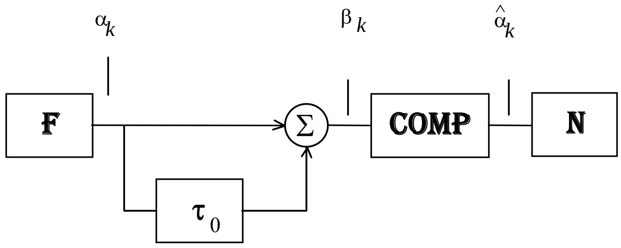


4.3. ábra A részleges válaszfüggvényű módszernél vizsgált modell

Az $\tilde{\eta}_{k\tau_0}$ mintasorozatból a DK döntőkészülék a β_k nembináris szimbólumokat állítja elő. Ezekből a szimbólumokból a COMP jelű "computer" $\hat{\alpha}_k$ bináris sorozatot számítja ki. Modellezzük a kapcsolatot az α_k sorozat és a β_k sorozat között! A (4.1) összefüggésben szereplő mintértékeket normalizáljuk h_0-ra, és jelöljük ezt β-val:

$$\beta_k = \frac{\tilde{\eta}_{k\tau_0}}{h_0} = \alpha_k + \alpha_{k-1}\frac{h_{\tau_0}}{h_0}$$

Mivel a példában h_{τ_0} egyenlő h_0-al, így a fenti összefüggés röviden: $\beta_k = \alpha_k + \alpha_{k-1}$, amit az alábbi módon szemléltethetünk:



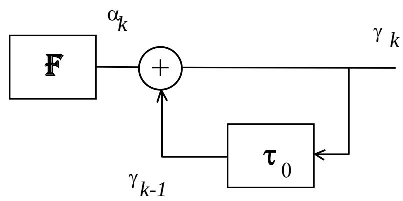
azaz α_k szimbólumok egy időrésnyi késleltetés után hozzáadódnak a jelenlegihez, és így hozzák létre β_k sorozatot.

Milyen átalakítást kellene végezni az α_k sorozatban ahhoz, hogy a β_k sorozat szimbólumai csak egy-egy α_k szimbólumtól függjenek?

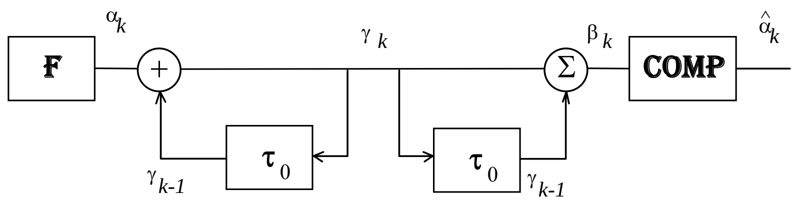
Próbáljuk ki a következőt! Vezessük be a γ_k sorozatot, mint az α_k "kódolt" változatát az alábbi módon:

$$\gamma_k = \alpha_k \oplus \gamma_{k-1}$$

ami arról juthat eszünkbe, hogy a csatornában a τ_0-al késleltetett szimbólumok adódtak össze, hátha ellensúlyozza azt egy τ_0 késleltetésű "visszacsatolás". A mod 2 összeadást pedig azért csináljuk, hogy bináris maradjon a szimbólumsorozat. Ezt az "előkódolást" a következő ábra szemlélteti.



A teljes átviteli út modellje így a következő lesz:



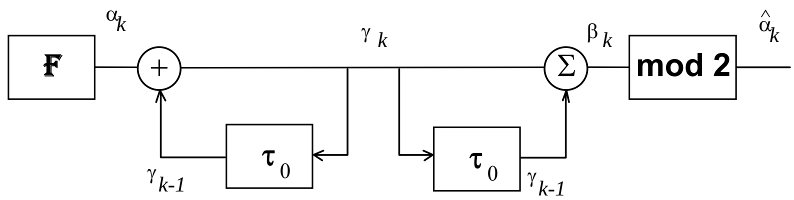
A csatornán az előkódolt γ_k sorozat jut át, tehát β_k most a következő lesz:

$$\beta_k = \gamma_k + \gamma_{k-1}$$

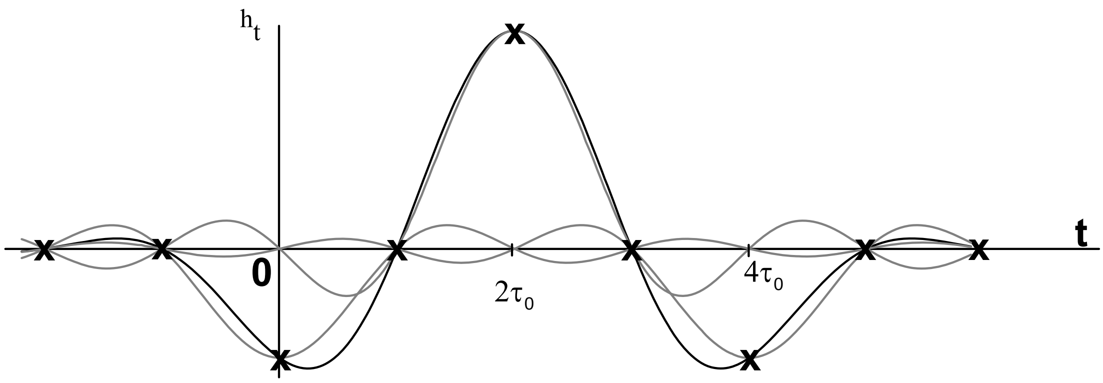
Az alábbi táblázatban megadtuk az átvitel során keletkező változókat egy adott forrás-sorozat esetére:

α_k	1	0	0	1	1	1	0	1
γ_{k-1}	0	1	1	1	0	1	0	0
$\gamma_k = \alpha_k \oplus \gamma_{k-1}$	1	1	1	0	1	0	0	1
$\beta_k = \gamma_k + \gamma_{k-1}$	1	2	2	1	1	1	0	1
β_k **mod** 2	1	0	0	1	1	1	0	1

A táblázat utolsó sorában a csatorna kimenő-szimbólumainak kettes maradékát tüntettük fel, ami - nem véletlenül - éppen megegyezik a forrás-szimbólumokkal. Ezek szerint a fenti előkódolás az adott csatornában képes megszüntetni a hibaterjedést, mert a csatorna kimenetén lévő szimbólumok egy maradékos osztás után, a korábbi szimbólum tekintetbevétele nélkül megadják a kívánt eredményt:



Végül még rámutatunk arra, hogy milyen súlyfüggvény esetén érhetünk el nulla frekvencia-mentes átvitelt, miközben az elfoglalt frekvenciasáv a $\pm\pi/\tau_0$ értéken belül marad:



$$h_t = h_t^{(1)} + h_t^{(2)} + h_t^{(3)}; \quad h_t^{(1)} = h_0 \frac{\sin\frac{\pi}{\tau_0}t}{\frac{\pi}{\tau_0}t}; \quad h_t^{(2)} = -2h_{t-2\tau_0}^{(1)}; \quad h_t^{(3)} = h_{t-4\tau_0}^{(1)}$$

Az ennek megfelelő spektrum, ahol az ábrán szaggatottal $H_\omega^{(1)}$ -t is ábrázoltuk:

$$H_\omega^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} h_t^{(1)} \cdot e^{-j\omega t} dt; \quad H_\omega^{(2)} = -2H_\omega^{(1)} \cdot e^{-j\omega 2\tau_0}; \quad H_\omega^{(3)} = H_\omega^{(1)} \cdot e^{-j\omega 4\tau_0}$$

$$H_\omega = H_\omega^{(1)} + H_\omega^{(2)} + H_\omega^{(3)} = H_\omega^{(1)}\left(1 - 2e^{-j\omega 2\tau_0} + e^{-j\omega 4\tau_0}\right) =$$
$$= H_\omega^{(1)} e^{-j\omega 2\tau_0}\left(e^{j\omega 2\tau_0} - 2 + e^{-j\omega 2\tau_0}\right) = 2H_\omega^{(1)} e^{-j\omega 2\tau_0}\left[\cos(\omega 2\tau_0) - 1\right]$$