

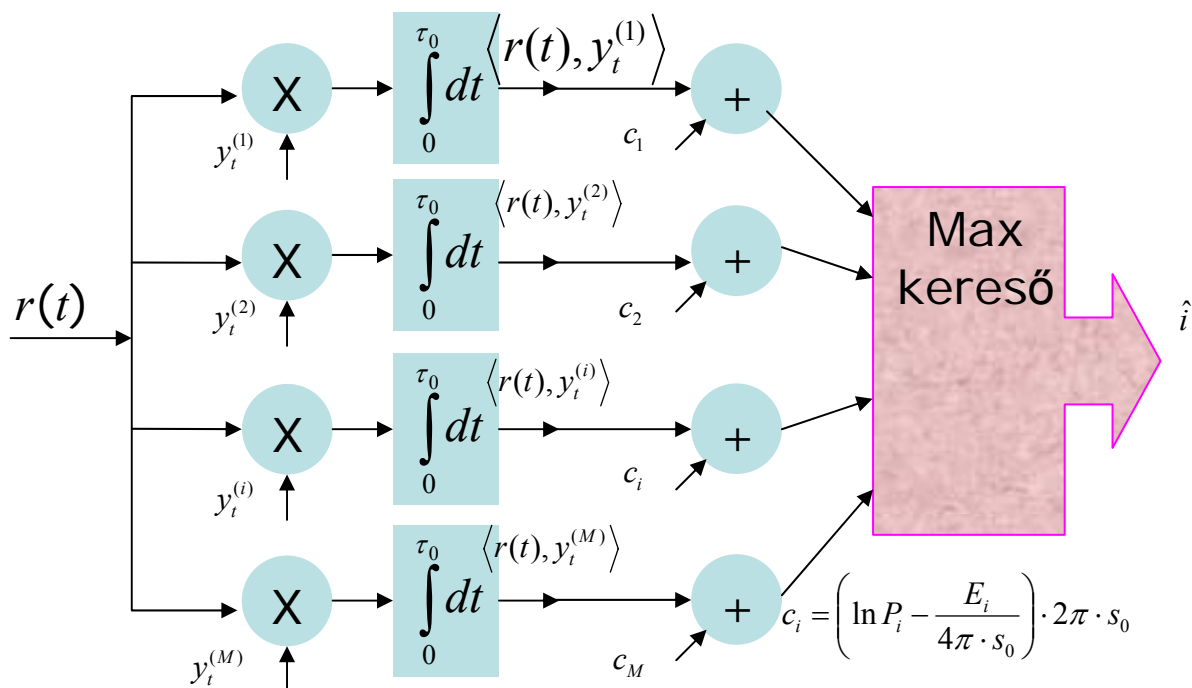
## Digitális információ-továbbítás:

### zajos csatornán, korlátozott sávszélesség mellett

A zajos jel optimális vételének meghatározásakor nem vettünk tudomást a sávszélességről. Sőt még pontosabb, ha úgy fogalmazzuk, hogy korlátlanak tekintettük a rendelkezésre álló frekvenciasávot. Ez a megközelítés több szempontból kifogásolható: (i) nem ismerünk módszereket végtelen frekvenciájú jel-összetevők keltésére, továbbítására, feldolgozására, (ii) még a technikailag kezelhető frekvenciasáv használatára is általában sok igény jelentkezik, így jellemzően meg kell osztani a rendelkezésre álló frekvenciasávot, ami az igényelt frekvenciasáv minimalizálására ösztönöz. Ugyanakkor azt is le kell szögezni, hogy vannak olyan esetek (pl úrtávközlés), amikor a legjobb eredmény érdekében szinte korlátlan frekvenciasávot használhatunk, tehát nem érdemes foglalkozni azzal, hogy az valójában véges.

### Az illesztett szűrő

A címben jelzett feladat legjobb megoldása érdekében vegyük elő azt az eredményt amit korábban a „korlátlan” sávszélességre kaptunk:



Ezek szerint a megérkező zajos jelből úgy jutunk a „legpontosabb” információhoz, ha a vett jelen szorzat-integrálokot képezünk a szimbólumokat leíró elemi jelekkel. A szorzat-integrálról viszont eszünkbe jut, hogy a lineáris időinvariáns transzformációt ezzel írhatjuk le az időtartományban. Tehát úgy is fogalmazhatunk, hogy konvolúciót kell képezni a bejövő jel és az elemi jelek között, azaz át kell bocsátani a bejövő jelet olyan szűrőkön, amelyek súlyfüggvényeit az elemi jelek határozzák meg. Ezeknek a szűrőknek (ú.n. *illesztett szűrő*) a kimenetein az időrések végein ugyanaz az érték fog megjelenni, mint a fenti ábrában szereplő integrátorok kimenetein.

Az illesztett szűrő súlyfüggvényét egy nagyon egyszerű transzformációval kapjuk meg az elemi jelből. Korábban a szűrő kimenő jelét az alábbi módon adtuk meg:

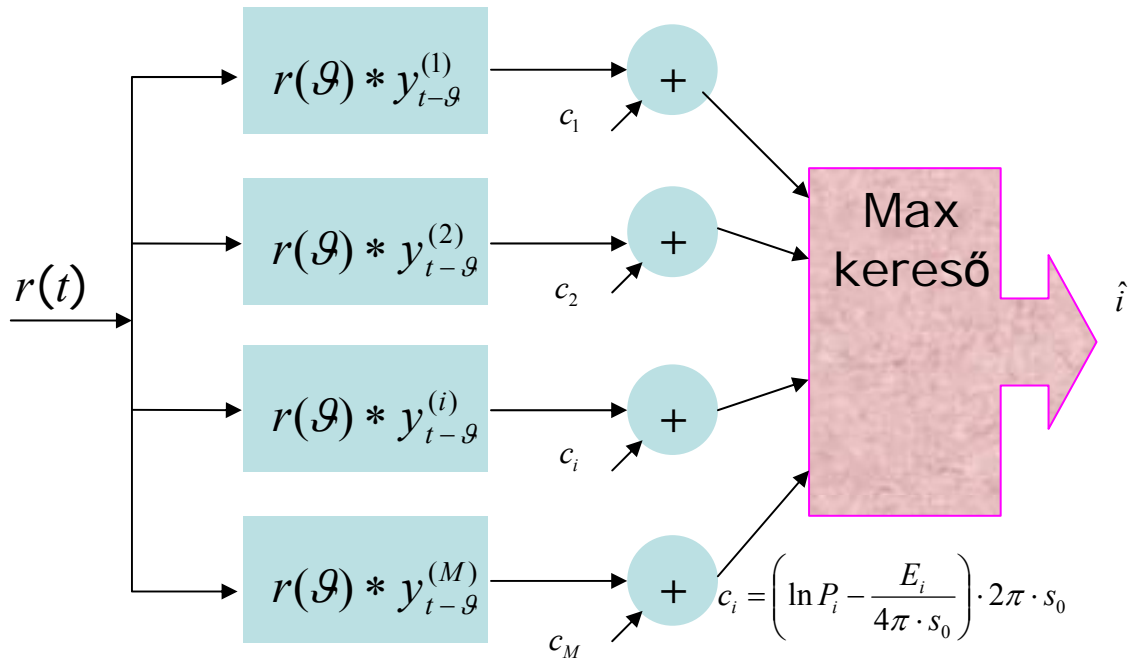
$$y_t = \int_{-\infty}^{\infty} h_g x_{t-g} d\mathcal{G},$$

ami azonosan egyenlő:

$$y_t = \int_{-\infty}^{\infty} h_{t-g} x_g d\mathcal{G}$$

Összevetve a konvolúció kifejezését a korábbi szorzat-integrállal, megállapíthatjuk, hogy a szűrő szükséges súlyfüggvénye az elemi jel időbeli tükörképe kell legyen.

A fenti felismeréssel az optimális vétel tennivalóit az alábbi módon is megadhatjuk:



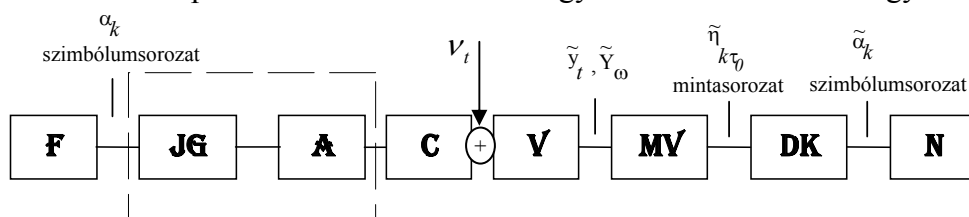
Azt nem hangsúlyoztuk a rajzon, hogy a maximum keresését az időrések végén kell végezni, mert a szűrő kimenetén ebben a pillanatban áll rendelkezésre az az érték, ami megegyezik a korábbi szorzat-integrál értékével.

### Diszperzió plusz zaj

A kapott eredmény viszonylag egyszerűen kikövetkeztethetővé teszi, hogy miként kell eljárni az optimális vétel érdekében, ha az additív zajon kívül a korlátozott sáv szélességből eredő diszperzió is akadályozza a helyes döntést.

A szimbólumközi áthallás-mentes átvitelre a Nyquist módszer szerint olyan átviteli utat kell biztosítani, amelynek konstans a Nyquist ekvivalense, tehát például emelt koszinusz átviteli karakterisztikájú.

A 4.1 ábrán szereplő vizsgált modell-t jelenleg annyival egészítjük ki, hogy a **C** csatorna kimenete és **V** vevőszűrő bemenete közé helyezzük az additív, fehér, gaussi zaj-forrást. Ily módon azt tudjuk, hogy egyrészt milyen eredő átviteli karakterisztika kell, másrészt pedig, hogy mit kell tenni az optimális vétel érdekében. Hogyan lehet a kettőt összeegyeztetni?



Amennyiben a **C** csatorna ideális (de legalább is messze nagyobb sávszélességű, mint az átvitel során használt), akkor a válasz igen egyszerű: mivel a zaj leküzdéséhez a vevőszűrő súlyfüggvénye meg kell egyezzen az adóban használt elemi jel tükörképével, amely elemi jelet viszont az adószűrő alakít ki, így az adó- és vevőszűrő karakterisztikájának megegyezőnek kell lenni. A két karakterisztika szorzata pedig ki kell, hogy elégítse a Nyquist feltételt, így egy megoldás a *négyzetgyök-emelt-koszinusz* karakterisztika használata az adóban és a vevőben egyaránt.

Amennyiben a csatorna nem tekinthető ideálisnak, vagy pedig időben nem állandó, akkor a leggyakrabban használt megoldás a fenti kiegészítése egy *kiegyenlítő* szűrővel, amelyet a vevőszűrő elé helyezve megkíséreljük az ideális csatornát „kialakítani”.

## Illusztratív megfontolások a megvalósíthatóságról

Mérnöki beállítottságú ember számára az egész fenti elmélet kicsit gyanús lehet, mert az eredmények szerint a szükséges lineáris időinvariáns transzformációk nem kauzálisak, azaz súlyfüggvényük nem azonosan nulla a negatív oldalon. Persze hamar eszünkbe jut az is, hogy a transzformáció egyúttal nulla késleltetésű, ami a megvalósítható gyakorlatot tekintve szintén lehetetlen. A kettő együtt viszont lehetővé teszi a jó gyakorlati megközelíthetőséget:

- legyen pozitív a transzformáció késleltetése, és
- csonkítsuk a súlyfüggvényt!

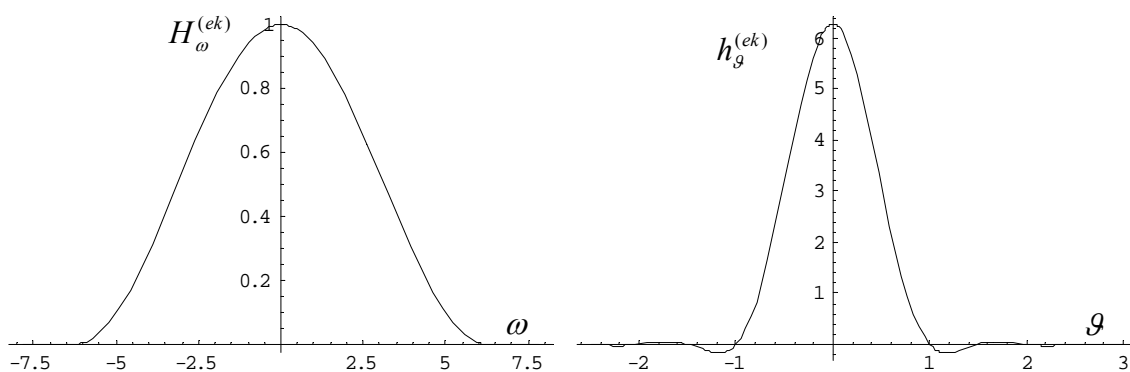
Az alábbiakban szemléltetjük a javasolt eljárást emelt koszinusz esetére. Nézzünk először egy valós emelt koszinusz átviteli karakterisztikát:

$$H_{\omega}^{(ek)} = \begin{cases} \frac{1 + \cos(\omega/2)}{2}, & \text{ha } |\omega| < 2\pi \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Az eddigi jelöléseink értelmében ez azt jelenti, hogy  $\tau_0 = 1$  sec-ot tételeztünk fel. Megjegyezzük, hogy egyszerű trigonometriai átalakítással a  $\pm 2\pi$  sávban  $H_{\omega}^{(ek)} = \cos^2(\omega/4)$  lesz.

$$h_g^{(ek)} = \int_{-2\pi}^{2\pi} H_{\omega}^{(ek)} e^{j\omega g} d\omega = \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos^2(\omega/4) \cdot e^{j\omega g} d\omega = \frac{\sin(2\pi \cdot g)}{g - 4g^3}$$

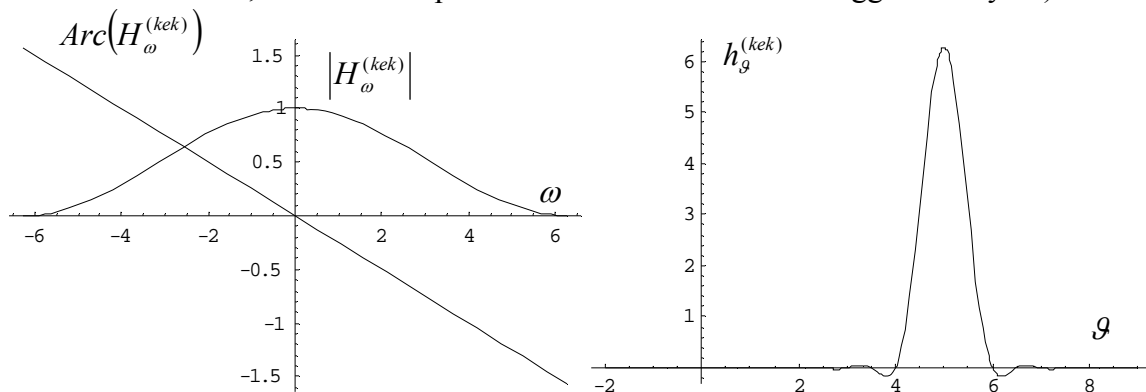
Az alábbi két ábrán vázoltuk a függvényeket:



Most hozzunk létre késleltetést! Legyen a késleltetés például  $5 \cdot \tau_0$  ! Így az átviteli karakterisztika a  $\pm 2\pi$  sávban  $H_{\omega}^{(kek)} = \cos^2(\omega/4) \cdot e^{-j\omega 5}$  lesz. A súlyfüggvény pedig a következő:

$$h_g^{(kek)} = \int_{-2\pi}^{2\pi} H_{\omega}^{(kek)} e^{-j\omega 5} e^{j\omega g} d\omega = \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos^2(\omega/4) \cdot e^{j\omega(g-5)} d\omega = \frac{\sin(2\pi \cdot g)}{495 - 299g + 60g^2 - 4g^3}$$

A függvényeket a következő ábrák mutatják, ahol a komplex átviteli karakterisztikát abszolút értékével és fázisával ábrázoltuk. A fázist  $Arc(H)$ -val jelöltük, és a sávhatárokon  $\pm 10 \cdot \pi$  az értéke, amit az ábrán nem tüntettünk fel. (Hangsúlyozzuk, hogy itt csak egy illusztratív példát akarunk bemutatni, és ezért szerepelnek számok általános összefüggések helyett.)



Az így kapott *késleltetett emelt koszinusz* persze továbbra sem kauzális transzformáció, mert a súlyfüggvénye csak látszatra tűnik el, valójában csak belesimulnak az értékek a tengelybe. Ez azonban reménytelivé teszi, hogy a csonkításával jó közelítést kapunk. Mielőtt ezt megvizsgáljuk, illusztrációnk legfontosabb célját, azaz a szükséges átviteli karakterisztika szétosztását az adó és a vevő között, fogjuk teljesíteni.

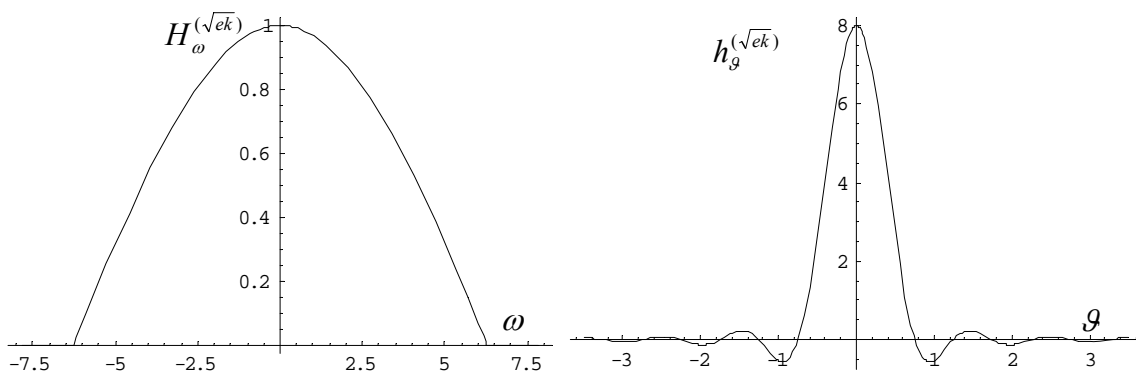
A négyzetgyök-emelt koszinusz átviteli karakterisztika a következő:

$$H_\omega^{(\sqrt{ek})} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 + \cos(\omega/2)}{2}}, & \text{ha } |\omega| < 2\pi \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

Az előzőek értelmében ez a  $\pm 2\pi$  sávban  $H_\omega^{(\sqrt{ek})} = \cos(\omega/4)$  lesz. A megfelelő súlyfüggvény pedig a következő:

$$h_g^{(\sqrt{ek})} = \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos(\omega/4) \cdot e^{j\omega \cdot g} d\omega = \frac{8 \cos(2\pi \cdot g)}{1 - 16g^2}$$

A függvények az alábbi két ábrán láthatók:



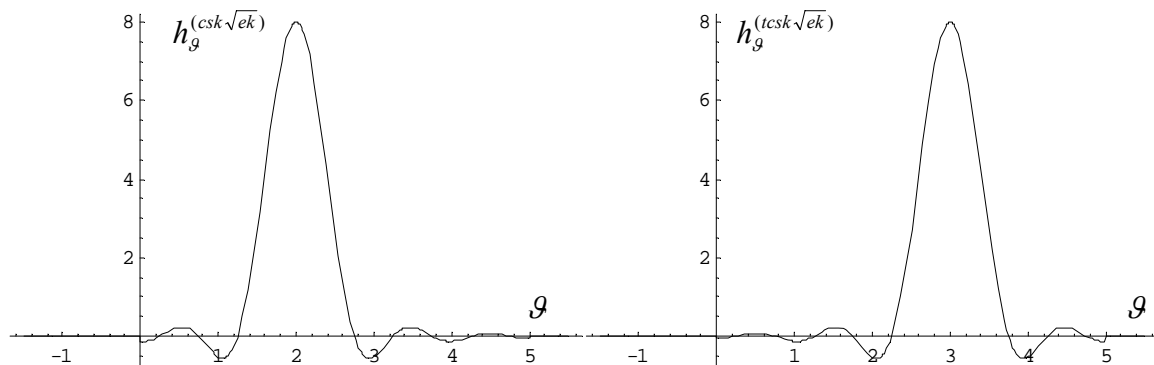
Az átviteli karakterisztikához nincs megjegyzésünk, a súlyfüggvényhez is csak annyi, hogy figyeljük meg a null-helyeket, amelyek most nem  $\tau_0$  egész-számú többszörösei.

Késleltessük a gyök-emelt koszinusz karakterisztikát! (Megjegyezzük, hogy szándékosan nem a késleltetett emelt koszinuszról vontunk gyököt, mert akkor elsikkadna egy fontos mondanivalónk, amire majd rámutatunk.) Legyen a késleltetés  $2 \cdot \tau_0$  értékű!

Így a késleltetett gyök-emelt koszinusz a  $\pm 2\pi$  sávban  $H_{\omega}^{(k\sqrt{ek})} = \cos(\omega/4) \cdot e^{-j\omega \cdot 2}$  lesz, és a megfelelő súlyfüggvény az alábbi:

$$h_g^{(k\sqrt{ek})} = \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos(\omega/4) \cdot e^{j\omega \cdot (g-2)} d\omega = -\frac{8 \cos(2\pi \cdot g)}{63 - 64g + 16g^2}$$

Csonkítsuk ezt a súlyfüggvényt a 0 és  $5 \cdot \tau_0$  közötti tartományra, majd képezzük a megfelelő átviteli karakterisztika konjugáltját és azt késleltessük  $5 \cdot \tau_0$  értékkel! Az alábbi ábra mutatja a csonkított súlyfüggvényt és fenti procedúra után kapott tükrözött változatot:



Amennyiben a fenti két súlyfüggvénnyel adott lineáris transzformációt használjuk az adóban és a vevőben, akkor az alábbi eredményt kapjuk (eltekintve a csonkítások hatásától):

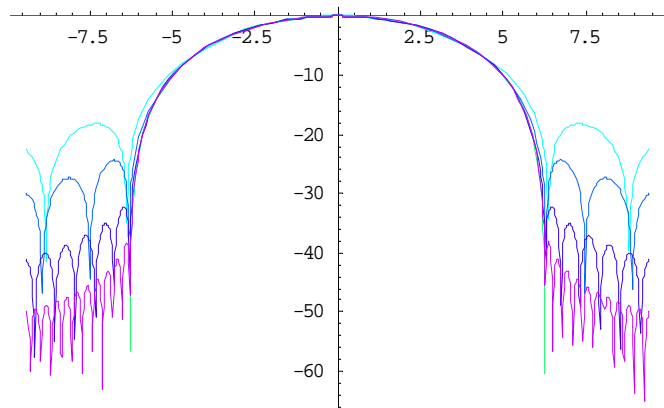
$$H_{\omega}^{(k\sqrt{ek})} \cdot H_{\omega}^{(lk\sqrt{ek})} = H_{\omega}^{(\sqrt{ek})} \cdot e^{-j\omega \cdot d} \cdot H_{\omega}^{(\sqrt{ek})^*} \cdot e^{j\omega \cdot d} \cdot e^{-j\omega \cdot l} = \left| H_{\omega}^{(\sqrt{ek})} \right|^2 \cdot e^{-j\omega \cdot l} = \left| H_{\omega}^{(ek)} \right| \cdot e^{-j\omega \cdot l}$$

ahol  $d$ -vel jelöltük az adószűrő késleltetését,  $l$ -el a véges impulzusválasz (FIR) hosszát, és  $*$  jelöli a komplex konjugálást. Eredményünk tehát azt mondja, hogy a fenti módon kialakított adóoldali és vevőoldali transzformáció eredőben egy késleltetett emelt koszinusz karakterisztikát hoz létre, amely áthallás-mentességet biztosít a szimbólumok között, és eközben az  $l$  időszak végén kapott minták alapján optimális lesz a döntés additív, fehér, Gauss zaj esetén.

Még néhány gondolatot érdemes hozzáfűzni az eddigiekhez. A korlátos sáv szélesség esetén szimbólumközi áthallás-mentességet eredményező lineáris transzformáció végtelen impulzusválasszal rendelkezik, vagy úgy is fogalmazhatunk, hogy végtelenre szétterülő elemi jelekkel érhetnénk el korlátos sáv szélességben szimbólumközi áthallás-mentességet. Amennyiben a transzformáció impulzusválaszát végesre korlátozzuk, akkor a véges időtartamra szétterülő elemi jelek gyakorlatilag is kezelhetők lesznek, de az elfoglalt frekvenciasáv nem lesz véges. Így az lesz a kérdés, hogy a  $\pi/\tau_0$ , vagy  $2\pi/\tau_0$

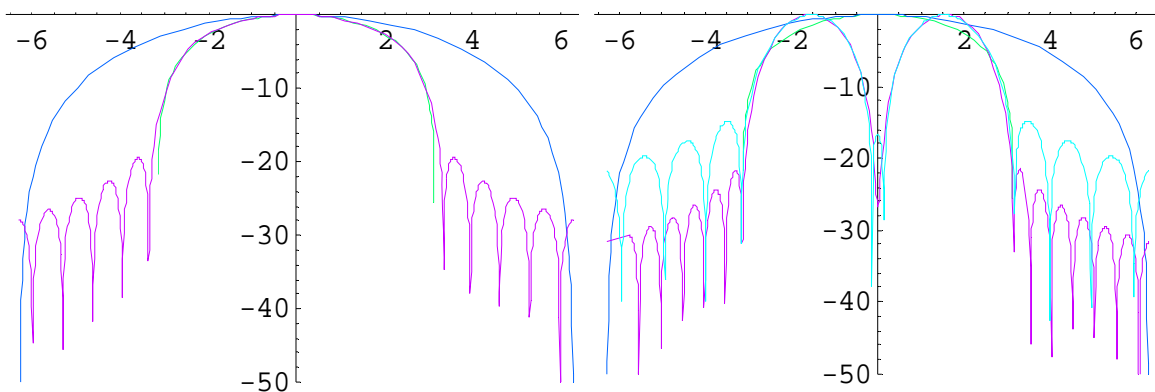
Nyquist frekvenciasávon kívüli komponensek mekkorák, és milyen gyorsan csillapodnak, ugyanis ezek a szomszéd csatornába esnek.

Hasonló szemléltetést a részleges válaszfüggvényű módszer is megérdemel, vagy pontosabban az utolsó megjegyzés tükrében egy összehasonlítást a Nyquist (teljes válaszfüggvényű) módszerrel. Ennek érdekében bemutatunk három ábrát, amelyeken az emelt koszinusz karakterisztika, a két megegyező mintájú (doubináris) részleges válaszfüggvényű,



és a három nem-nulla mintát alkalmazó részleges válaszfüggvényű eljárás átviteli karakterisztikái láthatók a súlyfüggvények különböző mértékű csonkítása esetén. Az első ábrán a Nyquist módszer amplitúdó karakterisztikáit láthatjuk arra a négy esetre, amikor a súlyfüggvényt a maximuma körüli első, második, ötödik és tizedik nulla-helynél csonkítottuk. Az ábrában felfedezhető az ideális karakteristika is egy-egy kis zöld vonal formájában, amelyek  $-55$  dB környékén megszakadnak, de nagyrészt eltakarják a csonkított karakterisztikák, amelyek  $-20$  és  $-40$  dB körüli spektrális komponenseket eredményeznek a  $2\pi/\tau_0$  Nyquist sávon kívül.

Az alábbi ábrák a részleges válaszfüggvényű eseteket illusztrálják. A baloldali ábrán kék vonal mutatja az ideális emelt koszinusz karakterisztikát, egy zöld vonal (jobbára takarásban) az ideális duobináris karakterisztikát, és ennek csonkított súlyfüggvényű változatát adja a lila vonal. A jobboldali ábrán egy türkizkék és egy lila görbe mutatja, hogy milyen lesz a három nem-nulla minta esetén az amplitúdó karakterisztika, két különböző mértékű súlyfüggvény-csonkítás mellett.



## A nem-alapsávi átvitel

### Lineáris moduláció

Amennyiben a digitális információ továbbítása lineáris moduláció alkalmazásával történik, akkor csupán arra a megjegyzésre van szükség, hogy minden változatlanul igaz a moduláló jelre, amit elmondtunk az alapsávi átvitelnél az elemi jelekre.

### Nemlineáris moduláció

Sajnos gyökeresen más a helyzet nemlineáris moduláció, így például FSK használatánál. Leszögezhetjük, hogy nem ismerünk olyan szintézis módszert, amely lehetővé tenné a szimbólumközi áthallás-mentességet korlátos sáv szélesség esetén. Így ezzel szemben azt analizálhatjuk, hogy mekkora sáv szélességet igényel a modulált jel különböző módon történő kialakítása, amire szemléltető példákat mutatunk. A sáv szélesség, vagy pontosabban a modulált jel spektrális sűrűségének vizsgálatát nem végezzük el, mert bonyolult és hosszadalmas, csak a jel kialakítására említünk ötleteket, és megmutatjuk a numerikusan becsült spektrális sűrűséget szemléltető ábrákon.

A modulált jel kedvező spektruma (lehető kis sáv szélessége) érdekében az ún. GMSK modulációt használják, például a GSM-ben is.

A GMSK (Gaussian Minimum Shift Keying) moduláció a moduláló jel sajátos kialakításával jön létre. A bináris szimbólumokkal nem ugrásszerűen változtatjuk a modulált jel frekvenciáját, hanem egy lényegesen simább (szelídebb) frekvenciaváltozást valósítunk meg. Erre már mutattunk példát a *Moduláció* című fejezetben, ahol emelt koszinusz frekvencia-

impulzust mutattunk be, most viszont a frekvencia-impulzust – miként az elnevezés is mutatja – egy Gauss görbéből állítjuk elő. Az előállítás lényegében a  $\tau_0$  időtartamú impulzusnak (amely egy sima FSK-t hozna létre) a konvolúciója egy Gauss görbével. A fázisváltozás függvénye pedig az előbbi integrálja. Példaként a GSM-ben használt paraméterekkel mutatjuk meg az eddigieket. A Gauss görbe:

$$h_t = \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-(\delta \cdot t)^2}, \quad \text{ahol} \quad \delta = \pi \cdot 0,3 \cdot \sqrt{\frac{2}{\ln(2)}},$$

a frekvencia-impulzus:

$$g_t = \int_{t-\tau_0/2}^{t+\tau_0/2} \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-(\delta \cdot g)^2} d g = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left\{ \delta \left( t + \frac{\tau_0}{2} \right) \right\} - \operatorname{erf} \left\{ \delta \left( t - \frac{\tau_0}{2} \right) \right\} \right],$$

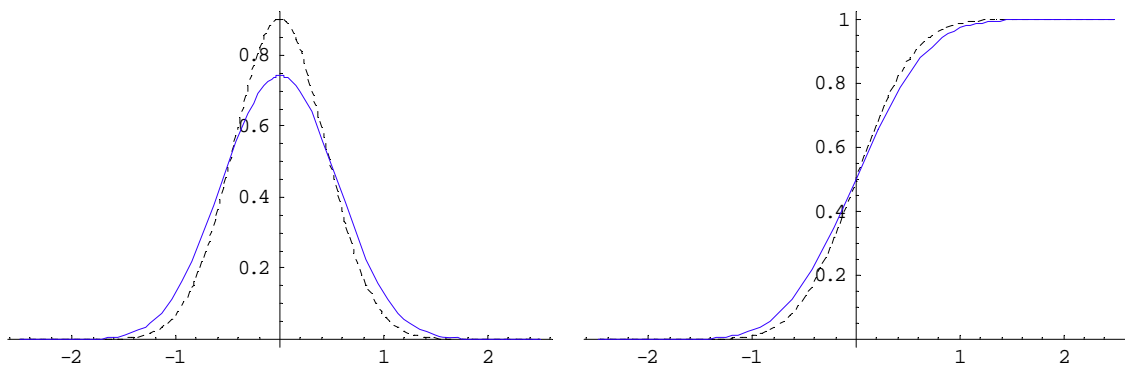
ahol az  $\operatorname{erf}$  hibafüggvény a következő:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

A fázisváltozás pedig az alábbi lesz:

$$q_t = \int_0^t g_g d g.$$

Az így kapott frekvencia-impulzus és a fázis-függvény a következő:



Összehasonlításként szaggatott görbék mutatják a  $h_t$ -vel jelölt Gauss függvény alakját, amelyet konvolváltunk az impulzussal.

Emlékeztetőül felidézzük, hogy a modulált jel a következő alakú lesz:

$$\eta_t = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \mu_t + \Phi),$$

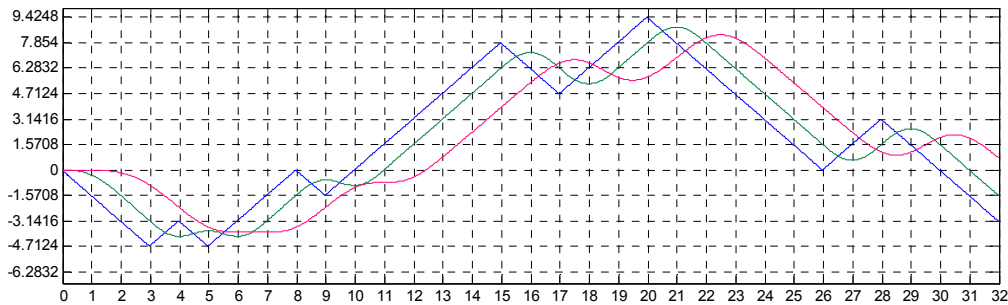
ahol a fázismodulációt az alábbiak szerint számíthatjuk ki:

$$\mu_t = m \cdot \pi \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \cdot q_{t-i\tau_0},$$

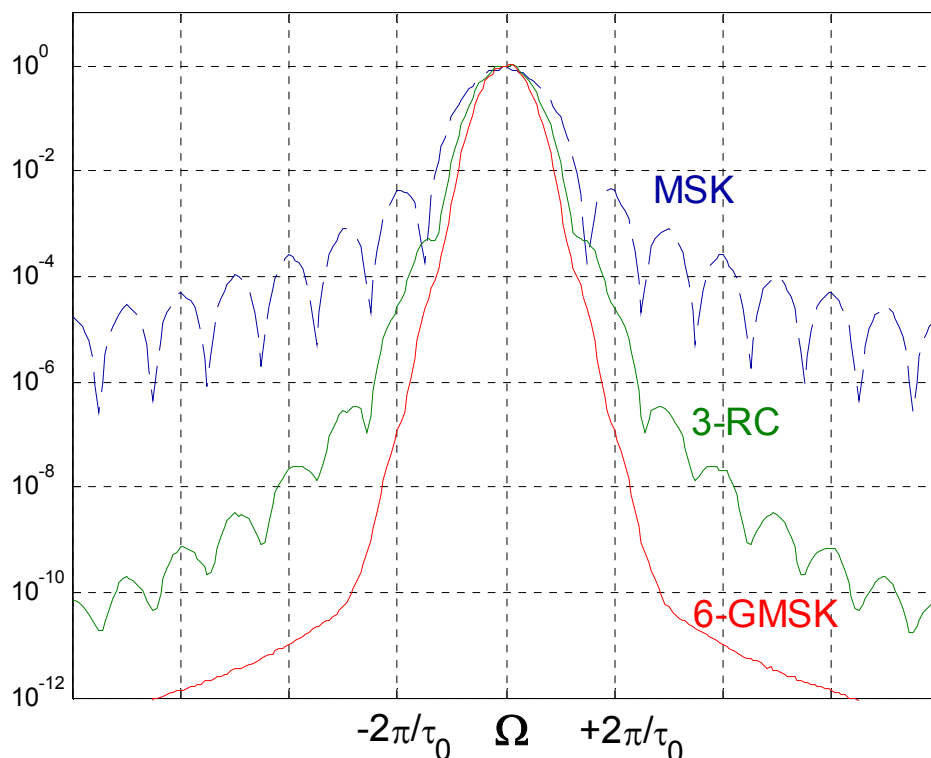
ahol MSK esetén  $m = 1/2$  és a  $\xi$  sorozat  $\pm 1$  értékű.

Elvileg készen lennénk, de gyakorlatilag a végtelen tartójú, nem kauzális függvények megvalósíthatatlanok, ezért csonkítani és késleltetni kell azokat. Viszont talán még ennél is fontosabb azt észrevenni, hogy a fenti frekvencia-impulzus **jelentős** része túlnyúlik egy időrés hosszán. A görbék a tengelyből kiemelkedő része  $3 \div 4$  időrés hosszúságú. Ez azt jelenti, hogy egy-egy szimbólum által keltett frekvenciaváltozás nem zajlik le egy-egy időrésen belül, hanem túlnyúlik azon, azaz részleges válaszfüggvényű a javasolt módszer. Így várható, hogy a modulált jel spektruma kedvező, azaz sávzélessége kisebb lesz, mint az MSK korábban megismert változataié.

Viszont ha megengedjük a több időresein keresztül történő fázisváltozást, azaz részleges válaszfüggvényű módszert alkalmazunk, akkor a modulációval foglalkozó fejezetben már megismert emelt koszinusz alakú frekvencia-impulzust is érdemes újra elővenni, mert a GMSK-hoz hasonlóan kedvező spektrumot eredményez. Az alábbi ábrákon példát mutatunk a fázisváltozásra egy véletlen bináris sorozatra az MSK, a 3 időrésnyi emelt-koszinusz és a 6 időrésnyi GMSK esetén, illetve a becsült spektrális sűrűségekre:



a 32 időrésnyi fázisváltozások közül az első (kék) az MSK, amely szögletesen változik, viszont hozzá képest késik az emelt koszinusz (zöld), amely simábban változik, és még tovább késik a GMSK (piros). Az alábbi ábrán ugyanezzel a színezéssel láthatjuk a spektrális sűrűségeket. A vivő körüli  $\pm 2\pi/\tau_0$  sáv szélén a 3 időrésnyi emelt-koszinusz csaknem 50 dB, míg a 6 időrésnyi GMSK közel 70 dB csillapítást eredményez a spektrális komponensekben.



Megállapíthatjuk, hogy a moduláló jel megfelelő kialakításával kellően jól be lehet szorítani a spektrális komponenseket a vivő körüli szűk sávba, viszont kezelni kell a szomszédos szimbólumok egymásra hatását is.