# 5

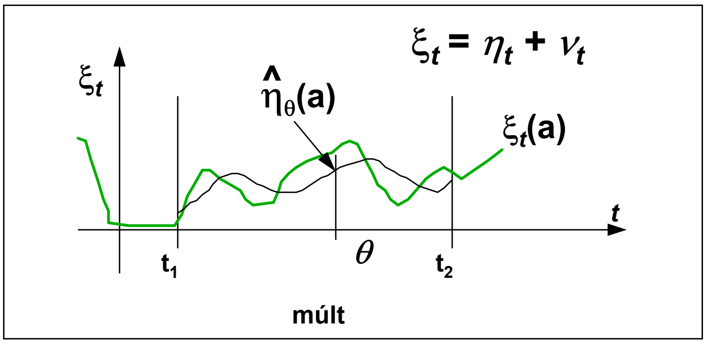
# A LINEÁRIS JELFELDOLGOZÁS ALAPJAI

Az eddigi fejezetekben megszerzett ismeretek alapján tudunk jó döntéseket hozni, valamint csekély erőfeszítés árán megtanulhatjuk a jó becslések készítésének módszerét is zajos megfigyelések esetén. A becslés lényegében a méréselmélet alapja, és eszközei szinte azonosak a hírközlésével. A következőkben egy érdekes, speciális problémakör alapvető megoldásaira mutatunk rá. Választ keresünk arra a kérdésre, hogy miként tudnánk lineáris jelfeldolgozási módszerekkel (szűréssel) a zajos megfigyelést a hasznos jelhez minél hasonlóbbá tenni, illetve a múltbeli megfigyelésből a várható „jövőt” előre jelezni.

## SIMÍTÁS, SZŰRÉS, ELŐREJELZÉS

Három csoportba fogjuk sorolni a feladatokat, amelyeket ennek a pontnak a címe is jelez. Általában azt tételezzük fel, hogy az információt hordozó jelet modellező sztochasztikus folyamat zajos, más néven additív zajjal terhelt. Így realizációinak valamely időtartamon végzett megfigyelése alapján értelmes feladat választ keresni arra, hogy mi lehetett a megfigyelhető zajos összegből az eredeti jel.

A címben szereplő első feladatcsoport, a simítás, abból az elgondolásból kapta a nevét, hogy a hasznos jeltől több "nyugodtságot", lassúb változásokat, nagyobb "simaságot" várunk, mint a hozzá adódó zajtól. Így a zajos megfigyelés simítása feltehetőleg a zajt távolítja el és az eredmény közelebb kerül a jelhez. A feladat és a jelölések illusztrálására álljon itt az alábbi ábra:

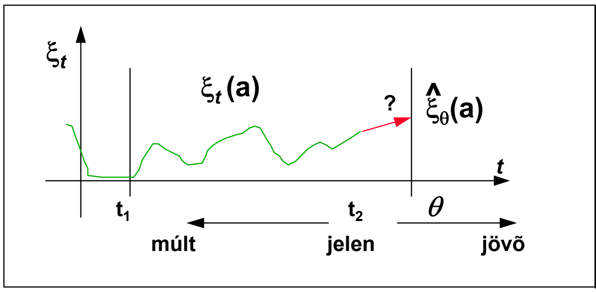


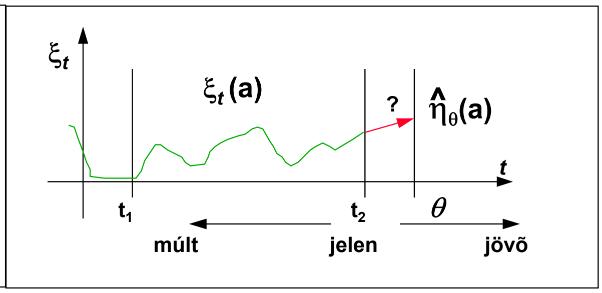

Az ábrán feltüntettük a zajos $\xi_t(a)$ realizációt, amelynek egy múltbeli, a $t_1$ és $t_2$ közötti időszakra vonatkozó feljegyzése alapján készítünk egy simított változatot, amelyet a $\xi$-ben lévő $\eta$ jelkomponens becslésének nevezünk, és annak valamely $\theta$ pillanatban fellépő értékét $\hat{\eta}_\theta(a)$-val jelöltük.

Fogalmilag olyan csekély mértékben különbözik a szűrésnek nevezett feladat a simítástól, hogy ugyanezen az ábrán értelmezhetjük. Lényegében a simításnál lerögzített feladatott kell elvégezni speciális időbeli megszorítások esetén. Nevezetesen: szűrésnek nevezzük a simítást akkor, ha a feladatot valódi időben végezzük, és a jel becsült értékét mindig a jelen pillanatra adjuk meg a zajos megfigyelés akár teljes múltjának felhasználásával.

Lényegesen különbözik a harmadik feladatcsoport. Ebben az esetben a múltbeli megfigyelés alapján jövőbeli értékeket kívánunk megjósolni, előre jelezni. Íly módon értelme lehet a feladatnak az általános, zajos megfigyelésen kívül akkor is, ha olyan nagy jel/zaj mellett tudjuk a megfigyelést végezni, amelyet joggal tekinthetünk zajmentes megfigyelésnek.

Ezt a feladatcsoportot az alábbi két ábrával illusztráltuk. A baloldali ábra a zajmentes esetet tűnteti fel, amikor $\xi_t(a)$ megfigyelés maga a jel, míg a jobboldali ábrán a $\xi_t(a)$-val jelölt megfigyelés az $\eta$ jel és a $\nu$ zaj összege.




A zajmentes esetben tehát az a feladat, hogy a múlban - a jelenig tartó - megfigyelt értékekből jelezzük előre a várható jövőbeli értéket. A zajos esetben az előbbi feladatot annyival nehezítjük, hogy a zajos megfigyelésekből kívánunk az igazi (zajmentes) jel jövőbeli értékére előrejelzést adni.

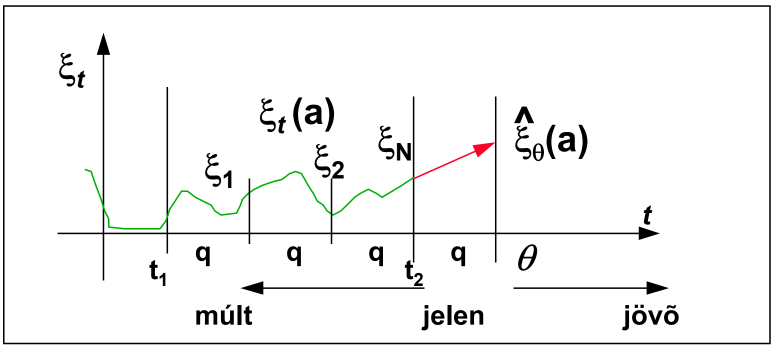
A feladatok vázolása után pontosítsuk, hogy mit szeretnénk tenni. Elsőként szögezzük le, hogy milyen megszorításokkal kívánjuk a feladatokat megoldani, majd válasszunk megfelelő értékelési módszert a feladat megoldásának jellemzésére!

A feladatok megoldására vonatkozó megszorítás legyen a fejezet címével összhangban a lineáris, időinvariáns transzformációk alkalmazása. Tehát arra a kérdésre keressük jelenleg a választ, hogy milyen jellemzőkkel bíró lineáris transzformációkkal érhetjük el a legjobb eredményt. Persze ehhez rögtön hozzá kell tenni, hogy miként értékeljük az eredményeket, milyen szempontból tekintsük azt a legjobbnak. Erre vonatkozóan válasszuk a négyzetes középhibával történő jellemzést. Tehát azokat a lineáris, időinvariáns transzformációkat keressük, amelyek a legkisebb négyzetes középhibájú megoldásokat eredményezik.

Ezután már csak a feladatok számának ésszerű csökkentése van hátra, hiszen a felsorolt csoportok mindegyikében elvégezhetjük a feladatot időben diszkrét minták alapján, valamint a jelek időben folytonos feldolgozásával. A továbbiakban itt két feladat részletes megoldására szorítkozunk, nevezetesen megoldjuk a zajmentes előrejelzést diszkrét minták alapján, valamint a zajos megfigyelés simítását időben folytonos feldolgozással.

## ELŐREJELZÉS ZAJMENTES, DISZKRÉT MEGFIGYELÉSEKBŐL

Pontosítsuk a zajmentes előrejelzéssel kapcsolatos vázlatunkat annyiban, hogy feltüntetjük az elmúlt időszakban vett $N$ mintát, illetőleg azok időpontjait, valamint a jövőbeli időpillanatot, amikorra az előrejelzést készítjük. A használt jelöléseinket a következő ábra szemlélteti:




Az ábra szerint a mintákat a múltbéli $t_1$ időponttól kezdve gyűjtjük a $t_2$-vel jelölt jelenig. Illetve pontosabban, az egyszerű jelölés kedvéért az első minta időpontja $t_1+q$, i-ediké $t_1+iq$, az utolsóé pedig $t_2= t_1+Nq$.

Az összegyűjtött N mintából kell előrejelzést készíteni a $t_2$-vel jelölt jelen pillanatot követő $t_2+q=\theta$ időpontban. A minták értékeit $\xi_i$ jelöli, ami részletesebben a következőt jelenti:

$$\xi_i = \xi_{t_1+i\cdot q}, \text{ahol} \quad i = \overline{1,N}.$$

A következő lépés az előrejelzés készítésére választott lináris, időinvariáns transzformáció leszögezése. Mint jól ismert, ez nem más, mint egy súlyozott összeg készítése a mintákból, azaz:

$$\hat{\xi}_\theta := \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \xi_i .$$

Ennyi megkötés után már csak az a nyitott kérdés, hogy milyen értékű súlyozó tényezők ($c_i$-k) eredményezik a legkisebb négyzetes középhibájú előrejelzést. Határozzuk meg, hogy miként függ az előrejelzett érték négyzetes középhibája a súlyozó tényezőktől, és keressük meg a minimumot eredményező értékeket! Ez a feladat nyilván $N$ ismeretlen meghatározását igényli, tehát nézzük meg, hogy mi ennek a lehetősége!

Először is definiáljuk az előrejelzés négyzetes középhibáját! Jelölje $\varepsilon(\boldsymbol{c})$ a hibát, amely tehát a $c_i$ konstansok függvénye, amelyeket együtt a $\boldsymbol{c}$ vektorral jelöltünk:

$$\varepsilon(\mathbf{c}) := \mathbf{M}(\xi_\theta - \hat{\xi}_\theta)^2, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{c}^{\mathrm{T}} := \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_N \end{pmatrix}.$$

Ha a fenti kifejezést deriváljuk a $\boldsymbol{c}$ komponensei szerint, és az így keletkező $N$ kifejezés mindegyikét egyenlővé tesszük nullával, akkor kapunk $N$ egyenletet, amelyek megoldásai a hibára szélső értéket szolgáltatnak:

$$\frac{\partial \varepsilon(\mathbf{c})}{\partial c_k} = 2\mathbf{M}\left(\xi_\theta - \hat{\xi}_\theta\right) \cdot \frac{\partial \hat{\xi}_\theta}{\partial c_k} = 0; \quad k = \overline{1,N}.$$

Jelöljük az egyenletrendszer megoldásaként kapható súlyozó tényezőket összefogó vektort $\tilde{\mathbf{c}}$ -al, a komponenseit tehát $\tilde{c}_i$ -al, akkor a megoldandó egyenletrendszer a következő:

$$\mathbf{M}\left(\xi_\theta - \sum_{i=1}^{N} \tilde{c}_i \cdot \xi_i\right) \cdot \xi_k = 0; \quad k = \overline{1,N},$$

ahol egyrészt tekintebe vettük, hogy az előző egyenletben kettővel egyszerűsithetünk, másrészt pedig behelyettesítettük az előrejelzésre korábban bevezetett kifejezést, valamint elvégeztük a parciális deriválást.

Alakítsuk át a fenti egyenletrendszert az alábbi formába:

$$\mathbf{M}\xi_k \xi_\theta = \sum_{i=1}^{N} \tilde{c}_i \cdot \mathbf{M}\xi_k \xi_i; \quad k = \overline{1,N},$$

amit részletesen az alábbi $N$ egyenletként is kifejthetünk:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{M}\xi_1\xi_\theta & = & \tilde{c}_1 \cdot \mathbf{M}\xi_1\xi_1 + & \tilde{c}_2 \cdot \mathbf{M}\xi_1\xi_2 + & \ldots \ \tilde{c}_\mathrm{N} \cdot \mathbf{M}\xi_1\xi_N \\
\mathbf{M}\xi_2\xi_\theta & = & \tilde{c}_1 \cdot \mathbf{M}\xi_2\xi_1 + & \tilde{c}_2 \cdot \mathbf{M}\xi_2\xi_2 + & \ldots \ \tilde{c}_\mathrm{N} \cdot \mathbf{M}\xi_2\xi_N \\
\vdots & = & \vdots & \vdots & \ldots \quad \vdots \\
\mathbf{M}\xi_N\xi_\theta & = & \tilde{c}_1 \cdot \mathbf{M}\xi_N\xi_1 + & \tilde{c}_2 \cdot \mathbf{M}\xi_N\xi_2 + & \ldots \ \tilde{c}_\mathrm{N} \cdot \mathbf{M}\xi_N\xi_\mathrm{N}
\end{array}$$

Ha nem szeretünk ilyen sokat írni, akkor mátrix formában is megadhatjuk a fentieket, hiszen a baloldalon egy vektorra, a jobboldalon pedig egy mátrixnak egy vektorral való szorzatára ismerhetünk:

$$\mathbf{g} = \mathbf{G} \cdot \tilde{\mathbf{c}}.$$

Az egyenletben szereplő **G** mátrixot Gram mátrixnak nevezik, és az egyenlet formális megoldása nyilván ennek invertálásán alapul:

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{g}.$$

Kevés ismeretlen esetén a megoldás alábbi módja is célra vezet:

$$\tilde{c}_i = \frac{\mathsf{D}_i}{|\mathbf{G}|},$$

ahol a $\mathsf{D}_i$ determináns a $|\mathbf{G}|$ determinánsból oly módon származik, hogy kicseréljük annak $i$-edik oszlopát a **g** vektorra.

Az így kiszámított $\tilde{c}_i$-súlyozó tényezőkkel nyerhető előrejelzés négyzetes középhibája minimális lesz, és ez a minimális érték természetesen az alábbi módon számítható:

$$\varepsilon(\tilde{\mathbf{c}}) = \mathbf{M}\left(\xi_\theta - \sum_{i=1}^{N} \tilde{c}_i \cdot \xi_i\right)^2.$$

Könnyű kimutatni, hogy a hiba értékére a fentiből az alábbi összefüggés nyerhető:

$$\varepsilon(\tilde{\mathbf{c}}) = \mathbf{M}\xi_\theta^{\,2} - \mathbf{M}\xi_\theta\hat{\xi}_\theta,$$

ami várhatóan kisebb lesz, mint a négyzetes várhatóérték.

Végezetül egy igen fontos megjegyzés: Vegyük észre, hogy a fenti számításokban kizárólag a folyamat korreláció függvényére volt szükségünk!

## SIMÍTÁS IDŐBEN FOLYTONOS MEGFIGYELÉS ALAPJÁN

Az előbb pusztán az egyszerűség kedvéért választottuk a zajmentes előrejelzést. Teljesen hasonló a feladat megoldása zajos esetben is. A különbségekre utalni fog a második feladatunk megoldása is amikor időben folytonos esetben oldjuk meg zajos jel simítását.

### A legkisebb négyzetes középhibát adó simítószűrő

Míg az előző esetben a legkisebb négyzetes középhibát eredményező lineári transzformáció feltételét az alábbi egyenlet megoldása jelentette:

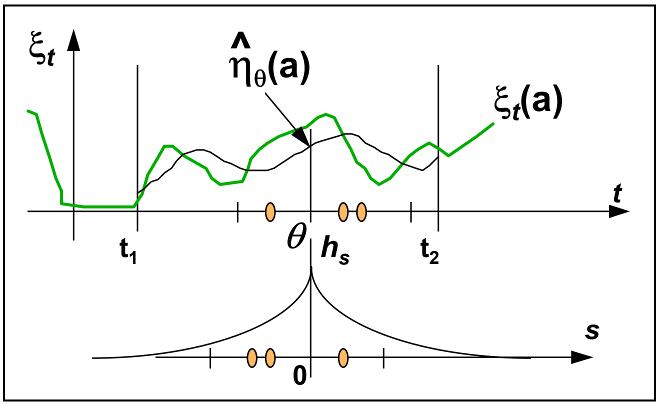
$$\mathbf{M}\left(\xi_\theta - \hat{\xi}_\theta\right) \cdot \xi_k = 0; \quad \text{ahol} \quad \xi_k = \xi_{t_1 + kq}, \quad \text{és} \quad k = \overline{1, N},$$

addig a folytonos esetre is bizonyíthatóan egy hasonló alakú összefüggés áll fenn, ha a megoldásunkat szintén lináris transzformáció alakjában keressük.

A $\xi_t = \eta_t + \nu_t$ zajos megfigyelésből a legkisebb négyzetes középhibájú becslést az $\eta$ jelkomponensre tehát az alábbi alakban keressük:

$$\hat{\eta}_\theta := \int h_s \xi_{\theta - s} ds,$$

ahol az integrál határait a következő vázlat alapján deríthetjük ki:




Legyen a zajos jel megfigyelésének időszaka a $(t_1,t_2)$ közötti időköz. Az $\eta$ jelkomponensre ezen időszakon belüli bármelyik $\theta$ időpillanatban akarunk becslést készíteni. Ekkor a $\theta$-hoz helyezve a $h_s$ súlyfüggvény origóját, könnyen kideríthető, hogy mivel az integrál határai csak a megfigyelt időszakra terjedhetnek, ez $s$-ben mérve $\theta$- $t_2$ és $\theta$- $t_1$ között lesz. Ezek szerint a megoldandó egyenlet (a korábbi utalásra hivatkozva az alaki hasonlóságot illetőleg) az alábbi lesz:

$$\mathbf{M}\left(\eta_\theta - \int_{\theta-t_2}^{\theta-t_1} \tilde{h}_s \xi_{\theta-s} ds\right)\cdot \xi_t = 0.$$

Átrendezve az egyenletet, és tekintetbe véve, hogy a várható érték képzése megelőzheti az $s$ szerinti integrálást, kapjuk:

$$\int_{\theta-t_2}^{\theta-t_1} \tilde{h}_s \, \mathbf{M}\, \xi_{\theta-s}\xi_t ds = \mathbf{M}\, \eta_\theta \xi_t$$

Ezt az egyenletet kellene megoldani $\tilde{h}_s$-ra, azaz a legkisebb négyzetes középhibát eredményező súlyfüggvényre. Első lépésként értékeljük ki a jelzett várhatóértékeket! Az integrálban szereplő várhatóérték jól ismert, ez nem más, mint $\xi$ korreláció függvénye az időpontok különbségénél. Az egyenlet jobboldalán szereplő kifejezés azonban még nem ismert. Itt két folyamatból vett minták szorzatának várhatóértéke szerepel. Nyilván nem nehéz rokonságot felfedezni ebben a kifejezésben a korreláció függvény definíciójával. Amennyiben $\xi$ és $\eta$ együttesen is gyengén stacionáriusak, akkor jogos a következő definíció is:

$$\mathbf{M}\, \eta_\theta \xi_t := R_{\eta\xi}(\theta - t), \quad \text{é s} \quad \mathbf{M}\, \xi_{\theta-s}\xi_t = R_\xi(\theta - s - t).$$

Alkalmazzuk még a $\theta$ - $t$ = $\tau$ jelölést, és így a fenti $\tilde{h}_s$-ra vonatkozó egyenletre a következő alakot kapjuk:

$$\int_{\theta-t_2}^{\theta-t_1} \tilde{h}_s \, R_\xi(\tau - s) ds = R_{\eta\xi}(\tau),$$

amely egyenletet Wiener-Hopf-egyenletnek nevezik.

Ennek az egyenletnek az általános megoldása nehézségekbe ütközik. Számunkra azonban igen érdekes lehet egy speciális eset, nevezetesen ha megelégszünk a rögzített megfigyelési időszak széleitől távoli simítási eredményekkel. Azaz arra korlátozzuk magunkat, hogy a $(t_1,t_2)$ közötti időszaknak csak a belsejében, a széleitől távol fogjuk $\eta$ jel becslését keresni. Erre a legegyszerűbb modell az lehet, ha a fenti időszakot $(-\infty,+\infty)$ határokig kinyújtjuk, és a becsléseket csak **véges** időpontokra készítjük. Tehát, ha $t_1 \to -\infty$ és $t_2 \to +\infty$, akkor az egyelet a következő lesz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{h}_s \; R_\xi(\tau - s) ds = R_{\eta\xi}(\tau).$$

Könnyű észrevenni, hogy ennek az egyenletnek a megoldása sokkal egyszerűbb. Vegyük mindkét oldal Fourier transzformáltját, miközben definiáljuk az ú.n. kereszt-spektrális-sürüség függvényt is:

$$s_{\eta\xi}(\omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\eta\xi}(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega\tau} d\tau,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{h}_s \; R_\xi(\tau - s) ds = R_{\eta\xi}(\tau) \quad \Rightarrow \quad \widetilde{H}_\omega \cdot s_\xi(\omega) = s_{\eta\xi}(\omega).$$

Ezáltal egy igen egyszerű, lineáris egyenletet kaptunk - igaz ugyan, hogy nem a keresett lineáris transzformáció súlyfüggvényére, hanem annak Fourier transzformáltjára - a szükséges átviteli függvényre, amit $\widetilde{H}_\omega$ -al jelöltünk. Az egyenlet megoldása tehát:

$$\widetilde{H}_\omega = \frac{s_{\eta\xi}(\omega)}{s_\xi(\omega)}.$$

Könnyű kimutatni, hogy ez az összefüggés tovább egyszerűsödik, amennyiben a jel és az additív zaj függetlenek, valamint legalább az egyikük várhatóértéke nulla. Ekkor a legkisebb négyzetes középhibát eredményező simítószűrő átviteli függvénye a következő összefüggéssel számítható:

$$\widetilde{H}_\omega = \frac{s_\eta(\omega)}{s_\eta(\omega) + s_\nu(\omega)}.$$

**A négyzetes középhiba**

Az alábbiakban kiszámítjuk a legkisebb négyzetes középhibát adó lineáris transzformáció kimenetén a hiba értékét:

$$\varepsilon(\widetilde{h}) = \mathrm{M}(\eta_\vartheta - \hat{\eta}_\vartheta)^2 = \mathrm{M}\left( \eta_\vartheta - \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{h}_s \xi_{\vartheta - s} ds \right)^2 \tag{3.1}$$

Elvégezve a négyzetreemelést a következőt kapjuk:

$$\varepsilon(\widetilde{h}) = \mathrm{M}\eta_\vartheta^2 + \mathrm{M}\hat{\eta}_\vartheta^2 - 2\mathrm{M}\left( \eta_\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{h}_s \xi_{\vartheta - s} ds \right) \tag{3.2}$$

A második tag a szűrő kimenetén lévő simított megfigyelés négyzetes várható értéke, amit spektrális sűrűségével is kifejezhetünk:

$$\mathrm{M}\hat{\eta}_\vartheta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \widetilde{H}_\omega \right|^2 s_\xi(\omega) d\omega .$$

A harmadik tag meghatározása kicsit több leleményességet igényel. Az első lépés még egyszerű, ha oda helyezzük a várhatóérték képzést, ahol a valószínűségi változó van:

$$2\mathrm{M}\left(\eta_\vartheta\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{h}_s\xi_{\vartheta-s}ds\right)=2\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{h}_s\mathrm{M}\eta_\vartheta\xi_{\vartheta-s}ds=2\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{h}_sR_{\eta\xi}(s)ds\,.$$

A következő lépésben áttérünk az időtartományból a frekvenciatartományba:

$$2\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{h}_sR_{\eta\xi}(s)ds=2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{H}_\omega e^{j\omega s}d\omega\right)R_{\eta\xi}(s)ds=$$

$$=2\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{H}_\omega\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{\eta\xi}(s)e^{j\omega s}ds\right)d\omega=2\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{H}_\omega s_{\eta\xi}(\omega)d\omega$$

ezzel a hibára kapott kifejezés az alábbi lesz:

$$\varepsilon(\widetilde{h})=\mathrm{M}\eta_\vartheta^2+\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widetilde{H}_\omega\right|^2s_\xi(\omega)d\omega-2\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{H}_\omega s_{\eta\xi}(\omega)d\omega\,.$$

Behelyettesítve a legkisebb négyzetes hibát adó "szűrő" átviteli függvényét, a következő egyszerű kifejezést kapjuk:

$$\varepsilon(\widetilde{h})=\mathrm{M}\eta_\vartheta^2-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s_{\eta\xi}^2(\omega)}{s_\xi(\omega)}d\omega\,,$$

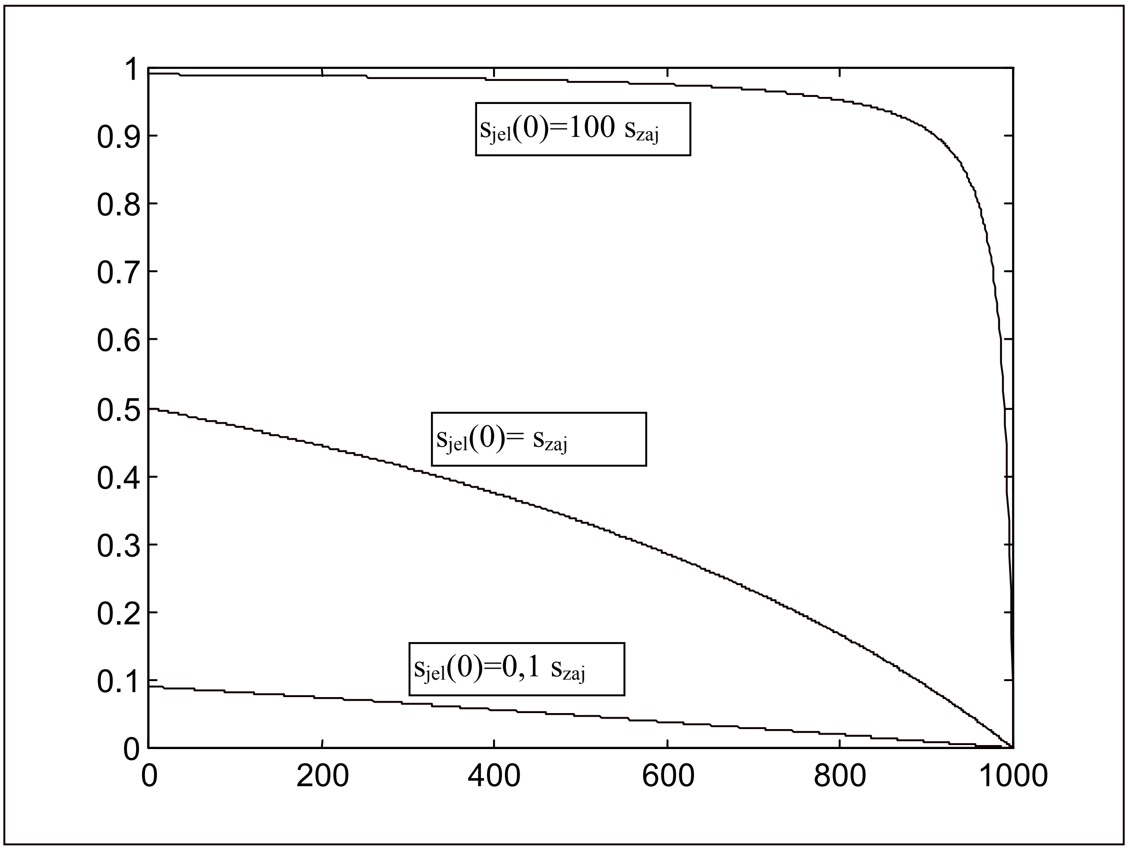
amit független jel és zaj esetén, feltéve, hogy legalább az egyik nulla várhatóértékű, még tovább alakíthatunk:

$$\varepsilon(\widetilde{h})=\mathrm{M}\eta_\vartheta^2-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s_\eta^2(\omega)}{s_\eta(\omega)+s_\nu(\omega)}d\omega\,.$$

Példként bemutatjuk a legkisebb négyzetes középhibát eredményező lineáris transzformációkat arra az esetre, ha a jel spektrális sűrűsége lineárisan csökken a zaj spektrális sűrűsége pedig konstans, de értéke a jel 0 frekvencián lévő spektrális sűrűségéhez képest 0,01; 2 és 10-szeres:

$$\widetilde{H}_\omega=\frac{s_{jel}(\omega)}{s_{jel}(\omega)+s_{zaj}(\omega)}=\frac{1-\omega/B}{1-\omega/B+s_{zaj}(\omega)/s_{jel}(0)},\ \text{ha } \omega\in[0,B],\ \text{és 0 egyebként.}$$

Itt $B$ a jel sávszélessége, amit az ábrán 1000 egységre választottunk.


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
200
400
600
800
1000
$s_{jel}(0)=100\ s_{zaj}$
$s_{jel}(0)=\ s_{zaj}$
$s_{jel}(0)=0{,}1\ s_{zaj}$