3

MINTAVÉTELEZÉS és KEREKÍTÉS

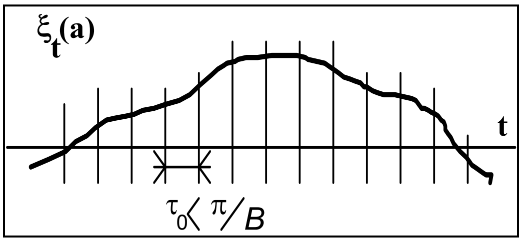
Eebben a fejezetben az időben folytonos elektromos jelekből történő mintavételt, és a minták lehetséges kerekítését vizsgáljuk meg. Két alapvető indokunk van erre a vizsgálatra: az egyik a digitális információtárolás, továbbítás és feldolgozás, amelynek szinte korlátlanok a lehetőségei, a másik pedig a közös csatorna használatának időbeli megosztása, azaz az időosztású jelnyalábolás, vagy angolul a Time Division Multiplexing, röviden TDM.

A) MINTAVÉTEL

A fizikai jelenségekkel analóg elektromos jelek digitalizálása feltétlenül igényli a mintavételezést, mert ellenkező esetben még egy véges időszak jelét is csak megszámlálhatatlanul végtelen sok adattal lehetne leírni. A most tárgyalásra kerülő mintavétel célja és alapvető mondanivalója lényegesen eltér a döntéseknél alkalmazott mintavételtől. Jelenleg a mintákkal a teljes jelet kívánjuk leírni, azaz a minták közötti időszakokat is.

Tl: A B-re sávhatárolt, gyengén stacionárius, négyzetes középben folytonos folyamat egyértelműen leírható a π/B-nél rövidebb időközű mintáival.

A jobboldali vázlaton látható minták a minták **közötti időszakokban** is leírják a jelet!



A továbbiakban egyrészt megmutatjuk a mintavett jel spektrális előállítását, majd ennek segítségével módszert adunk az eredeti jel visszaállítására.

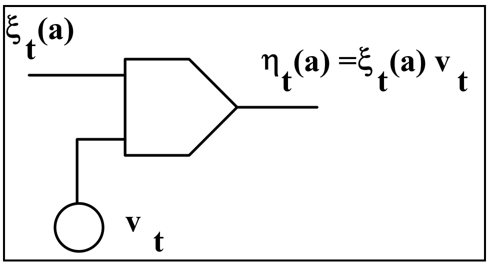
Modellezze a jelet, amelyből a mintákat vesszük, egy ξ_t gyengén stacionárius sztochasztikus folyamat. Ekkor leírhatjuk ξ_t-t a spektrális előállításával:

$$\xi_t = \int_{-B}^{B} e^{j\omega t} d\beta_\xi(\omega)$$

.

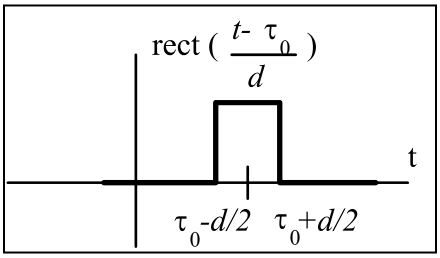
Modell 1

A mintavételre pedig a következő ábrán látható matematikai modellt alkalmazzuk, ahol a szorzást egy impulzussorozattal végezzük. Az impulzussorozat leírására a rect(t/d) kifejezést használjuk, ami a rectangular (négyszögletes) rövidítése. Így



$$v_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t - i \cdot \tau_0}{d}\right)$$

A használt jelölést az alábbi ábra szemlélteti.



Az impulzussorozat Fourier sora jól ismert, amit úgy is nevezhetünk, mint az impulzussorozat spektrális előállítása:

$$v_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}, \text{ahol } a_k = \frac{d}{\tau_0} \frac{\sin(k\pi \, d/\tau_0)}{k\pi \, d/\tau_0}, \text{és } \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau_0}.$$

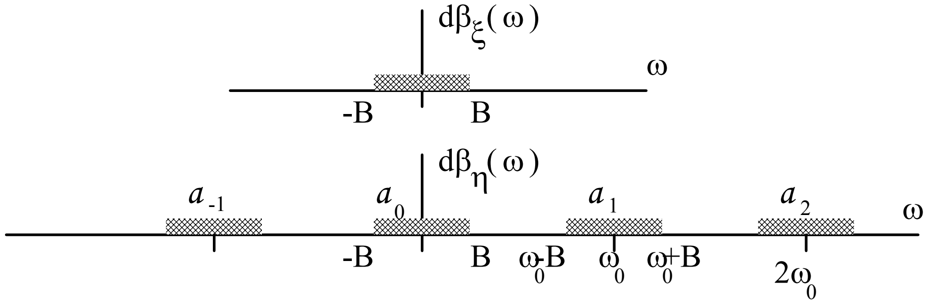
A szorzó kimenőjele tehát a következő lesz:

$$\eta_t = \xi_t \cdot v_t = \int_{-B}^{B} e^{j\omega t} d\beta_\xi(\omega) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-B}^{B} a_k \cdot e^{j(\omega + k\omega_0)t} d\beta_\xi(\omega)$$

Értelmezzük az eredményt! Hasonlítsuk ξ_t spektrális előállításához, és szemléltessük is az eredményt!

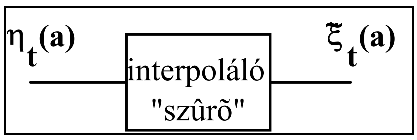
1. A mintavett jel végtelen sok egymáshoz hasonló tagból áll.
2. A súlyozó tényezők tagonként különbözőek.
3. A ξ_t spektrális folyamatának az ω frekvencián lévő növekményei az $\omega + k\omega_0$ frekvenciájú komponenseket súlyozzák.

A szemléletes kép tehát a következő:



Visszaállítás

Az eredeti jel visszaállítása a mintavett jelből egy lineáris invariáns transzformációval történhet, ami világosan látható a szemléltető ábrából is. A szükséges lineáris transzformáció, amit interpoláló szűrőnek is neveznek, egy ideális aluláteresztő szűrő a (-B, B) sávban, $1/a_0$ átvitellel.



Természetesen ez a transzformáció nem realizálható, ezért a valóságos szűrő hibát fog okozni a mintákból visszaállított jelben. Ha a hibajelet az alábbiak szerint definiáljuk (ami nyilván egy közelítés):

$$h_t := \int_{-\omega_0 - B}^{-\omega_0 + B} e^{j(\omega+\omega_0)t} \cdot a_{-1} \cdot I_\omega \cdot d\beta_\xi(\omega) + \int_{\omega_0 - B}^{\omega_0 + B} e^{j(\omega-\omega_0)t} \cdot a_1 \cdot I_\omega \cdot d\beta_\xi(\omega),$$

akkor annak négyzetes középértékét az alábbi kifejezéssel írhatjuk le:

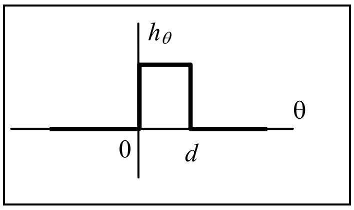
$$\mathbf{M}h_0^2 = 2\int\limits_{\omega_0 - B}^{\omega_0 + B} |a_1|^2 \cdot |I_\omega|^2 s_\xi(\omega)d\omega$$

A hiba értékelése a hasznos jelhez történő viszonyítással végezhető el:

$$\mathbf{M}\tilde{\xi}_0^2 \cong \int\limits_{-B}^{B} |a_0|^2 \cdot |I_\omega|^2 s_\xi(\omega)d\omega$$

Modell 2

A fenti módon vett minták, azaz az analóg jel ”szeletei” nem konstans értékűek, tehát digitalizálásuk még problémát okozna, de analóg TDM eljárás esetén a módszer közvetlenül használható. Konstruálhatunk egy másik modellt, amely 0-hoz tartóan keskeny (dirac) mintákat vesz, de ezeket a mintákat a kezelhetőségük érdekében átvezetjük egy lineáris invariáns transzformáción, ami a mellékelt súlyfüggvénnyel rendelkezik.



Maga a nulla időtartamú minta nem jelent elvi változást az előző modellhez képest, csak abban a d-nek tartani kell nullához, miközben a mintavevő (szorzó) impulzus amplitúdója úgy tart végtelenhez, hogy a szorzatuk konstans. A változást a véges minta-szélességet eredményező transzformáció (”tartó”) jelenti, mert ennek nyilván hatása lesz a frekvenciatartományban.

Az adott transzformáció átviteli függvénye az alábbi lesz:

$$H_\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h_\theta e^{-j\omega\theta} d\theta = \int\limits_{0}^{d} 1 \cdot e^{-j\omega\theta} d\theta = d \cdot e^{-j\omega d/2} \frac{\sin \omega d/2}{\omega d/2}.$$

Értékelve az eredményt, azt mondhatjuk, hogy a ”mintavevő – tartó” modell lineáris invariáns torzítást okoz a mintavétel során, amit az interpoláló szűrőnek korrigálnia kell.