

Az ortogonális frekvencia-osztású nyálábolás

(OFDM = Orthogonal Frequency Division Multiplexing)

Legyen ξ_r egy szimbólum-sorozat! Képezzünk a sorozatból $2K$ darab szimbólumból álló blokkokat! (Így a blokkokat páros számú szimbólum alkotja!) Ezután képezzünk K darab párt az egymást követő szimbólumokból! Ha a ξ_r sorozat szimbólum-sebessége $1/\tau_0$, akkor a fenti módon képzett blokkok $2K \cdot \tau_0$ időközönként követik egymást.

A modulációs szabály

A szimbólumsorozat k -adik blokkja, n -edik szimbólum-párjának első eleme szorozza az Ω_n frekvenciájú, koszinusz fázisú vivőt (hozzon létre AM-DSB-SC modulációt), míg a pár második eleme szorozza az ugyanekkora frekvenciájú, de szinuszos fázisú vivőt. A vivőfrekvenciák mindegyikét úgy válasszuk meg, hogy pontosan egész-számú periódusuk férjen bele $2K \cdot \tau_0$ blokk-időtartamba. Ily módon a $[k \cdot 2K \cdot \tau_0, (k+1) \cdot 2K \cdot \tau_0)$ időközben értelmezett, k -adik blokkot megjelenítő elemi jelalakot a következő összefüggéssel adhatjuk meg:

$$y_t^{(k)} = \sum_{n=1}^K \text{rect}\left(\frac{t - K\tau_0 - k \cdot 2K\tau_0}{2K\tau_0}\right) \cdot [\xi_{2n-1}^{(k)} \cdot 2 \cos(\Omega_n \cdot t + \Phi) - \xi_{2n}^{(k)} \cdot 2 \sin(\Omega_n \cdot t + \Phi)] \quad (1)$$

Az önkényesen választott 2-es vivő-amplitúdó és a negatív előjel előnyös lehet az alábbi rövidebb alakban felírt összefüggés esetén. Ugyanis írjuk át exponenciális alakba a trigonometrikus függvényeket:

$$y_t^{(k)} = \sum_{n=1}^K \text{rect}\left(\frac{t - (1+2k) \cdot K\tau_0}{2K\tau_0}\right) \cdot [\xi_{2n-1}^{(k)} \cdot (e^{j\Omega_n \cdot t} \cdot e^{j\Phi} + e^{-j\Omega_n \cdot t} \cdot e^{-j\Phi}) + j \cdot \xi_{2n}^{(k)} \cdot (e^{j\Omega_n \cdot t} \cdot e^{j\Phi} - e^{-j\Omega_n \cdot t} \cdot e^{-j\Phi})]$$

Most a szumma alatti szögletes zárójelben csoportosítsunk az exponenciális függvények kitevői szerint:

$$y_t^{(k)} = \sum_{n=1}^K \text{rect}\left(\frac{t - (1+2k) \cdot K\tau_0}{2K\tau_0}\right) \cdot [(\xi_{2n-1}^{(k)} + j \cdot \xi_{2n}^{(k)}) \cdot e^{j\Omega_n \cdot t} \cdot e^{j\Phi} + (\xi_{2n-1}^{(k)} - j \cdot \xi_{2n}^{(k)}) \cdot e^{-j\Omega_n \cdot t} \cdot e^{-j\Phi}] \quad (2)$$

Bevezetve a szimbólum-párokra a következő (komplex)vektori jelölést:

$$\xi_n^{(k)} = (\xi_{2n-1}^{(k)} + j \cdot \xi_{2n}^{(k)}), \quad (3)$$

a következőt írhatjuk:

$$y_t^{(k)} = \sum_{n=1}^K \text{rect}\left(\frac{t - (1+2k) \cdot K\tau_0}{2K\tau_0}\right) \cdot [\xi_n^{(k)} \cdot e^{j\Omega_n \cdot t} \cdot e^{j\Phi} + \bar{\xi}_n^{(k)} \cdot e^{-j\Omega_n \cdot t} \cdot e^{-j\Phi}], \quad (4)$$

ahol a felülvonással a komplex konjugáltat jelöltük.

Ha a szimbólum-forrás blokkjaihoz rendelt elemi jelek sorozatát akarjuk analitikusan leírni, akkor már csak összegezni kell a fenti elemi jelek $2K \cdot \tau_0$ -ra való eltoltjait:

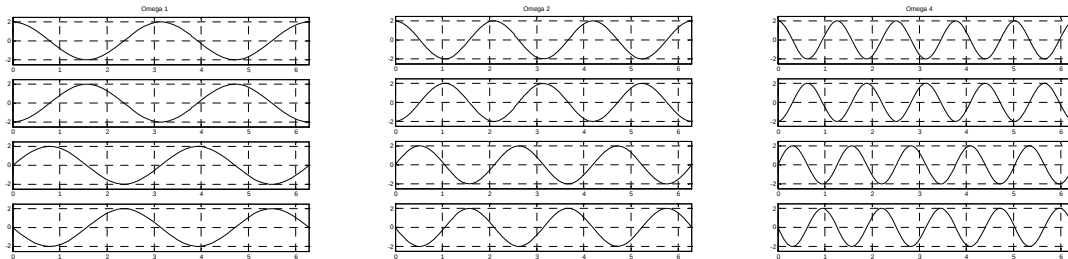
$$\eta_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_t^{(k)}.$$

A fentiekén túl már csak az szorul pontosításra, hogy a K darab Ω_n frekvenciájú vivőt hogyan válasszuk meg. Eddig ezekről csak azt mondtuk, hogy pontosan egész-számú periódusaik férjenek el $2K \cdot \tau_0$ -ban. Most ezt még annyiival pontosítjuk, hogy ezen kívül a lehető legszorosabban töltsék ki a rendelkezésre álló frekvenciasávot. Meg kell tehát keresni a sáv aljának közelében azt a frekvenciát, amelyre teljesül a periódusidőre vonatkozó feltétel, majd a további $K-1$ vivőnek egy-egy periódussal kell „hosszabbnak” lennie. Azaz, ha az Ω_1

frekvenciájú vivőnek pontosan p_1 periódusa fér el $2K \cdot \tau_0$ -ban, akkor az Ω_n frekvenciát a következő módon számíthatjuk ki:

$$\Omega_n = \Omega_1 + (n-1) \cdot \frac{\Omega_1}{p_1} = \Omega_1 \cdot \left(1 + \frac{n-1}{p_1}\right) = \Omega_1 \cdot \frac{p_1 + n - 1}{p_1}$$

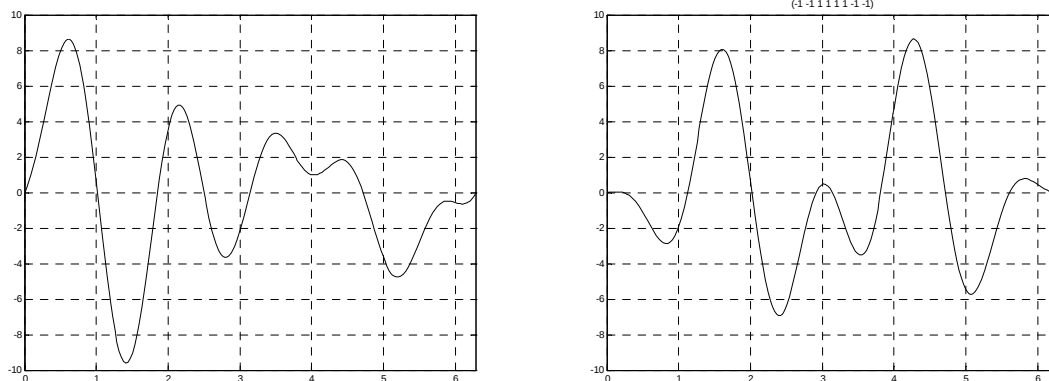
Illusztratív példaként nézzünk egy viszonylag egyszerű esetet, amikor ξ_r egy bináris szimbólum-sorozat! Legyen a bináris sorozat bipoláris értékkészletű, azaz vegye fel a ± 1 értékeket. Legyen az Ω_1 frekvenciájú vivő akkora, hogy $p_1 = 2$ periódusa férjen el a blokk időtartamában! Ekkor például az Ω_1 , Ω_2 és Ω_4 frekvenciájú vivőknek a lehetséges szimbólum-értékekkel (± 1) szorzott, $[0, 2K \cdot \tau_0)$ időközre eső képei láthatók az alábbi ábrán:



Két, három és öt periódusnyi – négy különböző fázisú – szinusz-hullám

Egy viszonylag rövid, nyolc bináris szimbólumot tartalmazó blokk esetén könnyen és látványosan illusztrálhatjuk a kialakuló elemi jeleket, például a következő bináris sorozatok esetén:

$$\xi_1 = (1 \ -1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1), \quad \text{illetve} \quad \xi_2 = (-1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1)$$

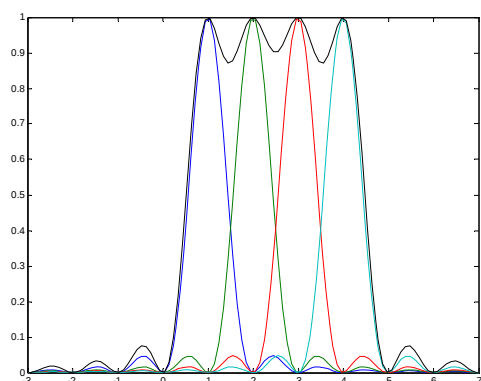


Az OFDM elemi jelei elég összetettek, mondhatni „kusza” képet mutatnak. Viszont a frekvenciaosztású nyalábolásból következően nyilván a frekvencia-tartományban van nagyobb „rendezettség”, és az egyes időrésekben vett jelek kiértékelését is nyilván a spektrum jellemzőinek tekintetbe vételével kell megoldani. De milyen is az OFDM jel spektruma?

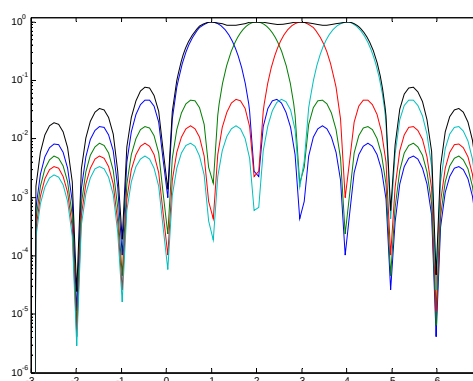
A spektrum

Nagyon egyszerűen meghatározhatjuk az elemi jelek spektrumát, ha a fenti modulációs szabályban rögzített $2K \cdot \tau_0$ időtartamú négyszögjellel végezzük az egyes vivők modulációját. Ugyanis ekkor a különböző frekvenciájú vivők szorzótényezői egyaránt olyan négyszögjel-

sorozatok, amelyeknek az egyes komponensei véletlenszerűen változtatják értékeiket. Az ilyen sorozatok spektrális sűrűség-függvénye $(\sin x/x)^2$ -nek adódik. Ez a spektrális sűrűség-függvény a szorzás révén „elcsúszik” a szorzást végző vivőre:



lineáris amplitúdó-skála



logaritmikus amplitúdó-skála

OFDM spektrum négy vivő esetén

A példaként bemutatott görbék jól szemléltetik azt a várható tény, hogy az OFDM-nél használt vivők közötti frekvencia-különbség esetén az oldalsávok durván átfedik egymást. Viszont most nem az FDM-nél használt lineáris invariáns transzformációval (szűréssel) akarjuk az egyes részeket szétválogatni, hanem kihasználjuk a vivők közötti „koherenciát”, amit még a demoduláció vizsgálatánál részletezni fogunk.

A másik figyelemre méltó tanulsága a fenti ábrának, hogy a spektrum „sávon kívüli” csökkenése nem nagyon „gyors”, tehát a „szomszédok” zavarásának elkerülésére szükség lehet az egyes vivőknek a négyszögjeltől eltérő (szűrt) jellel történő szorzására, vagy pedig az összegjel szűrésére.

Az OFDM jel előállítás és demodulálása

Az OFDM ötletét először az 1950-es évek végén, a 60-as évek elején vetették fel, de mind a jel előállítása, mind a demodulálása túl bonyolult feladatnak látszott a szigorú kötöttségek miatt.

A módszer előnyös tulajdonságai (lásd alább) nagyszámú vivő alkalmazásánál jönnek elő, viszont a vivőnkénti külön-külön szorzások már önmagában elég bonyolult megvalósítást jelentenek. Akkor vált az OFDM igazán praktikus ötletté, amikor lehetővé vált a jelek digitális feldolgozása, tehát alkalmazni lehetett a digitális jelfeldolgozás (DSP) módszereit és eszközeit.

A modulációs szabálynál kimunkált (4) egyenletre visszatérve, abban azt láthatjuk, hogy az OFDM elemi jeleket, mint komplex alakú Fourier sor-párok összegét kell képezni:

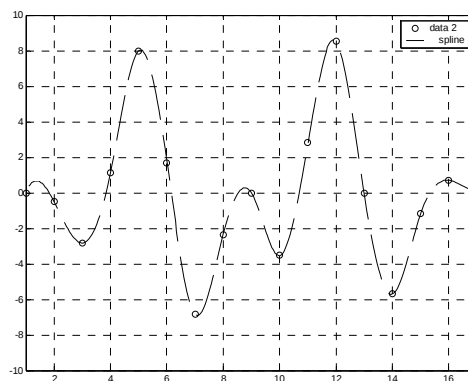
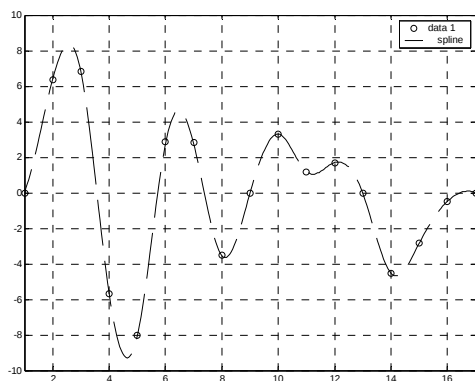
$$\sum_{n=1}^K [\xi_n^{(k)} \cdot e^{j\Omega_n \cdot t} \cdot e^{j\Phi} + \bar{\xi}_n^{(k)} \cdot e^{-j\Omega_n t} \cdot e^{-j\Phi}].$$

A diszkrét együtthatójú Fourier sorok kezelésére szolgál a diszkrét Fourier transzformáció (DFT), illetve annak inverz transzformációja (IDFT). A fenti összefüggés kezelésére, tehát a (3) egyenlettel definiált komplex vektorokkal leírt szimbólum-párokból az elemi jel meghatározására, „elkészítésére” éppen egy IDFT alkalmas. Ennek szemléltetésére vegyük az

előbbi két szimbólum-blokkot, és képezzünk a fentiek értelmében a szimbólum-párokból egy-egy komplex vektort az alábbi módon:

ω	0	Ω_0	$2\Omega_0$	$3\Omega_0$	$4\Omega_0$	$5\Omega_0$						$-5\Omega_0$	$-4\Omega_0$	$-3\Omega_0$	$-2\Omega_0$	$-\Omega_0$
ξ_1	0	0	$1-j$	$1-j$	$-1-j$	$-1+j$	0	0	0	0	0	$-1-j$	$-1+j$	$1+j$	$1+j$	0
ξ_2	0	0	$-1-j$	$1+j$	$1+j$	$-1-j$	0	0	0	0	0	$-1+j$	$1-j$	$1-j$	$-1+j$	0

(Emlékeztetünk arra, hogy az Ω_1 -el jelölt legkisebb frekvenciájú vivőnek két periódusa fér el az időrészben, tehát annak frekvenciája az Ω_0 -al jelölt érték kétszerese lesz, és így tovább a többi vivő.) A vektorok 16 eleműek, mert egy 16 pontos IFFT-vel akarjuk meghatározni az időfüggvényt. (Kettő hatványai kedvezőek a számolás szempontjából.) A vektorok jobbszélső elemei a „negatív” frekvenciájú együttthatók, amelyek a megfelelő pozitív frekvenciájú együttthatók konjugáltjai. Az inverz Fourier transzformáció eredményét szemlélteti az alábbi két ábra, amelyekben a kis karikák ábrázolják a 16 pontos IFFT eredményét, a rajtuk átfektetett szaggatott vonalú görbe pedig egy „simított” eredménye a mintáknak. Ezek a görbék – a szélektől eltekintve – jól egyeznek a modulációs szabály című pontban bemutatott példákkal.



Az IFFT által generált OFDM elemi jelek példái

A fentiekből egyenesen következik, hogy a demoduláció egyszerűen az OFDM elemi jelek megfelelő pontszámú DFT-je révén végezhető el, a komplex DFT együttthatók a megfelelő szimbólum-párokat eredményezik.

A szimbólum-párokat, mint komplex vektorokat jól lehet szemléltetni a komplex síkon.

Az OFDM tulajdonságai

Az OFDM, mint többvivős modulációs eljárás, az „egy-vivős” eljárásokkal kell, hogy felvegye a versenyt minden szempontból. Elsődleges összehasonlítási szempontnak tekinthetjük a rendelkezésre álló frekvenciasáv kihasználását, amit az egységnyi sávszélességben időegységként továbbítható szimbólumok számával mérhetünk, de gyakran használják bit/sec/Hz mértékegységet is.

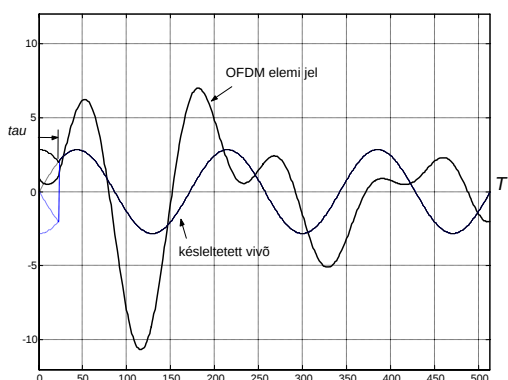
Ezzel összefüggésben a másik igen érdekes kérdés, hogy mennyire „kényes” egy átviteli eljárás a rendelkezésre álló sávon belül létrejövő torzításokra. Ezzel kapcsolatban az átviteli út lineáris, idő-invariáns torzítását, illetve a több-utas terjedés hatását vesszük egyszerűsített vizsgálat alá.

Természetesen gondosan mérlegelni kell azt is, hogy milyen hátrányos jellemzői vannak az OFDM-nek.

A lineáris torzítás hatása

Tekintettel arra, hogy az OFDM egy lineáris modulációs eljárás, a lineáris torzítás hatása gyengén stacionárius jelekre részletesen ismert. Itt most csak azt az esetet fogjuk végiggondolni, amelyben az átviteli út fáziskarakterisztikája eltér a lineáristól, azaz a futási idő karakterisztikája nem egyenletes. *Ezen belül is csak az elsődleges hatásra fogunk figyelni, és ennek érdekében először tételezzünk fel modulálatlan vivőket, amelyek tehát ortogonálisak, azaz kereszt-korrelálatlanok. (?)*

A feltételezett átviteli úton a különböző frekvenciájú vivők eltérő késleltetést szenvednek, és így a demoduláláskor az eredetileg egyazon időrészben lévő vivők időben elcsúsznak egymáshoz képest. Ezek a vivők azonban a réshatárokon – a moduláló jel szerint – változtatják a fázisukat, és így a különböző késleltetés miatt a vevőnél a fázisváltozások nem azonos időpontokban következnek be, ami szimbólumközi áthallást eredményez. (Az nem tekinthető megvalósítható megoldásnak, hogy mindegyik vivőre külön-külön kíséreljük meg a réshatárok megállapítását.)



Illusztrációként például álljon itt az az eset, amikor az eddigi példáinkban is szereplő négy vivő közül az egyik (itt éppen a második) τ értékű késleltetést szenved, ami erre a frekvenciára $\pi/4$ fáziskésésnek felel meg. Az ábra azt kívánja érzékeltetni, hogy a következő időrészben ennek a vivőnek négy különféle helyzete (fázisa) lehet, az ottani moduláló jeltől függően. (Ezeket három szaggatott és egy folytonos vonalú görbe szemlélteti a τ időszakban.)

Itt az is látszik, hogy a többiekől elcsúszott vivő – mivel közben változhat a modulációs tartalom – jellegzetesen nem fog nulla értékű szorzatot adni a többiekkel, tehát a blokkon belüli szimbólumok egymásra hatása is bekövetkezik, amit vivők közötti áthallásnak, vagy angolul inter carrier interference (ICI) neveznek.

Az alább következő, bekeretezett részben lévő ábra a demodulált jelet mutatja a fenti modulált jel esetén.

A több-utas terjedés hatása

Különösen a földfelszíni rádiócsatornák esetén tekinthető jellegzetes problémának a több-utas terjedés. Az adó és a vevő közötti út mentén, vagy környezetében található reflektáló felületek azt eredményezik, hogy nem csupán a legrövidebb (direkt) úton éri el az elektromágneses tér a vevőt, hanem ennél hosszabb úton is, tehát az előzőhöz képest késleltetve. Sokszor a hosszabb úton érkező, ún. reflektált jel kisebb, mint a direkt úton érkező, de előfordulhat még az is, hogy a hosszabb úton érkező jel a nagyobb. Jellemzően a nagyobb jel vételét, demodulációját kíséreljük meg, és így a kisebb jel egy speciális zavarként lép fel a demoduláció során.

A direkt- és a reflektált jel közötti időkülönbség jellemzően frekvenciától függetlenül a jel teljes sáv szélességében azonosan jelentkezik. Ennek megfelelően viszont ez azt jelenti, hogy a két jel különböző frekvencia-komponensei között különböző fáziseltérés lesz, mert a konstans időeltérést a frekvenciával lineáris fáziseltérés eredményezi. Így könnyen előfordulhat (a jel sáv szélességétől és az időkülönbségtől függően), hogy valamely frekvencián 180° fáziskülönbség lép fel a két jel között. Ez azt eredményezi, hogy ennek a frekvenciának egy szűk környezetében a két jel eredője kisebb, vagy lényegesen kisebb lesz, mint a sáv egyéb

részein. A jelenséget szelektív fadingnek nevezik, és súlyos romlást képes okozni a rádiócsatornás átvitel esetén.

A több-utas terjedés lineáris idő-invariáns transzformációs modelljét egyszerűen megszerkeszthetjük. Legyen h_g a direkt átviteli út súlyfüggvénye és tételezzük fel, hogy $c \cdot h_{g-\tau}$ a reflektált út súlyfüggvénye. Ha az adó η_t jelet bocsát ki, akkor a vevőbe érkező jelet – a fenti jelölésekkel – az alábbi módon fejezhetjük ki:

$$\tilde{\eta}_t = h_g \otimes \eta_t + c \cdot h_{g-\tau} \otimes \eta_t = (h_g + c \cdot h_{g-\tau}) \otimes \eta_t.$$

Vegyük mindkét oldal Fourier transzformáltját:

$$F(\tilde{\eta}_t) = F(h_g + c \cdot h_{g-\tau}) \cdot F(\eta_t) = \ddot{H}_\omega \cdot F(\eta_t),$$

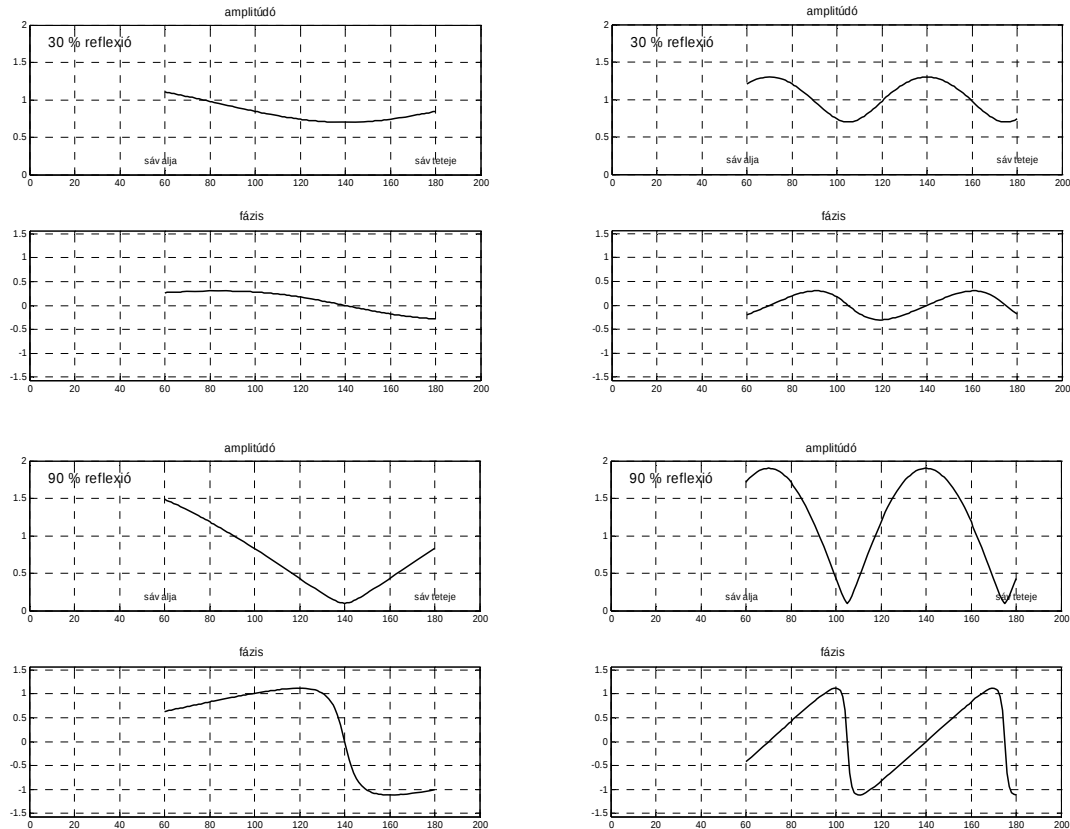
ahol $\ddot{H}_\omega$ a több-utas terjedést leíró lineáris transzformáció átviteli függvénye. Amennyiben h_g Fourier transzformáltja, tehát a direkt út átviteli függvénye $\dot{H}_\omega$, akkor:

$$\ddot{H}_\omega = \dot{H}_\omega + c \cdot \dot{H}_\omega \cdot e^{j\omega\tau}.$$

Kis átalakítással szemléletes eredményre jutunk:

$$\begin{aligned} \ddot{H}_\omega &= (1-c) \cdot \dot{H}_\omega + c \cdot \dot{H}_\omega \cdot (1 + e^{j\omega\tau}) = (1-c) \cdot \dot{H}_\omega + c \cdot \dot{H}_\omega \cdot (e^{-j\omega\tau/2} + e^{j\omega\tau/2}) \cdot e^{j\omega\tau/2} = \\ &= (1-c) \cdot \dot{H}_\omega + c \cdot \dot{H}_\omega \cdot 2 \cos(\omega\tau/2) \cdot e^{j\omega\tau/2} \end{aligned}$$

Az eredmény kiértékeléséhez tételezzük fel, hogy az egy-utas átviteli függvény ideális, azaz egységnyi a rendelkezésre álló B sávban, és nulla egyébként. Így – feltételezve a $c \leq 1$ értéket – a több-utas átvitelnek megfelelő lineáris transzformációt az alábbi ábrán illusztrálhatjuk:



Amplitúdó- és fázis-karakterisztika több-utas terjedés esetén
A baloldali oszlopban $B \cdot \tau = (6/7) \cdot \pi$, a jobboldaliban pedig $B \cdot \tau = (24/7) \cdot \pi$

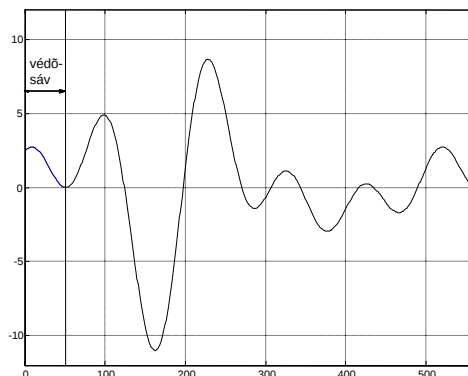
Az OFDM „ellenálló képessége” lineáris torzítással és szelektív fadinggel szemben,

a „védősávok”

Az egy-frekvenciás modulációs eljárások a fenti jelenségek ellen csak az átviteli út hibáinak kompenzálásával küzdhetnek, hiszen a szimbólumközi áthallás elkerüléséhez szigorúan kötött átviteli karakterisztikára van szükség. Ez a küzdelem különösen nehézé válik a több-utas terjedés esetén, sőt időben gyorsan változó csatornák (mozgó hírközlés) adaptív kiegyenlítése gyakorlatilag leküzdhetetlen feladatot jelent.

Az OFDM-nél felmerül egy másik lehetőség az átviteli út fenti hibáinak kompenzálására. Ugyanis mind a két vázolt hiba esetében az időtartományban egyszerűen követhető jelenséggel állunk szemben: vagy az egyes vivők csúszkálnak túl az időrések határain, vagy az egész jelnek egy elcsúszott másolata is megjelenik a vételnél. Semmi mást nem kell tenni, mint „helyet hagyni” ezeknek a zavaroknak, és így elfedhetők a demoduláció előtt. Az OFDM eddig nem említett lényeges elemét alkotják azok a „védősávok” amelyeket az időrések közé iktatva helyet biztosíthatunk a szétcsúszó elemi jel-komponenseknek, vagy az elcsúszva megérkező jel-másolatnak.

Az eddigi gondolatmenet alapján az elemi jelek közötti védősávokat üresen hagyhatnánk, azonban ennél jobbat is ki lehet találni. A védősávokban folytassuk az elemi jeleket, és így a „kiterjesztett” elemi jelek zavarmentes részét használhatjuk fel a demodulációra. Ezzel persze felvetődik az a kérdés is, hogy hol legyenek a védősávok: - az elemi jelet megelőzően, vagy azt követően. Hiszen az elemi jel „folytatása” történhet előre-felé, de vissza-felé is. A kérdést elsődlegesen úgy lehet megválaszolni, hogy kicsit részletesebben elemezzük a hibajelenségeket. A több-utas terjedés esetén a leggyakoribb helyzet az, amikor a direkt jel után némi késéssel megérkezik egy gyengébb reflektált jel. Ebből következően a zavar a következő időrés elejére csúszik, tehát annak ott kell helyet hagyni, azaz az elemi jeleket visszafelé kell a védősávba meghosszabbítani.



Ettől eltérően, az átviteli út fázistorzításából következő szétcsúszásra inkább az a jellemző, hogy található a vivők sokaságára egy jellemző helyzet, amihez képest lesznek korábbi és későbbi helyzetben lévő vivők is. Ily módon a védősávot jó lenne akár megosztani az időrés előtti és utáni részre. Szerencsére a jel digitális feldolgozása során ennek nincs jelentősége, mert az időrésben elhelyezkedő teljes vivőperiódusok miatt a feldolgozási időszak elcsúsztatható, úgy is szoktak fogalmazni, hogy körkörös (cirkulárisan) értelmezhető a kiterjesztett elemi jel.

A frekvenciasáv kihasználás

Ha a rendelkezésre álló B frekvenciasávot összefüggően (egy-vivősen) akarjuk szimbólum-továbbításra felhasználni, akkor megtanultuk, hogy τ_0 időközzel ismétlődő szimbólumok továbbításához nagyon kényelmesen (emelt koszinusz karakterisztika) $2\pi/\tau_0$ [rad/s] sávszélességű csatorna kell, de némi erőfeszítéssel (részleges válasz-függvény) megelégedhetünk π/τ_0 sávszélességgel is. A szükséges sávszélességet Hz-ben kifejezve $1/\tau_0$,

illetve $1/2\tau_0$ [Hz] adódik. Ez tehát azt jelenti, hogy 1 [Baud/Hz], illetve 2 [Baud/Hz] az elérhető kihasználtság, ami bináris esetben ugyanennyi bit/sec/Hz-et jelent:

Sáv-kihasználás := szimbólum-sebesség/elfoglalt frekvenciasáv

Az OFDM esetén azt is meg kell meghatározni, hogy hány vivőt kell elhelyezni a rendelkezésre álló frekvenciasávban a megkívánt jelzési sebesség eléréséhez.

Először nézzük a sáv-kihasználást! A rendelkezésre álló B sáv szélesség az alsó- és a felső sávhatár különbsége, amelyeket jelöljünk m és M indexszel:

$$B := \omega_M - \omega_m.$$

A legkisebb- és a legnagyobb frekvenciájú vivőknek a sávon belül kell lenniük:

$$\omega_m < \Omega_1, \text{ valamint } \Omega_K < \omega_M,$$

továbbá a legkisebb frekvenciájú vivőnek p_1 teljes periódusa kell, hogy elférjen az időrészben, míg mindegyik következő vivőnek mindig eggyel több, tehát a másodiknak p_1+1 , és az utolsónak $p_1+(K-1)$, azaz:

$$p_n \cdot \frac{2\pi}{\Omega_n} = 2K\tau_0, \text{ ha } 1 \leq n \leq K$$

Így a vivőfrekvenciák/periódus-számok viszonyára konstans adódik, amit jelöljön Ω_0 :

$$\Omega_0 := \frac{\Omega_n}{p_n} = \frac{2\pi}{2K\tau_0}, \text{ ha } 1 \leq n \leq K,$$

amit a vivőfrekvenciák „alap-harmonikusának” nevezhetünk, és természetesen ez lesz a szomszédos frekvenciák közötti konstans különbség is.

Ezzel a szükséges frekvenciasáv határait írhatjuk:

$$\omega_m < \Omega_1 = p_1 \cdot \Omega_0 = p_1 \cdot \frac{\pi}{K \cdot \tau_0}, \text{ valamint } \Omega_K = (p_1 + K - 1) \cdot \Omega_0 = (p_1 + K - 1) \cdot \frac{\pi}{K \cdot \tau_0} < \omega_M$$

Sok vivő esetén, azaz K nagy értékénél közelítsük a sáv szélességet Ω_K és Ω_1 különbségével:

$$B \cong \frac{2\pi}{2K\tau_0}(K-1) \cong \frac{\pi}{\tau_0}$$

Ez az érték viszont a jelen pont első bekezdésében említettével egyezik meg, amelyről ott beláttuk, hogy 2 Baud/Hz sávkihasználtságnak felel meg.

Folytassuk a szükséges vivők számának meghatározásával! A fenti két egyenlőtlenséget kell teljesíteni, de a spektrum korábbi vizsgálata alapján egyenlőségekké is alakíthatjuk azokat. Ugyanis, ha az első és az utolsó vivők oldalsávjait az első null-helyig vesszük tekintetbe, mint a szükséges sáv szélesség részét, akkor az alábbi egyenleteket írhatjuk:

$$\omega_m = \Omega_1 - \Omega_0 = (p_1 - 1) \cdot \Omega_0 = (p_1 - 1) \cdot \frac{\pi}{K \cdot \tau_0},$$

$$\omega_M = \Omega_K + \Omega_0 = (p_1 + K - 1) \cdot \Omega_0 + \Omega_0 = (p_1 + K) \cdot \frac{\pi}{K \cdot \tau_0}$$

Ha adott τ_0 , valamint a frekvenciasáv alsó- és felső határa, akkor a fenti két egyenlet megoldást kínál a használandó vivők számára, és a legkisebb frekvenciájú vivőnek az időrészbe illeszkedő periódus-számára. Fejezzük ki az első egyenletből p_1 -et, és helyettesítsük a második egyenletbe:

$$p_1 = 1 + \omega_m \cdot \frac{K \cdot \tau_0}{\pi},$$

$$\omega_M = (1 + \omega_m \cdot \frac{K \cdot \tau_0}{\pi} + K) \cdot \frac{\pi}{K \cdot \tau_0} = \frac{\pi}{K \cdot \tau_0} + \omega_m + \frac{\pi}{\tau_0}$$

A második egyenlet így K -ra a következőt eredményezi:

$$K = \frac{\pi}{\omega_M \cdot \tau_0 - \omega_m \cdot \tau_0 - \pi} = \frac{1}{2(f_M - f_m) \cdot \tau_0 - 1},$$

ahol az alsó- és felső sávhatár Hz-ben mért értékeit f -el jelöltük. Végül még arra hívnánk fel a figyelmet, hogy a fenti kifejezésben a nevező első tagja 1 és 2 között lehet, valamint K –ra és p_1 -re természetesen csak egész számok értelmesek.

Hátrányos tulajdonságok

Itt egy hátrányos jellemzőt említünk, amelyet egyébként is első helyen kell említeni rádiós alkalmazások esetén. Ez pedig az elemi jelek nem-konstans burkolója.

Bár a védősáv rendkívül előnyös, sőt mondhatni nélkülözhetetlen a lineáris torzítások kezelése érdekében, azért – természetesen – vannak hátrányos velejárói is. Elsőként említhetjük a jel által elfoglalt frekvenciasáv kiszélesedését. Ugyanis a védősáv beiktatása miatt a vivőfrekvenciákat meg kell növelni, hiszen az OFDM szimbólum-idő (beleértve a védősávot is) rögzített a továbbítani kívánt szimbólum-sebesség által. Amennyiben tehát a $2K \cdot \tau_0$ blokk-időtartamból valamekkora részt védősávra használunk fel, akkor a teljes vivőperiódusoknak egy rövidebb időszakba kell beleférniük, így frekvenciájukat meg kell növelni. Ezáltal természetesen megnövekszik a vivők közötti frekvenciaköz is, tehát megnő a sávszélesség, és így romlik a sávkihasználtság, hiszen közben a továbbított szimbólum-sebesség nem változott.

A nagyobb frekvenciasáv-foglalásnak további következményei is lesznek. A nagyobb frekvenciasávban több zaj adódik a jelhez, amelynek ezáltal romlanak az esélyei a hibamentes azonosításra, tehát romlik a szimbólumok tévesztési aránya, amennyiben a jel teljesítményét változtatlanul hagyjuk. Úgy is szoktak fogalmazni, hogy a védősávban lévő jelet nem tudjuk felhasználni a detekcióhoz, tehát azt elpazaroljuk, miközben a zaj kéretlenül is megnövekszik.

Ellenőrző kérdések

1. Hány vivőt használjunk OFDM moduláció esetén, ha 10^6 Baud jelzési sebességű szimbólum-sorozatot akarunk továbbítani azon a csatornán, amely 125 kHz és 750 kHz között visz át? (4)
2. Mennyi lesz az előbbi esetben az OFDM jel időtartama? ($8 \mu s$)
3. Az első kérdés adataival számolva hány periódusa fog elférni legkisebb frekvenciájú vivőnek az előző időtartamban? (2)
4. Legyen adott 39 darab vivő, valamint 2400 Baud szimbólum-sebesség! Mekkora sávszélességű csatorna kell ahhoz, hogy az OFDM jel első null-helyek közötti spektrális sűrűségfüggvénye beleférjen? (1230 Hz)