1

ÜZENETEK ÉS ZAVAROK

A híradástechnika egyik alapvető feladata az információforrások üzeneteinek továbbítása. Ezt a feladatot a híradástechnikai rendszerek különböző természetes és mesterséges eredetű (ember által keltett) zavarok, zavaró hatások között végzik. Teljesen természetes tehát, hogy szeretnénk minél mélyebben megismerni a továbbítandó üzeneteket és a leküzdendő zavarokat. A megismerés után pedig szeretnénk lehető egyszerű, de mégis jellemző matematikai modellekkel leírni azokat. Sajnos az egyszerűségre való törekvésünkben nem vagyunk igazán sikeresek. Az üzenetek és a zavarok egyik legalapvetőbb és közös tulajdonsága a véletlenszerűség. Ezért a lényegüket legjobban megragadó matematikai modellként a már korábban megismert sztochasztikus folyamatokat használhatjuk. A közös szóhasználat érdekében jelenleg összefoglaljuk a sztochasztikus folyamatokra vonatkozó, a tantárgyban széleskörűen felhasználásra kerülő ismereteket, illetve néhány esetben - amikor szükséges - ki is bővítjük azokat.

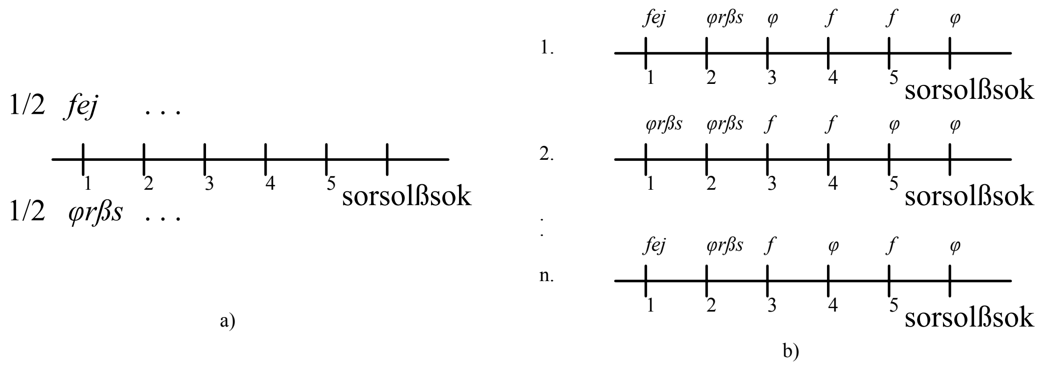
SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK JELLEMZÉSE

Kezdjük a jellemzést a meghatározással, a definícióval. Rögzítsük le, hogy mit értünk sztochasztikus folyamat alatt.

Sztochasztikus folyamatok definíciója

A sztochasztikus folyamat értelmezését kétféle módon adjuk meg. Ennek a kettősségnek az a magyarázata, hogy a kétféle értelmezés vagy szemlélet segíti a tájékozódást, az eligazodást a problémák megoldásában.

Az egyik értelmezés szerint sztochasztikus folyamatnak nevezzük a valószínűségi változók rendezett seregét, vagy pontosabban *időben* rendezett seregét. (Térben rendezett sereg esetén a sztochasztikus *mező* kifejezést szokták használni.) Tehát például, ha egy szabályos pénzdarabot egymás után sokszor feldobnánk, akkor egy fej-írás értékkészletű valószínűségi változó sereget kapnánk, amelyet sztochasztikus folyamatnak nevezünk (11.a ábra).



1.1. ábra Sztochasztikus folyamatok kétféle értelmezése

A másik értelmezés szerint, az előző példánál maradva, dobjuk fel sokszor a pénzdarabot, és az így kapott tényleges fej-írás sorozatot tekintsük egy sztochasztikus folyamat egyik realizációjának (megvalósulásának), mintafüggvényének. A folyamat maga pedig az ilyen realizációknak az összessége. Az előbb bevezetett realizációk vagy mintafüggvények összességét, persze úgy is szemlélhetjük, mint függvényértékű valószínűségi változókat, azaz most egy-egy sorsolásra egy egész fej-írás sorozatot kapunk eredményül (1.1.b ábra). (Amennyiben egy-egy realizáció akár végtelen sok sorsolásból is állhat és így egy realizáció kimeríti az egyetlen pénzdarabbal való sorsolgatást, akkor ezen egyszerűen úgy segíthetünk, hogy a további realizációkat más és más szabályos érmékkel való sorsolással készítjük.)

Nyilvánvaló, hogy a sztochasztikus folyamatok fenti két meghatározását nem csak időben diszkrét esetekben használhatjuk. Az időben folytonos értelmezési tartományú folyamatok esetén viszont a második szemlélet sokszor előnyösebb is lehet. Ekkor a véletlen függvények szemléletesebben képviselhetik a folyamatot, mint a valószínűségi változó sereg.

Sztochasztikus folyamat megadása

A fentiek értelmében egy sztochasztikus folyamatot akkor tekinthetünk adottnak vagy ismertnek, ha vagy a valószínűségi változó sereg valószínűségi jellemzőit rögzítjük le, vagy a realizációkat adjuk meg. Ez utóbbi módszer nyilván csak véges sok realizáció esetén lenne járható út, ezért általában kerüljük ezt a módszert és rendszerint az előbbi utat választjuk.

Hogyan kell megadni a valószínűségi változó sereg valószínűségi jellemzőit? Az természetes, hogy nem elegendő az egyes valószínűségi változókat külön-külön jellemezni (a szokott módon, a valószínűség eloszlásukkal). Ekkor ugyanis hiányozna az egymáshoz való kapcsolataik lerögzítése, ami pedig egy ilyen sereg esetén nagyon lényeges. Tehát feltétlenül a sereg együttes jellemzésére van szükség, amit nyilván az együttes valószínűség eloszlással adhatunk meg. Itt viszont szintén beleütközünk abba a problémába, hogy mit csináljunk akkor, ha a seregnek végtelen sok tagja, vagy ami még rosszabb megszámlálhatatlanul végtelen sok eleme van (ez a helyzet folytonos értelmezési tartomány esetén). Ebben a tárgyban azt a módszert választjuk, hogy a folyamat *minta-n-eseinek* együttes eloszlását adjuk meg, ahol a minták száma (n) tetszés szerinti lehet. Így vizsgálataink során - ritka kivételektől eltekintve - valószínűségi vektorváltozókra korlátozzuk magunkat.

A sztochasztikus folyamatot tehát akkor tekintjük adottnak (ismertnek), ha lerögzítettük az alábbi *n-dimenziós* együttes eloszlásfüggvényét:

$$F_{\xi}\left(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\ldots\mathrm{x}_n\right)\equiv F_{\xi}^{(n)}(\mathbf{x}):=\mathbf{P}\left(\xi_1<\mathrm{x}_1\cap\xi_2<\mathrm{x}_2\cap\ldots\cap\xi_n<\mathrm{x}_n\right). \qquad (1.1)$$

Itt ξ-vel jelöltük a szóban forgó folyamatot (ezt a nevet adtuk neki), az **x** vektor jelöli azt az n darab értéket, amelyhez viszonyítva adott az az együttes valószínűség, amit az azonosságlánc utolsó tagja ír le, ahol ξ_i a folyamat *i-edik* mintája.

Ha példaként az előző pénzfeldobás esetére akarjuk megadni az együttes valószínűségeloszlást, akkor nagyon egyszerű a dolgunk. Ez a folyamat időben diszkrét, értékkészlete a *fej* és az *írás*, valamint az érme feldobásaiként kijövő eredmények egymástól függetlenek. Így a pénzfeldobási folyamat diszkrét n dimenziós együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{\acute{e}rme}^{(n)}\left(\text{bármilyen } \textit{fej - írás} \text{ sorozat}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Általában messze nem ilyen egyszerű egy folyamat n-dimenziós együttes eloszlását megadni. Itt még csak nem is arra gondolunk, hogy milyen nehéz egy, a valóságban előforduló folyamat matematikai modelljét megalkotni, hanem csupán arra, hogy az érdekes, fontos, jelentős folyamatmodellek mennyivel összetettebb eloszlásfüggvénnyel rendelkeznek. A következő pontban az egyik legfontosabb modellel foglalkozunk.

A Gauss-folyamat

Első lépésként vegyünk egy $\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}} = [\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ valószínűségi vektorváltozót. A $\boldsymbol{\zeta}$ vektorváltozó a ζ folyamat n darab mintáját fogja össze. (Itt a $\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}$ transzponáltat jelent, mivel a tárgynak ebben az első részében a vektorokat eredendően oszlopvektoroknak tekintjük.) A $\boldsymbol{\zeta}$-t *n-dimenziós normális*, vagy *gaussi valószínűségi vektorváltozónak* nevezzük, ha valószínűségsűrűsége az $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = [\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n]$ helyen az:

$$f_{\zeta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{K}|(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})} \tag{1.2}$$

n-dimenziós normális sűrűségfüggvénnyel írható le.

Az (1.2) kifejezésben csak két dolog lehet ismeretlen. Az egyik a $\mathbf{K}$ kovariancia mátrix, a másik pedig az $\mathbf{m}$ várhatóérték-vektor. (A $|\mathbf{K}|$ illetve a $\mathbf{K}^{-1}$ a determinánst illetve az inverz mátrixot jelöli.) A várhatóérték-vektor *i-edik* elemét, valamint a kovariancia mátrix *i,l-edik* elemét a következő módon kapjuk:

$$\begin{aligned} m_i &:= \mathbf{M}\zeta_i \\ K_{i,l} &:= \mathbf{M}[(\zeta_i - m_i)(\zeta_l - m_l)], \end{aligned} \tag{1.3}$$

ahol $\mathbf{M}$ a várható érték képzését jelöli.

Most pedig definiáljuk a Gauss-folyamatot! Azt mondjuk, hogy egy valós értékkészletű ζ folyamat *Gauss-folyamat,* ha tetszőleges $[\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ mintavektora normális vektorváltozó, azaz n-dimenziós együttes sűrűségfüggvénye az (1.2) kifejezéssel adható meg.

Ez a definíció tehát azt jelenti, hogy a Gauss-folyamatnak nem csupán egy vagy két mintájának kell normális eloszlású valószínűségi változónak lenni, hanem tetszés szerinti sok minta *együttesen* is normális eloszlású kell legyen.

A definícióból továbbá egyértelműen következik, hogy egy Gauss-folyamatot két függvénnyel egyértelműen megadhatunk :

az egyik az $m_{\xi}(t) := \mathbf{M}\,\xi_t$ várhatóérték-függvény,

a másik a $K_{\xi}(t, \vartheta) := \mathbf{M}[(\xi_t - \mathbf{M}\xi_t)(\xi_{\vartheta} - \mathbf{M}\xi_{\vartheta})]$ kétváltozós kovariancia-függvény.

A folyamat leírási lehetősége a fenti két - a későbbiekben még jobban megismert - jellemzővel, kétségtelenül jelentős egyszerűsítésnek látszik, azonban a Gauss-folyamatok igazi jelentőségét a "központi" szerepük adja meg, amit a központi határeloszlás-tételek fogalmaznak meg, illetve támasztanak alá. Ezek szerint sok esetben fennállnak olyan egyszerű feltételek, amelyek megalapozottá teszik egy véletlen jelenségnek Gauss-folyamattal történő modellezését.

Stacionaritás, stacionárius folyamatok

Ebben a pontban sztochasztikus folyamatok időbeli stabilitási kérdéseivel foglalkozunk. Ugyanis sok esetben a vizsgált folyamatok alapvető statisztikai tulajdonságai - legalábbis a vizsgálati időszakban - állandónak tekinthetők. Ez persze nagy szerencse, mert csak az időben állandósult viselkedést mutató, vagy más szóval stacionárius folyamatokat tudjuk viszonylag egyszerűen kezelni.

Jelenleg tehát vizsgálatainkat azokra a folyamatokra korlátozzuk, amelyek valamilyen értelemben állandósult viselkedést mutatnak. Ha a kezdeti elemi példánkra gondolunk, amelyben egy szabályos érme feldobálásáról volt szó, egy rendkívül stabil viselkedésű folyamattal találkoztunk. A híradástechnikában érdekes folyamatok általában nem ilyen stabil viselkedésűek. Képzeljünk el például egy folyamatot, amelynek realizációit úgy kapnánk, hogy egyetlen ember időben elkülönülő beszéd (ének) megnyilvánulásait egy mikrofonnal elektromos jellé alakítva rögzítenénk. Könnyű elképzelni, hogy ezek a jelrészletek eltérő statisztikai tulajdonságokkal rendelkeznének. Az egyes részek tulajdonságait alapvetően befolyásolná az illető személy állapota: kivel, miről beszél, mit mond, mit akar elérni, stb. Ezt a folyamatot nem nagyon tudjuk stacionáriusnak elképzelni. Viszont azt is beláthatjuk, hogy az említett "instabilitási" okoktól bizonyos esetekben, mint például egy telefonhálózat alapvető paramétereinek a meghatározása első közelítésben célszerű elvonatkoztatni.

Ilyen és hasonló indokok alapján korlátozódunk a stacionárius folyamatok vizsgálatára, amelyeknek két csoportját különböztetjük meg.

Erősen stacionárius folyamatok

Az időbeni állandóság legszigorúbb, legerősebb kritériumát úgy kapjuk meg, ha a folyamatot meghatározó n-dimenziós együttes valószínűség eloszlásfüggvény állandóságát írjuk elő. *Erősen stacionárius*nak nevezzük a ξ folyamatot, ha n-dimenziós együttes eloszlásfüggvénye az időeltolásra érzéketlen. Azaz:

$$F_{\xi}\left(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, \ldots \mathrm{t}_n, \mathbf{x}\right) \equiv F_{\xi}\left(\mathrm{t}_1 + \tau, \mathrm{t}_2 + \tau, \ldots \mathrm{t}_n + \tau, \mathbf{x}\right), \tag{1.4}$$

ami tehát azt jelenti, hogy bármilyen módon kitűzve n időpontot a folyamaton, az együttes eloszlásfüggvény változatlan marad, ha az összes időpontot egymáshoz kötötten bármekkora idővel eltoljuk.

Az erős stacionaritás igen szigorú követelmény. Valójában való életbeli véletlen jelenségeken - például üzenetek bizonyos csoportján - gyakorlatilag lehetetlen ellenőrizni, hogy eleget tesznek-e ennek a követelménynek, azaz megállapítani, hogy jó modell-e rájuk az erősen stacionárius sztochasztikus folyamat. Másrészt viszont bizonyos, igen érdekes és praktikus problémák megválaszolásához szükséges kikötni a folyamat erős stacionaritását, mert ellenkező esetben például nem ismerjük a megoldást. A következő pontban enyhíteni fogjuk a kötöttségeket, és egy kevésbé szigorú kikötéssel bővítjük azoknak a folyamatoknak a körét, amelyeket még mindig valamilyen mértékig stacionáriusnak nevezünk.

Gyengén stacionárius folyamatok

Szerencsére igen sok olyan feladat merül fel a sztochasztikus folyamatokkal kapcsolatban, amelyek megoldása nem igényli az n-dimenziós valószínűség eloszlásfüggvény időeltolásra való érzéketlenségét. Nagyon sok és fontos esetben már az is elegendő, ha a folyamaton vett néhány (rögtön meghatározásra kerülő) átlagérték időben állandó.

Azonban nem minden folyamatra adjuk meg ezt a gyengébb kikötést, hanem csak azokra a folyamatokra, amelyeknek bármely pillanatra vonatkozó négyzetes várható értékük véges, azaz $\mathbf{M}\,\xi^2 < \infty$. Az ilyen folyamatokat *másodrendű* vagy *Hilbert-folyamat*nak is nevezik. Ha meggondoljuk, hogy ez a megszorítás gyakorlatilag azt jelenti, hogy a folyamat "pillanatnyi teljesítménye" nem lehet végtelen, akkor nyilván belátjuk, hogy nem fog korlátozást jelenteni híradástechnikai problémák megoldásában, viszont a Hilbert-folyamatokra bizonyíthatóan minden pillanatra létezik a várhatóérték-függvény és a kovariancia-függvény, illetve a vele rokon korreláció-függvény:

$$L_\xi(t,\vartheta) := \mathbf{M}\xi_t\xi_\vartheta \ . \tag{1.5}$$

Ezek után *gyengén stacionárius*nak nevezzük azokat a Hilbert-folyamatokat, amelyekre:

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\ \xi_t = \mathbf{M}\ \xi_0, \\ &\mathbf{M}\ \xi_t\ \xi_\vartheta = \mathbf{M}\ \xi_{\vartheta-t}\ \xi_0 = \mathbf{M}\ \xi_\tau\ \xi_0\ , \end{aligned} \tag{1.6}$$

valamennyi t időpontra és τ időközre.

Tehát a gyengén stacionárius folyamatok várható értéke időfüggetlen, és a korreláció-függvénye is csak az *időköz* függvénye. Erre a - rendkívül gyakran használt - egyváltozós korreláció-függvényre külön jelet is bevezetünk, és a továbbiakban a (jelző nélküli) korreláció-függvény alatt a következőt értjük:

$$R_\xi(\tau) := \mathbf{M}\xi_\tau\xi_0 \ . \tag{1.7}$$

A korreláció-függvény két fontos tulajdonsága: (*i*) legnagyobb értékét a nulla helyen veszi fel, (*ii*) páros függvény. Azaz:

$$\begin{aligned} &\left|R_\xi(\tau)\right| \le R_\xi(0) = \mathbf{M}\xi_0^2, \\ &R_\xi(\tau) = R_\xi(-\tau). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Az erős- és a gyenge stacionaritás kapcsolata

Nem nehéz a fenti definíciók alapján elképzelni, hogy ha egy folyamat erősen stacionárius, akkor feltehetőleg gyengén is az lehet. Persze ezt bizonyítani is lehet, amit Hilbert-folyamatra itt be is mutatunk.

Írjuk fel részletesen az általában csak "rövidítve" jelölt várható értékeket!

$$\mathbf{M}\xi_t = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi_t}(x), \mathbf{M}\xi_{t+\tau}\xi_t = \iint_{-\infty}^{\infty} x\tilde{x} dF_{\xi_{t+\tau},\xi_t}(x\tilde{x}) \ . \tag{1.9}$$

Mivel erősen stacionárius esetben a definíció értelmében $F_{\xi_t} = F_{\xi_0}$, és $F_{\xi_{t+\tau},\xi_t} = F_{\xi_\tau,\xi_0}$, az (1.9) kifejezésből következik, hogy $\mathbf{M}\ \xi_t = \mathbf{M}\ \xi_0$, és $\mathbf{M}\ \xi_{t+\tau}\ \xi_t = \mathbf{M}\ \xi_\tau\ \xi_0$, amit bizonyítani kellett.

Az (1.9) kifejezés ugyanakkor jól rámutat arra is, hogy általában semmit sem lehet mondani az erős stacionaritásra a gyenge stacionaritás megléte esetén. Hiszen abból, hogy a fenti integrálok értékei változatlanok, még nem következik semmi az integrálandókra vonatkozóan.

Van azonban egy igen fontos kivétel. Nevezetesen, ha egy ξ Gauss-folyamat gyengén stacionárius, akkor egyúttal erősen is stacionárius. Ennek a bizonyítékát már ismerjük, hiszen ha felidézzük azt a korábbi állítást, hogy egy Gauss-folyamatot egyértelműen meghatároz (tehát megadja az n-dimenziós együttes eloszlását) a várhatóérték-függvénye és a kovariancia-függvénye, akkor könnyen beláthatjuk, hogy ezeknek a függvényeknek az időbeli állandóságából következik az eloszlásfüggvény állandósága is. Márpedig ezek a függvények már gyengén stacionárius esetben is időfüggetlenek. (A pontosság kedvéért megjegyezzük, hogy annak belátását mindenkire rábízzuk, miszerint a *korreláció-függvény* időfüggetlensége esetén a *kovariancia-függvény* is időfüggetlen.)

Sztochasztikus folyamatok folytonossága

Bár a való életbeli jelenségek többnyire természetüknél fogva folytonosak, jól kezelhető matematikai modellekben szakadások könnyen előfordulhatnak. A későbbi vizsgálatainkban fontos eredményeket csak abban az esetben fogunk tudni garantálni (legalább) gyengén stacionárius folyamatokra, ha azok bizonyos mértékben - *négyzetes középben* - folytonos viselkedést mutatnak.

Egy Hilbert-folyamatot akkor nevezünk *négyzetes középben folytonos*nak, ha két, egymástól τ időközre lévő mintái különbségének négyzetes várható értéke egy pozitív ε küszöb alatt marad, amennyiben a két időpont egy pozitív δ időköznél közelebb van egymáshoz:

$$\mathbf{M}\left(\xi_{t+\tau}-\xi_t\right)^2<\varepsilon,\text{ha }\left|\tau\right|<\delta, \tag{1.10}$$

ahol τ és δ > 0.

Mi biztosíthatja egy folyamat négyzetes középben értelmezett folytonosságát? Gyengén stacionárius folyamatokra egyszerű ilyen feltételt adni. Nevezetesen a gyengén stacionárius ξ folyamat négyzetes középben folytonos, ha az $R_\xi(\tau)$ korreláció-függvény a τ=0 helyen folytonos.

SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATOK LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓI

A híradástechnikáról eddig tanultak alapján tudjuk, hogy frekvenciaszelektív áramköröket, más néven szűrőket széles körben használunk a jelek továbbítása, erősítése, feldolgozása során. Így elég természetesen vetődik fel az a kérdés, hogy mi történik az üzeneteket illetve a zavarokat modellező sztochasztikus folyamatokkal, ha azok szűrőkön jutnak át, illetve - a szűrők jól ismert modelljének megfelelően - lineáris invariáns transzformációt szenvednek.

Mivel a sztochasztikus folyamatokat n-dimenziós együttes eloszlásuk ismeretében tekintettük adottnak, ezért a lineáris transzformáció hatásának legkézenfekvőbb jellemzését úgy kapnánk meg, ha meghatároznánk az együttes eloszlásfüggvényük transzformációját. Ez azonban messze nem triviális feladat. Tekintsük át röviden, hogy mi is ezzel a gond!

A lineáris invariáns transzformáció leírását az időtartományban a jól ismert konvolúcióintegrál adja:

$$y_t=\int_{-\infty}^{\infty} h_\vartheta x_{t-\vartheta}\,d\vartheta\,. \tag{1.11}$$

Amennyiben nem determinisztikus jelek, hanem sztochasztikus folyamatok transzformációja a feladat, akkor elég triviálisan adódik az az értelmezés, hogy az (1.11) szerinti függvénytranszformációt a folyamat realizációin kell végrehajtani, azaz:

$$\eta_t(a)=\int_{-\infty}^{\infty} h_\vartheta \xi_{t-\vartheta}(a)\,d\vartheta\,. \tag{1.12}$$

Tehát a ξ folyamat valamely *a* elemi eseményhez tartozó realizációja a transzformáció hatására $\eta_t(a)$ realizációvá válik.

A lineáris transzformáció tehát egy súlyozott késleltetett "összegzést" végez. Az idézőjelet el is hagyhatjuk, amennyiben időben diszkrét pillanatokban értelmezett a folyamat, ami jó összhangban van az n-dimenziós együttes valószínűségeloszlással történő leírással. (Ezen a módon ugyanis n-dimenziós valószínűségi vektorváltozókat adunk meg.) Viszont mivel a sztochasztikus folyamatot úgy értelmeztük, hogy az a valószínűségi változók rendezett serege, ezért a lineáris transzformáció után minden pillanatban valószínűségi változók összege jelenik meg. Valószínűségi változók összegének valószínűségeloszlásáról pedig annyit legalább tudunk, hogy amennyiben a komponensek függetlenek, akkor az összegük eloszlása a komponensek eloszlásainak konvolúciója lesz.

Másrészt azt is tudjuk, hogy elég sok független folyamat összege stacionárius Gauss-folyamatnak tekinthető, ha a komponensek egymással összemérhetők, azaz nincs közöttük domináns. (Ha valaki szereti a meggyőző szemléltetést - **nem bizonyítást -** akkor érdemes összeadnia legalább három azonos, egyenletes eloszlású valószínűségi változót.)

Ezek alapján kijelenthetjük, hogy a lineáris transzformáció hatásaként a folyamatok Gauss-folyamathoz tartanak, illetve egy **Gauss-folyamat lineáris transzformáltja is Gauss-folyamat**. Ugyanakkor még nem tudjuk megállapítani egy transzformációról, hogy a folyamatra gyakorolt hatásai elfogadhatók-e a felhasználás szempontjából. Viszont emlékezhetünk arra, hogy determinisztikus jelek esetén a szemléletes megoldást a Fourier transzformáció segítette. A lineáris transzformáció hatását a frekvenciatartományban tudtuk jól kezelni. Mit lehetne most tenni?

Az egyik módszer már ismert, nevezetesen a folyamatok spektrális sűrűségének a meghatározása, illetve annak lineáris transzformációja. Ezt foglaljuk össze egy rövid, de fontos "kitérő" után.

Sztochasztikus folyamatok időátlaga

Egy lineáris transzformáció is valamiféle átlagolást végez, bár igaz, hogy általában messze nem azonos súllyal veszi az egyes összetevőket. Jellemzően a múlt egyre csökkenő súlyú beszámítása történik az átlagba. Ugyanakkor gyakran érdekelnek bennünket a folyamat azonos súllyal vett időátlagai is. Hogyan értelmezhetjük ezeket?

Nyilván minden további nélkül vehetjük a folyamat egyes realizációit és képezhetjük például az alábbi átlagokat:

$$\frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} \xi_t(a)dt \;\text{ vagy }\; \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} \xi_t^{\,2}(a)dt\,. \tag{1.13}$$

(Ha feszültségfolyamatra gondolunk, akkor az első az "egyenáramú" középértéket, a második pedig az átlagteljesítménnyel arányos mennyiséget adja, ahol az arányossági tényező az ellenállás reciproka, amelyen a feszültséget mértük.)

Amennyiben a folyamat például a teljes időtartományban értelmezett, akkor nyilván érdekesek az (1.13)-ban szereplő mennyiségek határértékei, azaz amikor τ tart ∞-hez. Azonban amíg azt természetesnek vehetjük, hogy a τ időtartamra vett átlagok realaizációnként, vagy az időtartam helyétől függően különbözőek, addig sajnos arra sincs semmi biztosíték, hogy az említett határértékek minden realizációra azonosak lesznek. Mi is lesz tehát a **folyamat** időátlaga?

Kétféle időátlagot is definiálhatunk. Az egyik négyzetes középben, a másik pedig 1 valószínűséggel létezik. Ezek szerint, ha létezik $\mathbf{A}\xi$, amelyre

$$\lim_{\tau\to\infty}\mathbf{M}\left(\mathbf{A}\xi-\tfrac{1}{\tau}\int_{(\tau)}\xi_t(a)dt\right)^2=0, \qquad (1.14)$$

akkor **A**ξ-t a folyamat négyzetes középben vett időátlagának nevezzük. Másrészt pedig, ha létezik $\tilde{\mathbf{A}}\xi$, amelyre

$$\mathbf{P}\left(a\middle|\tilde{\mathbf{A}}\xi=\lim_{\tau\to\infty}\tfrac{1}{\tau}\int_{(\tau)}\xi_t(a)dt\right)=1, \qquad (1.15)$$

akkor $\tilde{\mathbf{A}}\xi$-t a folyamat 1 valószínűségű időátlagának nevezzük.

Az időátlag és a várható érték (sokaságátlag) viszonya

Műszaki, vagy (bennünket most közelebbről érdeklően) híradástechnikai szempontból különösen jelentős, ha a vizsgált folyamatoknak létezik időátlaguk, és az jól meghatározott viszonyban van a folyamat mintáit jelentő valószínűségi változók átlagával, amit - mint jól tudjuk - várható értéknek hívunk.

Ergodikusnak nevezzük a ξ folyamatot, ha tetszőleges η=g(ξ) függvényre megegyezik az időátlag és a várható érték.

A folyamat ergodicitása leginkább azért kedvező, mert ebben az esetben (szinte) bármely realizáció hordozza a folyamat statisztikai tulajdonságait.

Persze az is érdekes kérdés, hogy milyen feltételek mellet várhatjuk egy folyamatról, hogy ergodikus. Röviden azt mondhatjuk, hogy az "elhaló" korreláció-függvényű folyamatok ergodikusak. A gyakorlati esetekben a korreláció-függvénynek ez az elhaló tulajdonsága elég természetesen bejön. Ez ugyanis azt jelenti, hogy a folyamat belső kapcsolatai az idő múlásával jelentéktelen mértékűre csökkennek.

A spektrális sűrűség és spektrális eloszlás

Térjünk vissza fő célkitűzésünkhöz, azaz a sztochasztikus folyamatok lineáris transzformációjához. A folyamatok spektrális sűrűségével kapcsolatos ismeretek összefoglalásával folytatjuk.

Ha egy ξ gyengén stacionárius folyamat korreláció-függvénye abszolút integrálható, akkor létezik az alábbi integráltranszformáció, ami a folyamat spektrális sűrűségét definiálja:

$$s_\xi(\omega):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_\xi(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\,. \qquad (1.16)$$

Mielőtt felidézzük, hogy miként is jellemzi $s_\xi(\omega)$ a folyamatot, vizsgáljuk meg, hogy miként hat a folyamatnak erre a frekvencia-tartománybeli jellemzőjére a lineáris invariáns transzformáció!

Az η transzformált folyamat spektrális sűrűségét a következő módon kapjuk:

$$s_\eta(\omega)=\mathrm{F}_\omega\{R_\eta(\tau)\}=\mathrm{F}_\omega\{\mathbf{M}\eta_\tau\eta_0\}.$$

Behelyettesítve η-nak a konvolúcióintegrállal kifejezhető értékeit, az alábbi eredményre jutunk:

$$\begin{aligned} s_\eta(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h_{\vartheta_1}\xi_{\tau-\vartheta_1}d\vartheta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_{\vartheta_2}\xi_{0-\vartheta_2}d\vartheta_2\right]e^{-j\omega\tau}d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty} h_{\vartheta_1}h_{\vartheta_2}R_\xi(\tau-\vartheta_1+\vartheta_2)e^{-j\omega\tau}d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\tau \end{aligned} \qquad (1.17)$$

Ahol kihasználtuk azt az ismeretünket, hogy a ξ folyamat két különböző pillanatban vett értékei szorzatának a várható értéke nem más, mint a korreláció-függvény a két időpont különbségénél.

Ha elvégzünk egy $\gamma = \tau - \vartheta_1 + \vartheta_2$ helyettesítést, akkor kapjuk:

$$s_\eta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\gamma)e^{-j\omega\gamma}d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} h_{\vartheta_1}e^{-j\omega\vartheta_1}d\vartheta_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_{\vartheta_2}e^{j\omega\vartheta_2}d\vartheta_2 \, , \qquad (1.18)$$

ahol könnyű észrevenni, hogy az első integrál nem más, mint ξ spektrális sűrűsége, a második és harmadik pedig a h súlyfüggvényű lineáris transzformáció átviteli függvénye (jelölje) H_ω és annak konjugáltja. Tehát az eredmény:

$$s_\eta(\omega) = s_\xi(\omega)\left|H_\omega\right|^2 . \qquad (1.19)$$

Most pedig nézzük, hogy mit is ad eredményül az (1.16)-al definiált spektrális sűrűség! Vegyünk egy ideális sáváteresztő szűrőt Ω sávközép-frekvenciával és b sávszélességgel, azaz legyen most a H_ω átviteli függvény az 1.2. ábra szerinti!

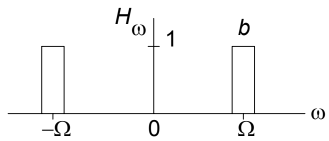
A szűrő kimenetén megjelenő η folyamat négyzetes várható értéke bármely, pl. a 0 időpillanatban: $\mathbf{M}\ \eta_0^2 = R_\eta(0)$.

A korreláció-függvény viszont nem más, mint a spektrális sűrűség inverz Fourier transzformáltja, tehát:

$$R_\eta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_\eta(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(\omega)\left|H_\omega\right|^2 e^{j\omega\tau}d\omega \, ,$$

aminek a τ=0-nál vett értéke a következő:

$$R_\eta(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_\eta(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(\omega)\left|H_\omega\right|^2 d\omega \, .$$



1.2. ábra Ideális sáváteresztő szűrő

Ha tekintetbe vesszük, hogy a szűrő jelenleg egységnyi átvitelű a b sávban és 0 egyébként, valamint ha b-t egyre kisebbre választjuk (tartunk egy "tűszűrőhöz"), akkor egyre jobb lesz az alábbi közelítés:

$$\mathbf{M}\eta_0^2 = R_\eta(0) = 2\int_{\Omega-b/2}^{\Omega+b/2} s_\xi(\omega)\cdot 1\cdot d\omega \cong 2bs_\xi(\Omega)\, ,$$

azaz a függvénynek a sávközépen vett értéke szorozva a sávszélességgel. (Ne felejtsük el a 2-es szorzót, ami a "kétoldalas" spektrumábrázolás következménye!)

Ezek szerint, ha úgy kapjuk meg a ξ jelnek valamely Ω frekvencia b sávszélességnyi környezetébe jutó "átlagteljesítményét", hogy az $s_\xi(\omega)$-nak az Ω helyen felvett értékét szorozzuk b-vel, akkor nyilván az $s_\xi(\omega)$ nem más, mint az egységnyi frekvenciasávba jutó teljesítmény, vagy más néven teljesítménysűrűség. (Valójában a rövid *spektrális sűrűség* elnevezésen kívül használatos a *teljesítménysűrűség spektrum* is.)

A spektrális sűrűség, tehát leírja, hogy a frekvencia függvényében hol és milyen értékű (teljesítményű) összetevői vannak a jelnek, azonban még viszonylag egyszerű és hasznos jelek esetén is gondot okozhat a spektrális sűrűség meghatározása. Például a véletlen fázisú koszinuszjel esetén, azaz:

$$\xi_t = \cos(\Omega t + \varphi),$$

ahol Ω konstans, és φ pedig egyenletes eloszlású valószínűségi változó $[0, 2\pi)$-ben. Ennek a folyamatnak ugyanis véges "teljesítményű" összetevői vannak a $\pm\Omega$ frekvencián, azaz ezeken az értékeken végtelen a spektrális sűrűsége, egyébként pedig 0. Természetesen kiterjeszthetjük a spektrális sűrűség fogalmát az ilyen esetekre is (hasonlóan minden más sűrűség fogalomhoz), az általánosított függvények, nevezetesen a Dirac-függvények bevezetésével. Valójában más utat is választhatunk, analóg módon a valószínűségsűrűség és valószínűség eloszlás függvényekhez.

Definiálhatunk egy spektrális eloszlást az alábbi módon:

$$S_\xi(\omega) - S_\xi(0) := \int_0^\omega s_\xi(u)\,du \tag{1.20}$$

és értelemszerűen $S_\xi(-\infty) = 0$.

Amennyiben a folyamat korreláció-függvénye abszolút integrálható, akkor az előbb definiált spektrális eloszlás és a korreláció-függvénye között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$S_\xi(\omega) - S_\xi(0) = \int_0^\omega \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) e^{-ju\tau} d\tau \right) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) \int_0^\omega e^{-ju\tau} du\, d\tau =$$

$$S_\xi(\omega) - S_\xi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) \left[\frac{e^{-ju\tau}}{-j\tau} \right]_0^\omega d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(\tau) \frac{1 - e^{-j\omega\tau}}{j\tau} d\tau\ . \tag{1.21}$$

Az így definiált spektrális eloszlás tehát egyszerűen leírja a diszkrét frekvenciákon véges komponensekkel rendelkező jelek (ilyenek a periodikus jelek) teljesítményének a frekvencia szerinti eloszlását. A nevezett frekvenciákon az $S_\xi(\omega)$ függvénynek az ugrása megegyezik az adott komponens négyzetes várható értékével.

Sztochasztikus folyamatok spektrális folyamata

A lineáris invariáns transzformációnak a sztochasztikus folyamatokra gyakorolt hatását a spektrális sűrűség segítségével többé-kevésbé jól nyomon tudjuk követni a frekvenciatartományban. Azért fogalmaztunk így, és azért állítjuk, hogy fennmaradhat némi hiányérzetünk, mert a spektrális sűrűség egy négyzetes átlagmennyiség, és annak lineáris transzformáltjából természetesen a transzformált folyamatnak csak ugyanilyen átlagolt jellemzőjére, mint a korreláció-függvény kapunk felvilágosítást az "időtartományban". (Mint jól tudjuk, a korreláció-függvény nem a valódi időben történő jellemzést adja meg, hanem a folyamat bármely két mintája közötti időkülönbség függvényében jellemez.)

Egy érdekes kérdés, hogy praktikusan szükségünk van-e a spektrális sűrűséggel történő leíráson kívül bármi másra, azonban talán még ennél is érdekesebb, hogy tudunk-e a spektrális sűrűségnél bármilyen "részletesebb" jellemzését adni a sztochasztikus folyamatoknak a frekvenciatartományban. Ez utóbbira adunk választ ebben a pontban.

A rövid válasz az, hogy lehet a sztochasztikus folyamatokat a spektrális sűrűségnél részletesebben jellemezni a frekvenciatartományban, de még véletlenül se várjuk azt, hogy miként a determinisztikus jeleket jellemezhetjük, valamiféle olyan Fourier transzformálttal, amiből egy inverz transzformációval visszaállíthatjuk az időfüggvényt.

Ha ilyen vágyunk lenne, akkor annak az ellentmondásain elgondolkozva máris rájöhetünk a tényleges lehetőségekre. Az alapvető ellentmondás az volna, hogy amennyiben a folyamat a valódi időben játszódik, és így valamennyi lehetséges realizációjának mindig csak a múltja ismert, akkor természetesen nem készíthetünk olyan transzformáltat, amiből azután visszafelé transzformálva a teljes időtartományra megkapnánk az eredményt, megismerve így a még be sem következett jövőt is. Milyen leírásra, jellemzőre vágyhatunk egyáltalán?

Kezdjünk úgy közelíteni a válaszhoz, hogy először olyan folyamatokat tekintünk, amelyeknek a realizációi véges időtartamúak és véges sok van belőlük. Ha ezen túl még mindegyik realizációnak meghatározható a Fourier transzformáltja, akkor realizációnként elkészíthetnénk a "folyamat" Fourier transzformáltját; értve ezalatt azt, hogy egy-egy elemi eseményhez hozzátartozna egy-egy időfüggvény, illetve egy-egy spektrum is. Tehát a függvényértékű valószínűségi változókhoz hozzátartoznának a frekvenciatartománybeli megfelelők, és ezeket együttesen nevezhetnénk a sztochasztikus folyamat *spektrális folyamat*ának. Azon túl persze, hogy ezzel nem lép fel az előbb említett "jövőbelátási" gond, hiszen egy-egy sorsolás úgyis megadja a teljes időfüggvényt, jelentősen korlátozná a folyamatoknak a körét, és nem hozná azt a hasznot, amit a spektrális folyamattól elvárnánk.

Mire is vágynánk valójában egy spektrális folyamattal kapcsolatban? Nyilván tudni szeretnénk, hogy mi a létezésének a feltétele, és szeretnénk, ha lehetséges lenne általa a jelnek valamiféle spektrális előállítása, valamint feltétlenül szükséges lenne a lineáris invariáns transzformációjának egyszerű kezelhetősége. Lényegében azt szeretnénk, hogy a spektrális sűrűségnél pontosabb frekvenciatartománybeli leírását kapjuk a sztochasztikus folyamatoknak, és így pontosabb képet kapjunk a lineáris transzformációnak a folyamatokra gyakorolt hatásáról.

A megelőző bekezdés gondolatait ültessük át a gyakorlatba úgy, hogy a ξ folyamatot (azaz annak valamennyi realizációját) szorozzuk meg a $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2d}\right)$ függvénnyel, ami "kiemeli" belőle a (*-d,d*) részt. Tegyük fel, hogy ezek a részek legalább szakaszonként folytonosak, és így minden realizációra értelmezhető az alábbi integrál:

$$\alpha_d(\omega) := \frac{1}{2\pi}\int_{-d}^{d} \xi_t e^{-j\omega t}\,dt\,. \tag{1.22}$$

Amennyiben a ξ-nek a $\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2d}\right)$-vel kiemelt részét $\tilde{\xi}$-al jelöljük, akkor az inverz Fourier transzformáció az alábbi eredményt adja:

$$\tilde{\xi}_t = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_d(\omega) e^{j\omega t}\,d\omega\,. \tag{1.23}$$

Ha ezen az úton, a *d* kiterjesztésével, egy a *d*-től független eredményre jutnánk, akkor a módszer használható lenne. Sajnos könnyű belátni, hogy gyengén stacionárius folyamatok esetén, amint *d* tart ∞ -hez, már az (1.22) integrál sem számítható ki, mert a realizációk az origótól távolodva nem halnak el, ami pedig szükséges a Fourier transzformált létezéséhez.

Mivel nem tudjuk elérni, hogy tetszőleges ω frekvencián egy spektrális leírást kapjunk, kíséreljük meg valamely (ω_1,ω_2) sávban vett integrál meghatározását! (Így a sűrűségi jellemzés helyett valamilyen eloszlás jellegű leírást kaphatunk.)

Persze az (ω_1,ω_2) tartományon vett integrál helyett vizsgálhatjuk a

$$\beta_d(\omega) := \int_0^{\omega} \alpha_d(u)du \tag{1.24}$$

integrált is:

$$\begin{aligned}\beta_d(\omega) &= \int_0^{\omega} \alpha_d(u)du = \int_0^{\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{d} \xi_t e^{-jut} dt du = \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{d}\int_0^{\omega} \xi_t e^{-jut} du dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{d} \xi_t \left[\tfrac{e^{-jut}}{-jt}\right]_0^{\omega} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^{d} \xi_t \frac{1-e^{-j\omega t}}{jt} dt.\end{aligned} \tag{1.25}$$

Másrészt az (1.23)-ból, valamint az (1.24)-ből, amely szerint $\alpha_d(\omega) = d\beta_d(\omega)/d\omega$, kapjuk:

$$\tilde{\xi}_t = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_d(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \frac{d\beta_d(\omega)}{d\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\beta_d(\omega). \tag{1.26}$$

Most már csak az a kérdés, hogy konvergál-e valamihez a $\beta_d(\omega)$ valószínűségi változó, ha d tart ∞ -hez. Bizonyára nem meglepő, hogy a válasz pozitív, tehát nem hiába töltöttük az időnket. Sok esetben létezik a négyzetes közép értelemben vett $\beta_\xi(\omega)$ "határérték", mint valószínűségi változó, eleget téve az alábbi összefüggésnek:

$$\lim \mathbf{M}\left|\tfrac{1}{2\pi}\int_{-d}^{d} \xi_t \frac{1-e^{-j\omega t}}{jt} dt - \beta_\xi(\omega)\right|^2 = 0, \text{ ha } d \to \infty. \tag{1.27}$$

Vagy rövidebben, tetszőleges , gyengén stacionárius és négyzetes középben folytonos ξ folyamat esetén létezik az alábbi *spektrális folyamat*:

$$\beta_\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_t \frac{1-e^{-j\omega t}}{jt} dt, \tag{1.28}$$

és a következő ú.n. spektrális előállítás:

$$\xi_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\beta_\xi(\omega). \tag{1.29}$$

Néhány megjegyzés:

Nagyon fontos arra figyelni, hogy a nevezett határérték négyzetes középben létezik. Tehát nem szabad úgy elképzelni a spektrális előállítást, hogy most realizációnként rekonstruálhatjuk a folyamatot ennek segítségével.

Nem nagyon jelentős, de ügyelni kell arra, hogy a folyamat spektrális előállításánál egy Stieltjes-integrál szerepel, tehát a spektrális folyamat *növekményei* "súlyozzák" az exponenciális komponenseket az integrálban.

Végül, de nem utolsó sorban, rögzítenünk kell $\beta_\xi(\omega)$ értékét valamilyen frekvencián, lévén az egy határozott integrál eredménye, és így egy konstans erejéig meghatározatlan. Az egyik értelmes lehetőség az volna, ha a spektrális eloszláshoz hasonlóan a mínusz végtelen frekvencián felvett értéket rögzítenénk nullára. Általában, és így mi sem ezt tesszük, aminek az lehet egy kézenfekvő magyarázata, hogy $\beta_\xi(\omega)$ komplex mennyiség lévén, a növekedése nem olyan "egyértelmű", mint egy skalár mennyiségé (pl. a spektrális eloszlásé), ezért nem bír szemléletes jelentéssel a "kezdőértékének" a helye. Tehát a szokásnak megfelelően mi is a $\beta_\xi(0)=0$ értéket rögzítjük le.

A spektrális felbontás lineáris invariáns transzformációja

Ezek után nézzük, hogy hogyan jellemezhetjük a lineáris transzformáció hatását a spektrális felbontás felhasználásával.

Mint már az (1.12) kifejezésben megadtuk, a folyamat lineáris invariáns transzformációját a konvolúcióintegrál írja le az időtartományban:

$$\eta_t=\int_{-\infty}^{\infty} h_\vartheta \xi_{t-\vartheta} d\vartheta .$$

Mivel az (1.29) szerint gyengén stacionárius folyamat spektrálisan előállítható, helyettesítsük azt be az előző összefüggésbe:

$$\eta_t=\int_{-\infty}^{\infty} h_\vartheta\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\vartheta)} d\beta_\xi(\omega)\right)d\vartheta .$$

Bebizonyítható, hogy ha ξ gyengén stacionárius és h_ϑ abszolút integrálható, akkor az integrálok sorrendje felcserélhető:

$$\eta_t=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty} h_\vartheta e^{-j\omega\vartheta} d\vartheta\right)d\beta_\xi(\omega) .$$

A zárójelben lévő integrálban a h_ϑ súlyfüggvény Fourier transzformáltjára, azaz H_ω-ra ismerhetünk, és így kapjuk:

$$\eta_t=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} H_\omega d\beta_\xi(\omega) , \qquad (1.30)$$

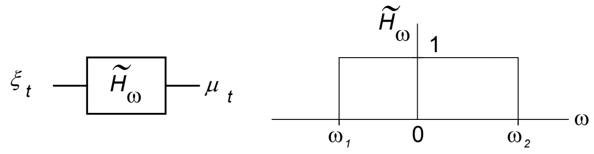
azaz a transzformált folyamat spektrális előállítását úgy kapjuk meg az eredeti folyamat spektrális folyamatából, hogy annak növekményeit szorozzuk a H_ω átviteli függvénnyel.

A sztochasztikus folyamat lineáris invariáns transzformációjának az (1.30)-al történő leírása nyilván több, mint amit a spektrális sűrűséggel az (1.19) összefüggés megad. Itt ugyanis a komplex átviteli függvény közvetlenül hat a spektrális összetevőkre, szemben a spektrális sűrűség esetén, ahol csak az átviteli függvény abszolút értékének négyzete, ami nyilván eltünteti a fáziskarakterisztika hatásait.

A spektrális folyamat meghatározása egy speciális lineáris transzformációval

A spektrális folyamat, illetve a spektrális felbontás előnye vitathatatlan a sztochasztikus folyamatok lineáris transzformációjának vizsgálatakor. Azonban egy nem teljesen elhanyagolható kérdés az, hogy mennyire tudunk fogalmilag közel férközni a spektrális folyamathoz. Meg tudjuk-e adni valamely sztochasztikus folyamat spektrális folyamatát? Az alábbiakban egy érdekes módszert mutatunk be a fenti kérdések megválaszolásához.

Válasszuk az 1.3. ábra szerinti lineáris transzformációt! Vegyük észre, hogy $\omega_1 \neq -\omega_2$ esetén egy valós ξ bemeneti folyamatból egy komplex μ kimeneti folyamat lesz! Abban az esetben, ha ξ gyengén stacionárius és négyzetes középben folytonos, akkor létezik a spektrális előállítása, illetve egyszerűen meghatározható μ spektrális előállítása is:



1.3. ábra Lineáris transzformáció a spektrális folyamat meghatározására

$$\xi_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\beta_\xi(\omega), \text{ illetve } \mu_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \tilde{H}_\omega d\beta_\xi(\omega).$$

Nézzük meg a μ_t transzfomált értékét t = 0-ban a $\tilde{H}_\omega$ paramétereinek a behelyettesítésével:

$$\mu_0 = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\beta_\xi(\omega) = \beta_\xi(\omega_2) - \beta_\xi(\omega_1).$$

Legyen a "szűrő" alsó határfrekvenciája $\omega_1 = 0$! Ekkor $\mu_0 = \beta_\xi(\omega_2) - \beta_\xi(0)$ lesz. Visszaemlékezvén arra, hogy a spektrális folyamat értékét nulla frekvencián nullára rögzítettük, azt kapjuk, hogy:

$$\mu_0 = \beta_\xi(\omega_2).$$

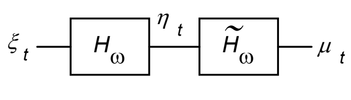
Teljesen hasonlóan, ha $\omega_2 = 0$, akkor $\mu_0 = \beta_\xi(0) - \beta_\xi(\omega_1)$ lesz, és így $\mu_0 = -\beta_\xi(\omega_1)$ -et kapunk a "szűrő" kimenetén a t = 0 pillanatban.

Tehát az a lineáris transzformáció, amely a (0,ω] intervallumban torzítatlanul átengedi az összetevőket és egyébként zár, a bemenetére vezetett ξ folyamatból a $\beta_\xi(\omega)$-t (vagy negatív frekvenciákra a $-\beta_\xi(\omega)$-t) állítja elő a t=0 pillanatban.

A spektrális folyamat lineáris transzformációja

Mivel a spektrális folyamat teljes egészében leírja a sztochasztikus folyamatot, érdekes lehet a lineáris transzformáció hatásának vizsgálatánál az is, hogy mi történik a $\beta_\xi(\omega)$ spektrális folyamattal a H_ω átviteli függvényű lineáris transzformáció hatására.

Az előző pontban követett módszer alkalmazásával viszonylag könnyen eredményre juthatunk. Vizsgáljuk meg a H_ω kimenetén megjelenő η folyamatot az előző pontban bevezetett $\tilde{H}_\omega$-al (1.4. ábra)! Az η folyamat spektrális előállítása a következő:



1.4. ábra A spektrális folyamat lineáris transzformációja

$$\eta_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\beta_\eta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} H_\omega d\beta_\xi(\omega) .$$

Így a μ_t, például pozitív frekvenciákra:

$$\mu_t = \int_0^\omega e^{jut}\, d\beta_\eta(u) = \int_0^\omega e^{jut} H_u\, d\beta_\xi(u).$$

Ha a $t = 0$ időpontot nézzük, akkor:

$$\mu_0 = \int_0^\omega d\beta_\eta(u) = \int_0^\omega H_u\, d\beta_\xi(u).$$

Az első integrál $\beta_\eta(\omega)$-t adja, hiszen $\beta_\eta(0)$=0, és így a keresett összefüggés az alábbi lesz:

$$\beta_\eta(\omega) = \int_0^\omega H_u\, d\beta_\xi(u). \tag{1.31}$$

GAUSSZI MODELLEK

Az üzenetek és a zavarok modellezésére előszeretettel választunk modellként Gauss-folyamatokat. Mi ennek az oka, és mi az alapja? Alapként a központi határeloszlás tételeket említhetjük. Ugyanis amennyiben a véletlen jelenség sok kicsi és azonos "súlyú" összetevő eredményeként jön létre, akkor megalapozott a Gauss-folyamattal történő modellezése. A gausszi modellek választásának az okát pedig abban találhatjuk meg, hogy egyrészt a problémák jelentős részének a megoldásánál lényeges egyszerűsítést jelent, ha Gauss-folyamatot választunk a vizsgálat során (sőt bizonyos esetekben egyébként nem is sikerül megoldásra jutni), másrészt pedig sok hírközlési feladatban az optimális eredményt éppen Gaussz-folyamatok esetén kapjuk.

Először az elektronikus hírközlésben az egyik legáltalánosabban jelentkező zavarra ismertetjük a gaussi modell jellemzőit, majd pedig hasznos üzenetek egyik jellegzetes csoportjáról látjuk be, hogy indokolt a Gauss-folyamattal történő modellezésük.

A termikus zaj

A Híradástechnika című tantárgyban már elég részletesen foglalkoztunk a szabad elektronoknak a "hőmozgásából" származó elektromos jelnek, vagy röviden termikus zajnak a jellemzőivel. Megállapítottuk, hogy a nagyszámú elektron együttes hőmozgása által képviselt áram, illetve például az ellenállás (amelyben az elektronok vannak) sarkain keletkező feszültség egy nulla várható értékű Gauss-folyamattal modellezhető. Az előző pontokban pedig már átismételtük, hogy egy nulla várható értékű Gauss-folyamatot egyértelműen leír a spektrális sűrűségfüggvénye. (Hiszen annak inverz Fourier transzformáltja a korreláció-függvény, ami viszont megadja az együttes eloszlásban szereplő kovariancia mátrix elemeit.)

Ezek szerint a termikus zaj matematikai modelljének kimerítő jellemzéséhez elég megadni a spektrális sűrűséget, amely egy R értékű ellenállás nyitott kapcsain (1.5.a ábra) az alábbi lesz:

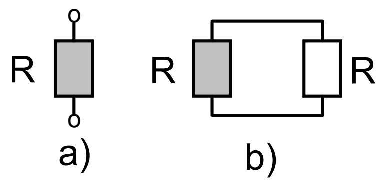
$$s_\xi(\omega) = \frac{|h\omega R|}{2\pi^2 \left(e^{|h\omega/2\pi kT|} - 1\right)}, \tag{1.32}$$

ahol h a Planck-féle állandó, amelynek értéke $6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Ws/Hz, k a Boltzmann állandó, amelynek értékét például $T_0 = 290^\circ$ K esetén szorzatként szokták megadni, és így $kT_0 = 4 \cdot 10^{-21}$ W/Hz.

Könnyű ellenőrizni, hogy az (1.32)-vel adott spektrális sűrűségfüggvény alatti terület véges négyzetes várható értéket eredményez. Ugyanakkor az is észrevehető, hogy ez a sűrűségfüggvény igen nagy frekvenciáig konstans, amennyiben az ellenállás hőmérséklete nem nagyon alacsony. Éppen ezért elterjedten használt az (1.32)-nek az alábbi közelítése:

$$s_\xi(\omega) \cong s_\xi(0) = \frac{2kTR}{2\pi}, \tag{1.33}$$

Ez az úgynevezett Nyquist-formula 10%-nál kisebb hibájú, ha a frekvencia kisebb, mint 30 GHz és a hőmérséklet nagyobb, mint 10° K.



1.5. ábra Zajos ellenállás a) nyitott, b) illesztve lezárt kapcsokkal

Az (1.33)-al adott spektrális sűrűség a T hőmérsékleten lévő R ellenállás nyitott kapcsain lévő feszültség-folyamat spektrális sűrűségét adja meg, azaz a folyamat négyzetes várható értékének 1 ra/s sávba eső értékét határozza meg. Ugyanakkor a zajos ellenállásból illesztett lezárás esetén (1.5.b ábra) a B [Hz] frekvenciasávban kivehető zajteljesítményt az alábbi módon számíthatjuk ki:

$$P_{ill}^{(B_{Hz})} = \left(\frac{\sqrt{2\pi \cdot 2 \cdot s_\xi(0)}}{2} \right)^2 \frac{1}{R} B = kTB,$$

ami természetesen jó összhangban van a Híradástechnika tárgyban már megismert összefüggéssel.

Az 1.5.b ábra egy olyan modellt mutat, amelyben a T hőmérsékletű zajos R ellenállást egy zajmentes R ellenállás zár le illesztetten, és veszi ki belőle a fenti összefüggéssel leírt zajteljesítményt. Nyilván a valósághoz sokkal közelebb áll az a modell, amelyben a lezáró ellenállás is zajos, és így a hőmérsékletének megfelelően hozzájárul ahhoz a zajteljesítményhez, amit az előbb kiszámoltunk. Például megegyező hőmérsékletek esetén a teljesítmény megduplázódik.

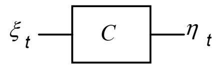
Frekvencia szerint nyalábolt (FDM) jel

Hasznos üzenetek Gauss-folyamattal történő modellezése is lehetséges a távközlés elég jelentős eseteiben. A távközlő (telefon) hálózatok nagytávolságú (városok közötti) összeköttetésein általánosan multiplexelt (nyalábolt) átvitel történik. Ez azt jelenti, hogy egy-egy fizikai hírközlő csatornát nem egy-egy beszélgetés továbbítására használnak, hanem a beszélgetések nagyobb csoportját, akár több száz beszédjelet összenyalábolva együtt továbbítanak egy arra alkalmas csatornán.

A nyalábolás egyik ismert módja a frekvencia szerinti nyalábolás (Frequency Division Multiplexing), amikor például az azonos frekvenciasávú analóg jelekből úgy alkítjuk ki a nyalábolt jelet, hogy az egyes összetevőket frekvenciában át- és egymás mellé helyezzük. Amennyiben az egyes összetevők hasonlóak, nincs közöttük "kirívó", és sokan vesznek részt az összegzésben, akkor az eredő - egy központi határeloszlás tételre hivatkozva - jól modellezhető egy Gauss-folyamattal.

Intermodulació vizsgálata gaussi mérőzajjal

A fenti modell például lehetőséget teremt az FDM jelet továbbító csatornák nemlineáritásának egy nagyon jó mérési módszerére is, amit az alábbiakban röviden ismertetünk. (Ezzel valójában enyhíteni szeretnénk azt a hiányt, ami a nemlinearitások vizsgálatával kapcsolatosan ebben a tárgyban jelentkezik. Sajnos a nemlinearitások kezelésének elég nehéz problémája terjedelmi okokból nem válhat a tárgy részévé.)



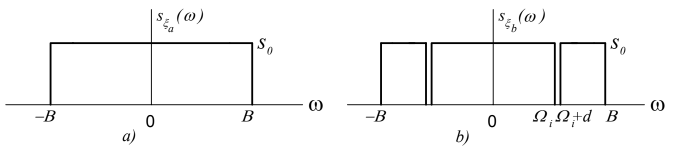
1.6. ábra Nemlineáris csatorna

A vizsgált csatorna legyen "enyhe" nemlinearitású, ekkor a bemenete és a kimenete közötti összefüggést egy polinommal jól lehet modellezni. Sőt az egyszerűség kedvéért legyen a C csatorna (1.6. ábra) hatása az alábbi módon leírható:

$$\eta_t = c_1\xi_t + c_2\xi_t^2, \tag{1.34}$$

azaz a nemlinearitást csak egy másodfokú tag képviselje.

A ξ vizsgálójel legyen stacionárius Gauss-folyamat, és spektrális sűrűsége legyen felváltva



1.7. ábra Vizsgálójelek az intermoduláció mérésére

az 1.7.*a,b* ábrákon adott !

Az intermodulációs zavar alatt azt a jelenséget értjük, amikor egy csatorna nemlinearitása miatt akkor is van kimenőjele a csatornának, ha nem adunk rá bemenőjelet, de a frekvenciában környező jelek a nemlinearitás miatt a vizsgált csatorna sávjába eső termékeket hoznak létre.

Így az 1.7.*a* ábra szerinti spektrális sűrűségű jelet adva a bemenetre, a kívánt (hasznos) jelet valamint a zavaró jelet együtt kapjuk. Amikor viszont a *b* ábra szerinti spektrális sűrűségű jelet adjuk a bemenetre, akkor a kimeneten az $(\Omega_i\ ,\Omega_i+d)$ sávban csak az intermodulációs termékeket kapjuk, hiszen ebben a sávban a bemenőjelnek nincsenek spektrális komponensei. (Ez a sáv képviselje a nyalábolt jelben az *i*-edik összetevőt!)

Az intermodulációs zavart jellemezhetjük egy zaj-jel-viszonnyal, amelynek a számlálójában a *b)* esetben mérhető P_{im} intermodulációs zajteljesítmény van, a nevezőjében pedig az *a)* esetben mérhető $P_{jel}+P_{im}$ jel- és zajteljesítmény összege. Az alábbiakban meghatározzuk, hogy mi az összefüggés a csatorna nemlinearitása és a mérhető intemodulációs zaj-jel-viszony között.

Az (1.34) kifejezéssel adott csatornamodell esetén a $c_1\xi_t$ a hasznos jel a kimeneten, míg a $c_2\xi_t^2$ a zavar. Így kézenfekvő, hogy az intermodulációs zaj kiszámításánál csak ez utóbbival számolunk, és bevezetjük az alábbi változót:

$$\nu_t = g(\xi_t) := c_2\xi_t^2 - c_2\mathbf{M}\xi_0^2,$$

ami nyilván a várható értékétől "megfosztott" zavaró komponens.

A ν folyamatról ki lehet mutatni, hogy gyengén stacionárius, mivel várható értéke azonosan nulla, korreláció-függvényét pedig egy stacionárius Gauss-folyamat eloszlásából a következő módon számíthatjuk:

$$R_\nu(\tau) = \mathbf{M}\nu_\tau \nu_0 = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x) g(\tilde{x}) f_{\xi_\tau,\xi_0}(x,\tilde{x}) dx d\tilde{x} \,. \tag{1.35}$$

A nemlineáris transzformáció bemeneti ξ folyamata egy nulla várható értékű stacionárius Gauss-folyamat, így kétváltozós valószínűségsűrűség-függvénye a következő:

$$f_{\xi_\tau,\xi_0}(x,\tilde{x}) = \frac{1}{2\pi \mathbf{M}\xi_0^2 \sqrt{1-\rho_\tau^2}} e^{-\frac{x^2 - 2x\tilde{x}\rho_\tau + \tilde{x}^2}{2\mathbf{M}\xi_0^2 \left(1-\rho_\tau^2\right)}} \,, \tag{1.36}$$

ahol bevezettük $\rho_\tau := R_\xi(\tau) / \mathbf{M}\,\xi_0^2$ jelölést.

Az (1.35) kifejezéssel adott $R_\nu(\tau)$ értéke az (1.36) behelyettesítésével az alábbi egyszerű alakra hozható:

$$R_\nu(\tau) = 2\, c_2^2\, R_\xi^2(\tau) \,.$$

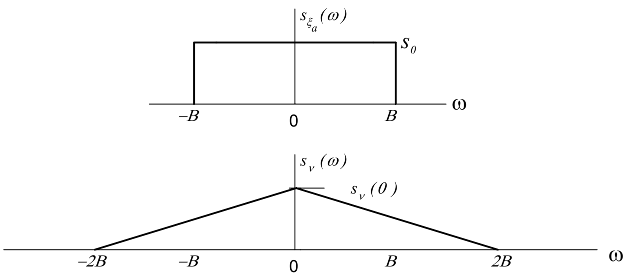
Végül a ν spektrális sűrűségét az $R_\nu(\tau)$ Fourier transzformáltjaként kapjuk:

$$s_\nu(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2c_2^2 R_\xi^2(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2c_2^2 s_\xi(\omega) \otimes s_\xi(\omega) = 2c_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} s_\xi(x) s_\xi(\omega - x) dx.$$

Ez az összefüggés világosan megmutatja, hogy a hatványfüggvénnyel modellezett nemlineáris karakterisztika másodfokú tagja következtében a kimeneten ω frekvenciájú komponensek keletkeznek a bemeneti jel x és ω-x komponenseiből.

Az $s_\xi(\omega)$ és $s_\nu(\omega)$ spektrális sűrűségeket tüntettük fel az 1.8. ábrán. Látható, hogy a ν intermodulációs zavar spektrális sűrűsége kétszer akkora sávot foglal el, mint a ξ hasznos jelé, és a nulla frekvencián lévő $s_\nu(0) = 4c_2^2 B s_0^2$ értékéről lineárisan csökken $2B$-ig. Természetesen a zavaró hatás a *(0,B)* sávban lévő nyalábolt csatornákban érvényesül. Az i-edik csatorna $(\Omega_i, \Omega_i + d)$ sávjába eső intermodulációs zajteljesítmény pedig a következő:

$$\mathbf{M}\nu_0^2 = 2 \int_{\Omega_i}^{\Omega_i + d} s_\nu(\omega) d\omega \cong 2 s_\nu(\Omega_i) d.$$



1.8. ábra A bemeneti mérőzaj és az intermodulációs zaj spektrális sűrűsége