

## MINTAVÉTELEZÉS és KERÉKÍTÉS

### B) Forráskódolás előírt hűségkritériummal

Analóg források jelének digitális csatornán történő továbbítása első lépéseként megismertük a mintavételt, amely sávhatárolt, gyengén stacionárius folyamatok esetén az eredeti jel elvileg hibátlan rekonstrukcióját garantálja. Jelenleg az A/D átalakítónak a mintavételt követő feladataival foglalkozunk. Első lépésként az analóg minták digitálissá történő átalakításával.

#### KERÉKÍTÉS (KVANTÁLÁS)

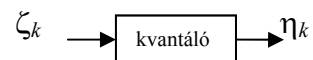
A folytonos értékészletű minták értékeinek számjegyekkel történő pontos leírását, azaz digitalizálását csak végtelen sok számjegyből álló számokkal lehetne megoldani. Ez gyakorlatilag nyilván nem járható út, tehát meg kell oldani ezeknek a számjegyeknek a "csonkítását". Ezt a csonkítást nevezzük kerekítésnek, vagy idegen szóval kvantálásnak.

Fontos észrevenni, hogy amíg a mintavétellel elvileg nem okozunk semmilyen veszteséget az eredeti jelben, addig a kerekítéssel elveszítjük a jelnek a kerekítési határ alatti finom változásait. Ezzel a módszerrel tehát meghamisítjuk a jelet, de tudomásul kell venni, hogy nincs más lehetőségünk a mintáknak véges sok számjeggyel történő ábrázolására.

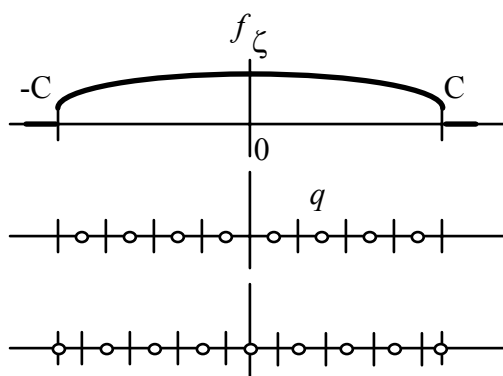
Érdeemes persze elgondolkozni azon, hogy a jellegzetes híradástechnikai feladatokban szükség volna-e végtelen pontos ábrázolásra. Erre a kérdésre a nemleges választ a következő gondolatmenettel adhatjuk meg. Az analóg jelfeldolgozás során a mindig jelenlévő additív termikus zaj miatt a "legapróbb" jelváltozások valójában nem a hasznos jel, hanem a zaj változásai. Így a túlzottan részletes ábrázolás nem a jelet pontosítja, hanem - jelentős költség árán - az additív zaj leírását finomítja.

Vizsgálatunk megkezdéséhez szögezzünk le egy kerekítési szabályt, és határozzuk meg a kerekítési hibát!

Az A/D átalakítóban lévő kvantáló jellemzésére használjuk a következő ábra jelöléseit! A bemeneten a  $\tau_0$  időközönként vett minták vannak, a kimeneten pedig azok kerekített értékei.



Használjunk egyenlőközű kerekítést, a "legközelebbi társ" módszerével, mint kerekítési szabállyal! Legyen a kerekítendő jel erősen stacionárius és értékészlete legyen  $\pm C$  között! Ennek illusztrálására álljon itt az alábbi ábra! Az ábra első sorában egy lehetséges



valószínűsűrűség függvényt tüntettünk fel, míg a második és a harmadik sor azt szemlélteti, hogy miként helyezkedhetnek el a  $q$  értékű kerekítési lépcsők és a karikával jelölt kerekítési szintek. A kettő között az a különbség, hogy a második sorban nincs nulla értékű kerekítési szint, míg a harmadik sorban van.

Definiáljuk a kerekítési hibát az alábbi módon:

$$v_k := \eta_k - \zeta_k$$

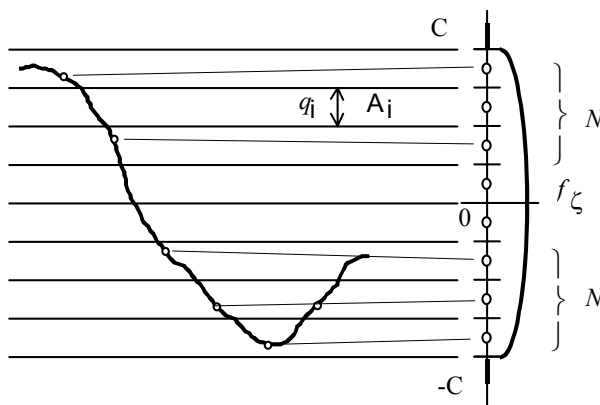
Mivel a "legközelebbi társ" módszerrel történő kerekítés azt jelenti, hogy valamelyik kerekítési lépcsőbe, vagy sávba eső mintát a sávon belüli szintre kerekítünk, ezért a  $q$  szélességű sáv közepére helyezett kerekítési szint esetén a kerekítési hiba csúcserőssége  $q/2$  abszolút értékű

lesz. Ugyanakkor azt is láthatjuk, hogy a kis értékű, a nullához közeli minták nagyon pontatlanná válnak a kerekítés hatására, míg a nagy értékű minták egyre pontosabbak lesznek.

Éppen ezért más kerekítési szabályokat is kidolgoztak, amelyek közül kiemeljük a digitális telefóniában használt eljárást. Itt azt a célt tűzték ki, hogy a kerekített értékek relatív pontossága legyen konstans, tehát a kis értékű mintákat kisebb hibával, a nagy értékűeket pedig nagyobb hibával kerekítik.

A kerekítési hiba, vagy más néven kvantálási zaj jellemzésére nem elegendő annak csúcsertékét meghatározni. Sokkal érdekesebb jellemző a négyzetes várható érték, mert annak révén a zavaró hatást sokkal jobban kifejező jel/zaj adható meg.

A következőkben meghatározzuk az előbb definiált kvantálási hiba négyzetes várható értékét. Az alkalmazott jelöléseket a következő ábra szemlélteti. Az ábra baloldalán a jelnek egy realizációját és az abból vett mintákat tüntettük fel a kvantálási lépcsőkkel együtt. Az ábra jobboldalán, összekapcsolva a baloldali résszel, a jelnek egy lehetséges valószínűségi sűrűség függvénye szerepel, amelybe bejelöltük a kvantálási lépcsőket és szinteket.



A kvantálási hiba négyzetes várható értéke a következő módon számítható:

$$\mathbf{M}v_0^2 = \mathbf{M}(\eta_0 - \zeta_0)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot f_v(u) du.$$

Sajnos a fenti kifejezésben a  $v$  valószínűségi sűrűsége nem ismert. Legkönnyebben feltételes sűrűségfüggvényeket határozhatunk meg, azzal a feltétellel, hogy a minta az  $i$ -edik lépcsőben van. Ezeket úgy nyerhetjük, hogy a  $\zeta$  sűrűségfüggvényéből kivágjuk az  $i$ -edik lépcsőbe eső szeletet, és természetesen normáljuk az ebbe a lépcsőbe esés valószínűségével. A  $v$  valószínűségi sűrűsége pedig ezeknek a feltételes sűrűségfüggvényeknek a súlyozott összege lesz:

$$f_v(u) = \sum_{i=-N}^N f_{v|A_i}(u) \cdot P(\zeta \in A_i)$$

Behelyettesítve az előző kifejezésbe, majd felcserélve az összegzést és az integrálást, kapjuk:

$$\mathbf{M}v_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot f_v(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot \left( \sum_{i=-N}^N f_{v|A_i}(u) \cdot P(\zeta \in A_i) \right) du = \sum_{i=-N}^N \int_{-q_i/2}^{q_i/2} u^2 \cdot f_{v|A_i}(u) du \cdot P(\zeta \in A_i)$$

A jobbszáron álló kifejezést úgy is interpretálhatjuk, mint a feltételes várhatóértékek súlyozott összegét, ahol tehát a feltételes várhatóérték a következő:

$$\mathbf{M}(v_0^2 | \zeta \in A_i) = \int_{-q_i/2}^{q_i/2} u^2 \cdot f_{v|A_i}(u) du$$

Legyen kicsi a kvantálási lépcső  $C$ -hez képest, azaz csináljunk elég finom beosztásrendszert, akkor a feltételes sűrűségfüggvények igen hasonlóak lesznek, és közel állandó értékűek a  $(-q_i/2, q_i/2)$  intervallumokban. Így élhetünk az alábbi közelítéssel:

$$\mathbf{M}(v_0^2 | \zeta \in A_i) = \int_{-q_i/2}^{q_i/2} u^2 \cdot f_{v|A_i}(u) du \stackrel{f_{v|A_i} \cong \mathcal{U}_{q_i}}{\cong} \frac{1}{q_i} \left[ \frac{u^3}{3} \right]_{-q_i/2}^{q_i/2} = \frac{q_i^2}{12}$$

Ha egyenlőközű kerekítést alkalmazunk, akkor valamennyi lépcső  $q$  értékű lesz, tehát a kvantálási zaj négyzetes várhatóértékére az alábbi kapjuk:

$$\mathbf{M}v_0^2 = \sum_{i=-N}^N \mathbf{M}(v_0^2 | \zeta \in A_i) \cdot P(\zeta \in A_i) \stackrel{q_i=q}{\cong} \sum_{i=-N}^N \frac{q^2}{12} \cdot P(\zeta \in A_i) = \frac{q^2}{12}$$

Vegyük figyelembe, hogy a jel  $2C$  nagyságú értékkészletét  $2N$  kerekítési lépcsőre osztottuk, továbbá írjuk le a  $2N$  darab szimbólum bármelyikét  $n$  számjegyből álló bináris számmal, akkor a fenti kifejezésnek az alábbi alakjai is használhatók:

$$\mathbf{M}v_0^2 = \frac{q^2}{12} = \frac{C^2}{12N^2} = \frac{C^2}{3 \cdot 2^{2n}}$$

Ha az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a jel egyenletes eloszlású  $(-C, C)$ -ben, akkor a négyzetes várható értéke könnyen ellenőrizhetően  $C^2/3$  lesz.

Legyen a hűségkritérium a jel-zaj viszony! Jelölje  $\rho$  a jel-zaj viszonyt, így:

$$\rho := \frac{\mathbf{M}\xi_0^2}{\mathbf{M}v_0^2} = \frac{\frac{C^2/3}{C^2}}{\frac{C^2/3}{3 \cdot 2^{2n}}} = \frac{C^2/3}{C^2} = \frac{C^2/3}{3 \cdot 2^{2n}} = (2N)^2 = 2^{2n},$$

amiből előírt jel-zaj viszonyhoz a szükséges kvantálási lépcsők száma, vagy a kvantálási értékeket leíró bináris számjegyek hossza kiszámítható:

$$n = \frac{1}{2} \text{ld}(\rho).$$

Sőt még egy lépéssel tovább is mehetünk, mert egy  $B$ -re korlátozott sáv szélességű jel adott jel-zaj viszonyú továbbításához szükséges csatorna átviteli sebességét is könnyen meghatározhatjuk, ha tekintetbe vesszük a jel egyértelmű leírásához szükséges minták időegységenkénti számát:

$$v = \frac{\omega_0}{2\pi} n = \frac{B}{\pi} n = \frac{B}{2\pi} \text{ld}(\rho) \quad [\text{bináris szimbólum/sec}].$$

Ugyanakkor fontos észrevenni, hogy a jel négyzetes várható-értékének csökkenésével, azaz a maximálisan feldolgozható jel-szintnél kisebb értéknél a jel-zaj viszony romlik, mert  $\rho$  számlálója csökken, de nevezője változatlan marad:

$$\rho := \frac{\mathbf{M}\xi_0^2}{\mathbf{M}v_0^2} = \frac{\frac{A^2/3}{C^2}}{\frac{A^2/3}{3 \cdot 2^{2n}}} = \left( \frac{A}{C} \right)^2 \cdot 2^{2n}.$$

## A JEL-SEBESSÉG CSÖKKENTÉSE

A kielégítő gyakorisággal vett analóg minták véges hosszúságú számjegyekkel történő leírásához megismertük a kerekítést (kvantálást), amely a jel kézbentartható meghamisítását eredményezi.

A kvantálást tekinthetjük egy forrás-kódolási (tömörítő) módszernek, amelynél előírt hűségkritérium mellett véges sok szimbólummal reprezentáljuk a kvantálás előtt folytonos értékkészletű, tehát csak végtelen sok szimbólummal leírható mintákat.

Jelenleg azt a kérdést igyekszünk megválaszolni, hogy a kvantálás környékén lehetne-e olyan módszereket találni, amelyek a jel tulajdonságait tekintetbe véve tömörebb leírás

mellet is azonos meghamisítást eredményeznének. A válasz erre a kérdésre pozitív, és lényegében az a kérdés, hogy a jel mely jellemzői és miként befolyásolják az elérhető eredményeket, valamint természetesen az is nagyon izgalmas, hogy milyen módszereket használhatunk.

### A nemlineáris kvantálás

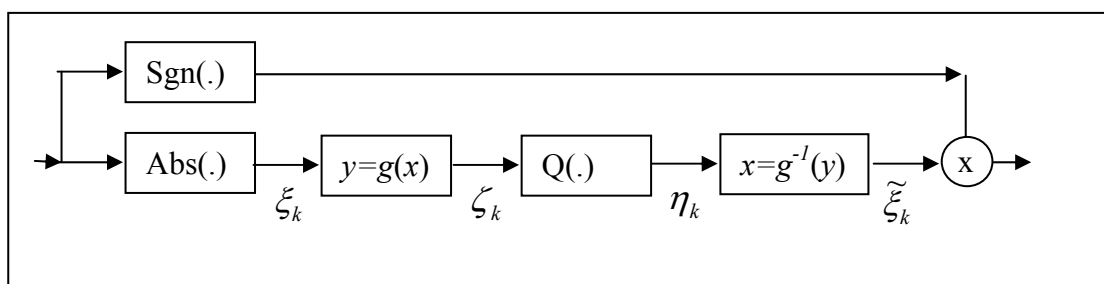
Az eddigiekben megvizsgált lineáris, egyenlőközü, vagy egyenletes kvantálás esetén a kerekítési sávok mindegyike azonos nagyságú volt, függetlenül attól, hogy a kerekítendő minta értéke kicsi vagy nagy. Ezáltal ugyanakkora hiba (a lépcső nagyságának a fele) keletkezhetett igen kis minták, valamint nagyon nagy minták esetén is. Tehát míg a kis értékű mintákat relatíve pontatlanul írtuk le, addig a nagy értékű minták sokkal pontosabban kerültek meghatározásra. Nyilván egy jó gondolat lehet a kerekítés abszolút pontosságának állandó értéken tartása helyett a relatív pontosságot tartani konstansnak. Persze a módszerek összehasonlításához valamilyen módon jellemezni kell az elérhető eredményeket.

Először vizsgáljuk meg, hogy egy rögzített kerekítési szabály esetén hogyan változik a kerekített minták jel-zaj viszonya a kerekítendő jel négyzetes várható-értékének függvényében. Tehát készítünk egy kvantálót, amely a  $\pm C$  értéktartományon belüli mintákat képes kerekíteni, de csak ennél kisebb szintű jelet vezetünk rá. (Például a távbeszélő hálózatban felkészülnek valamilyen maximális hangosságú beszédre, de a partnereknek éppen suttozni van kedvük.)

### Logaritmikus kvantálás, a kompanderes kvantáló

A megvalósítás szempontjából rendkívül előnyös az egyenlőközü kvantáló, ezért a nemlineáris, azaz egyenlőtlen-közü kvantálást a kvantálandó minták nemlineáris transzformációja révén célszerű megvalósítani. A jel rekonstrukciójánál természetesen a nemlineáris transzformáció inverzét kell végrehajtani, és így torzítatlan lesz az átvitel.

A jellemzők vizsgálatát az alábbi ábrán látható modell alapján végezzük. Itt a bemenetre érkező analóg minták előjelének meghatározása mellett képezzük azok abszolútértékét, majd egy logaritmikus transzformáció után következik az egyenlőközü kerekítés. A rekonstrukció a kerekített mintákból történik, ahol az előbbi nemlineáris torzítás (kompresszállás) is megszüntetésre kerül egy inverz karakterisztika által, amit expandálásnak neveznek. Végül a minták előjelét is helyreállítjuk. (Ezzel az előjeles “trükkkel” elkerülhetjük a nullára szimmetrikus jel nehezkesebb kezelését.)



A modellt egy kicsit tovább részletezve, a  $Q(\cdot)$  kvantálót egy additív zajforrásnak tekintjük, ahol a korábban bevezetett kvantálási hibát “adjuk hozzá” a jelhez:

$$v_k := \eta_k - \zeta_k$$

Az egyszerűség kedvéért legyen a kompresszor karakterisztikája az alábbi:

$$y = \ln\left(\frac{x}{a} + 1\right),$$

és így a torzítatlan átvitelhez az expander karakterisztikája a következő lesz:

$$x = a \cdot (e^y - 1).$$

Itt az  $a$  bevezetésével részben elérjük azt, hogy a jel-feszültségből számokat kapunk, részben pedig egy normalizálást hajtunk végre. A kvantáló már dimenziótlan mennyiségeken dolgozik, és majd az expander képez ismét feszültséget a kerekített mintákból.

Jelölje  $\xi_k$  a kompresszor bemenő mintáit,  $\eta_k = \ln\left(\frac{\xi_k}{a} + 1\right) + \nu_k$ , a kerekített mintákat, és  $\tilde{\xi}_k$

az expandált kerekített mintákat! Ekkor a kimeneten jelentkező hiba az alábbi módon fejezhető ki:

$$\tilde{\nu}_k = \xi_k - \tilde{\xi}_k = \xi_k - a(e^{\eta_k} - 1) = \xi_k - a(e^{\ln(\frac{\xi_k}{a} + 1) + \nu_k} - 1) = \xi_k - a \cdot \left[\left(\frac{\xi_k}{a} + 1\right) \cdot e^{\nu_k} - 1\right],$$

amit rendezve, a következőt kapjuk:

$$\tilde{\nu}_k = \xi_k - \left[\left(\frac{\xi_k}{a} + 1\right) \cdot a \cdot e^{\nu_k} - a\right] = \xi_k - \xi_k \cdot e^{\nu_k} - a \cdot e^{\nu_k} + a = (\xi_k + a)(1 - e^{\nu_k}).$$

A kapott összefüggés érdekessége, hogy az egyenlőközű kvantálás  $\nu_k$  zaja egy nemlineáris transzformációt szenved az expandálás következtében, valamint szorzótényezőként megjelennek benne a jel-minták is. A kimeneti jel-zaj viszony meghatározásához ki kell számítani  $\tilde{\nu}_k$  négyzetes várhatóértékét:

$$\mathbf{M}\tilde{\nu}_k^2 = \mathbf{M}\left[(\xi_k + a)(1 - e^{\nu_k})\right]^2 \cong \mathbf{M}(\xi_k + a)^2 \cdot \mathbf{M}(1 - e^{\nu_k})^2,$$

ha figyelman kívül hagyjuk  $\nu_k$ -nak  $\xi_k$ -től való függését.

Az első tényező kiszámítása nem okoz gondot, a második tényező kiszámításának módja is ismert, hiszen az ismert eloszlású  $\nu_k$  valószínűségi változó viszonylag egyszerű transzformációjáról van szó:

$$\mathbf{M}(1 - e^{\nu_k})^2 = \mathbf{M}(h(\nu_k))^2 = \int_{1-e^{-q/2}}^{1-e^{q/2}} y^2 f_\nu(h^{-1}(y)) \frac{dh^{-1}(y)}{dy} dy,$$

ahol tehát  $y = h(x) = 1 - e^x$  és  $x = h^{-1}(y) = \ln(1 - y)$ .

Ugyanakkor könnyen rájöhethünk, hogy nem feltétlenül érdemes a számítást ezzel a „pontoskodással” elvégezni, hiszen már a függetlenség feltételezésével is közelítettünk, és most is lehetőség van egy igen jó és lényegesen egyszerűsítő közelítésre:

$$\mathbf{M}(1 - e^{\nu_k})^2 \cong \mathbf{M}(1 - 1 - \nu_k)^2 = \mathbf{M}(\nu_k)^2 = \frac{q^2}{12}.$$

Élve ezzel a közelítéssel és  $\pm C$ -ben egyenletes eloszlású jelet feltételezve, a jel-zaj viszonyra az alábbi eredményt kapjuk:

$$\rho_{\log} := \frac{\mathbf{M}\xi_0^2}{\mathbf{M}\tilde{\nu}_0^2} = \frac{\mathbf{M}\xi_0^2}{\mathbf{M}\nu_0^2 \cdot \mathbf{M}(\xi_0 + a)^2} = \frac{\mathbf{M}\xi_0^2}{\frac{q^2}{12} \cdot [a^2 + 2a\mathbf{M}(\xi_0) + \mathbf{M}(\xi_0)^2]}.$$

A  $q$  kvantálási lépcső nagysága viszont a kompresszált jel csúcserkének  $N$ -ed része:

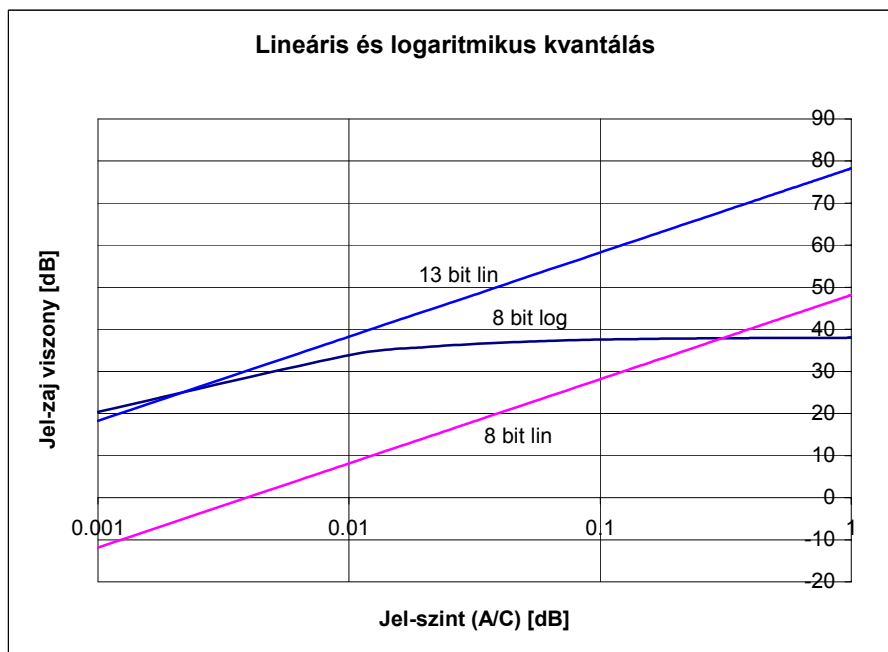
$$q = \frac{1}{N} \cdot \ln\left(\frac{C}{a} + 1\right) = \ln\left(\frac{C}{a} + 1\right) \cdot 2^{-n+1}$$

Ezt felhasználva már csak arra kell ügyelni, hogy az előjelnek a modell szerinti kezelése miatt a kerekítendő jel várható-értéke nem nulla, hanem  $A/2$ , és így:

$$\rho_{\log} = \frac{A^2}{\ln^2\left(\frac{C}{a} + 1\right) \cdot \left(a^2 + a \cdot A + \frac{A^2}{3}\right)} \cdot 2^{2n},$$

ahol mindjárt a változó csúcsertékű ( $A$ ) jelet vettük tekintetbe. Természetesen  $A$  értéke nulla és  $C$  között változhat, ha el akarjuk kerülni a túlvezérlést. Az alábbi ábra mutatja  $\rho_{\log}$  értékét  $A/C$  függvényében,  $n = 8$  bit esetén, ha  $C/a$  értékeként 255-öt választunk, ami a telefóniában használt szabványos érték. Az ábrán összehasonlításként feltüntettük a 8 bites lineáris kvantáló jel-zaj viszonyát, és a 13 bites lineáris kvantálóét is.

Az eredmények szinte önmagukért beszélnek. A lineáris kvantálóknak a jel-szinttel lineárisan változó jel-zaj viszonyához képest a logaritmikus kvantáló egy viszonylag széles lapos "tetőt" mutat. Ebben az esetben a jel-szintnek a vonatkozó sávba eső változásai gyakorlatilag nem változtatják meg a kvantált értékek jel-zaj viszonyát. Ugyanakkor azt is kiolvashatjuk az ábrából, hogy a logaritmikus kvantáló előbb említett kedvező tulajdonságának ára van, mégpedig az, hogy azonos számú bináris szimbólum esetén a nagy jel-szinteknél a jel-zaj viszony a lineáris kvantáló jel-zaj viszonya alatt



marad. Ennek fejében viszont kis jel-szinteknél a logaritmikus kvantáló jel-zaj viszonya egy sokkal több-bites lineáris kvantálóéval vetekszik.

### A Lloyd-Max kvantáló

A nem-egyenlőközű kvantálás ötlete akkor is felmerülhet, ha a kvantálandó jel valószínűség-sűrűségfüggvénye nem egyenletes, hanem jelentős ingadozást mutat. Ekkor ugyanis a kvantálási hiba négyzetes várható-értékét úgy is csökkenthetjük, ha a kisebb valószínűségű jel-összetevőket nagyobb hibával kerekítjük, mint a gyakrabban előforduló értékeket.

Sőt még a kvantálási lépcsőn belül is "ügyeskedhetünk", mert a kerekítési értéket ott sem a kerekítési intervallum közepére célszerű választani, hanem valamilyen "súlypontba", hiszen a nagyobb valószínűségű hibák értékének a csökkentésével csökkenthetjük a négyzetes középhibát.

Legyen  $\xi$  erősen stacionárius folyamat, adott  $f_\xi(x)$  valószínűség-sűrűségfüggvénnyel. Határozzuk meg a legkisebb négyzetes középhibát adó, ú.n. optimális kvantálót előírt kvantálási jel-zaj viszonyra!

Bizonyítható, hogy az optimális kvantáló kielégíti a két ú.n. Lloyd-Max-feltételt:

1. legközelebbi szomszéd feltétel: a kvantálási közök (lépcsők) határát ( $y_i$ ) a szomszédos kvantálási szintek ( $x_i, x_{i+1}$ ) számtani közepére kell választani,

$$y_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

2. súlypont feltétel: a kvantálási szintek legyenek a saját kvantálási intervallumaik súlypontja

$$x_i = \frac{\int_{y_{i-1}}^{y_i} x \cdot f(x) dx}{\int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x) dx}$$

Ezzel a Lloyd-Max algoritmus a következő:

- a) vegyünk fel a kvantálási szintekre egy közelítő elrendezést,
- b) határozzuk meg a kerekítési intervallumokat a szomszéd-feltétel szerint,
- c) számítsuk ki a négyzetes középhibát! Ha elértük a kívánt értéket, vagy a hiba csökkenése egy megadott küszöb alá jutott, akkor készen vagyunk, ellenkező esetben pedig
- d) optimalizáljuk a kvantálót a fenti intervallumokhoz, azaz alkalmazzuk a súlypont-feltételt, majd folytassuk a b) ponttól!

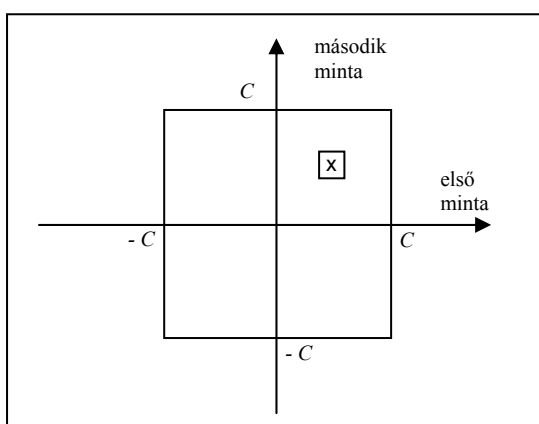
Végül megjegyezzük, hogy a Lloyd – Max kvantáló memóriátlan forrás esetén ad optimális megoldást, hiszen az egymást követő kerekítendő minták esetleges belső kapcsolataira nincs tekintettel.

## A vektor-kvantálás

Eddigi erőfeszítéseink a jel-sebesség csökkentésére a stacionárius folyamattal modellezett jel valamely jellemzőjét (korreláció-függvény, spektrális sűrűség, valószínűség eloszlás) vették tekintetbe, és kerestek valamilyen módszert a folyamat mintáról-mintára történő lehető tömör jellemzésére.

Amennyiben szigorúan csak a kvantálásra gondolunk, akkor alapvetően a jel valószínűség-sűrűség függvényét kiaknázva találta meg a Lloyd Max kvantáló a legjobb megoldást. Másrészt pedig a jel dinamikájához legjobban illeszkedő nemlineáris kvantálás a logaritmikusság volt, amelynek megvizsgáltuk az ú.n. kompanderes megvalósítását. Ugyanakkor felmerülhet az a gondolat is, hogy érdemes lenne megvizsgálni a folyamat egymást követő mintáinak a blokkjait is, és már magát a kvantálást nem a skalár mintákon, hanem a vektorként kezelhető blokkokon elvégezni.

A kiaknázható tulajdonságok egyszerű áttekintéséhez nézzünk egy olyan példát, ahol a blokk (vektor) a forrás üzenetének két egymást követő mintája! Ekkor a vektorértékű minta a síkon ábrázolható, például derékszögű koordinárendszerben. Legyenek a



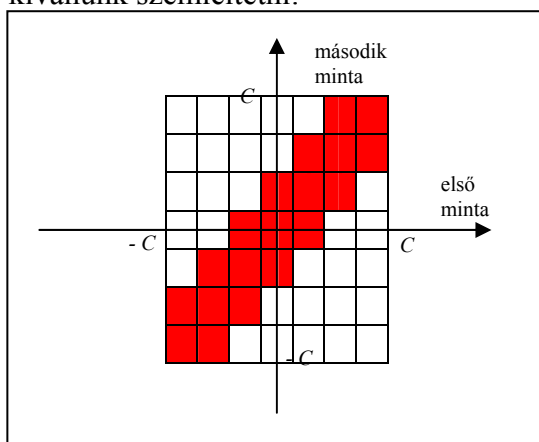
feldolgozható minták  $\pm C$ -re korlátozva, akkor a kvantálandó minták értékészletét az alábbi ábrán szemléltethetjük:

Első lépésként vizsgáljuk az egyenlőközű kerekítést! Ha a skalár kvantálásból következően ezt úgy akarjuk megvalósítani, hogy mindkét tengely mentén egyenlőközű

és azonos beosztást készítünk, akkor a vektor-minták kerekítési “közei” négyzetek lesznek, és kiindulásként a négyzet közepét választhatjuk kerekítési értéknek. Ekkor azonban rögtön feltűnik, hogy a keletkező kvantálási hiba maximális értéke függeni fog a mintapártól. (A “négyzetke” csúcsaiba eső minták kedvezőtlenebb elbírálást kapnak.) Nyilván legjobb lenne a kerekítési érték körül kör alakú kerekítési “közöket” használni. Ezek viszont nem képesek úgy lefedni az egész területet, hogy ne keletkezzenek hézagok, vagy átfedések. Nem sikerült jobb megoldást találni, mint a “méhsejt”, azaz illeszkedő szabályos hatszögek alkalmazását.

Természetesen a probléma csak fokozódik, ha nemlineáris kvantálást akarunk alkalmazni, azaz például a kvantálandó jel valószínűség-eloszlását kiaknázó (Lloyd-Max) kvantálót, vagy a jel négyzetes várható-értékének változásakor lehetőleg változatlan jel-zaj viszonyt eredményező kvantálót akarunk készíteni.

Ugyanakkor nagyon csábító az a lehetőség is, hogy az egymást követő minták közötti kapcsolatokat közvetlenül a kvantálásnál is kiaknázhatjuk, amit a következő vázlaton kívánunk szemléltetni:



A rajzolás egyszerűsége kedvéért a kvantálandó területet négyzetekre osztottuk, és megjelöltük azokat a mintákat, amelyek gyakrabban fordulnak elő, ha a jel egymást követő két mintája között elég szoros kapcsolat van. A jelölést annak alapján végeztük, hogy feltételezhetően az egymást követő minták szoros kapcsolata esetén kicsi a változás, így az ábrában a vektor két elemének azonos értékén kívül a  $\pm 1$  lépcsőnyi változásokat tarthatjuk a legvalószínűbbnek.

Akár azt is mondhatjuk, hogy a két egymást

követő minta változásában megadott lépcsőszámnál nagyobb változásokat nem veszünk figyelembe. Ezáltal jelentős megtakarítást érhetünk el a vektorok leírásához használandó bináris szimbólumok számában.

Persze mindezeket a lehetőségeket kihasználja a vektor-kvantálásra általánosított Lloyd – Max kvantáló, mert a többdimenziós együttes valószínűség-sűrűség leírja a komponensek közötti belső kapcsolatokat is. Ugyanakkor azt is észrevehetjük, hogy a Lloyd – Max vektor-kvantáló megvalósítása nem tűnik egyszerű feladatnak. Azt is szokták mondani, hogy strukturálatlan – bár optimális – megoldását jelenti a feladatnak. Ezért szuboptimális, de strukturált megoldásokat kerestek.

Ezeket a szuboptimális, de strukturált módszereket leggyakrabban transzformációs kódolásnak nevezik.

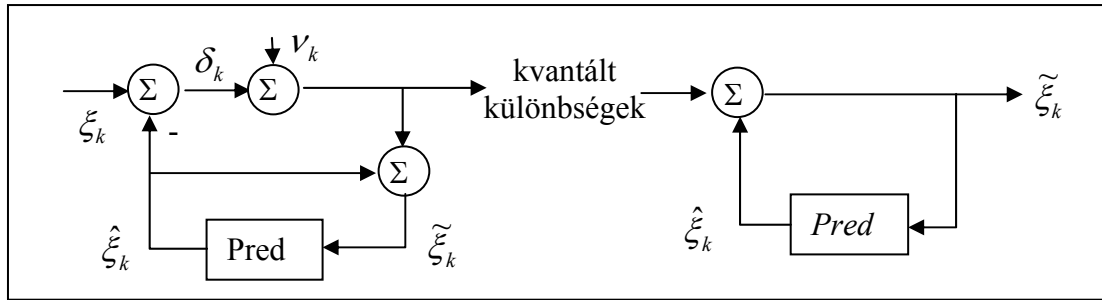
## A prediktív (rekurzív) kódolás

A következőkben az egyik leghatékonyabb és legszélesebb körben használt jel-sebesség csökkentési módszer alapjait tekintjük át.

Az adó és a vevő egyaránt predikálja a jel múltjából a várható jövőt. Az adó megvárja, míg a jövő bekövetkezik, és összehasonlítja azt a jóslattal. Ezután a különbséget továbbítja a vevőhöz, aki elvégzi a szükséges korrekciót. Ha a vevőhöz a különbségi információt egy digitális csatornán juttatjuk el, akkor nyilván a különbséget először kerekíteni kell. Ebben az esetben viszont célszerű az adóban is a kerekített értékeket használni a jósláshoz, ellenkező esetben a kimeneti jel-zaj viszony lecsökken.



Legyen  $\delta_k := \xi_k - \hat{\xi}_k$  a tényleges és a predikált értékek különbsége, amelynek négyzetes várható-értéke a lineáris előrejelzésnél bevezetett  $\varepsilon = \mathbf{M}\delta^2$ .



A kvantált különbségekkel korrigált előrejelzést jelölje  $\tilde{\xi}_k$  amelyre igaz az alábbi összefüggés:

$$\tilde{\xi}_k = \hat{\xi}_k + \delta_k + v_k, \text{ de } \delta_k = \xi_k - \hat{\xi}_k,$$

így

$$\tilde{\xi}_k = \xi_k + v_k$$

Így a kimeneti jel-zaj viszony a következő lesz:

$$\rho = \frac{\mathbf{M}\xi^2}{\mathbf{M}v^2} = \frac{\mathbf{M}\xi^2}{\mathbf{M}\delta^2} \cdot \frac{\mathbf{M}\delta^2}{\mathbf{M}v^2},$$

ahol bővítettünk a kvantálásra kerülő előrejelzési hibajel négyzetes várható-értékével. A két tényező közül a második a kvantálási jel-zaj viszony, ami finom, egyenlőközű beosztásrendszer esetén a jól ismert módon számítható, míg az elsőt predikációs nyereségnek nevezik:

$$G_p = \frac{\mathbf{M}\xi^2}{\mathbf{M}\delta^2}$$

A kimeneti jel-zaj viszonyt tehát az alábbi alakban írhatjuk:

$$\rho = G_p \cdot \frac{\mathbf{M}\delta^2}{\mathbf{M}v^2} = G_p \cdot 2^{2n},$$

amiből a megkívánt jel-zaj viszony eléréséhez a digitális csatornán mintánként továbbítandó bináris szimbólumok száma a következő lesz:

$$n = \frac{1}{2} \cdot \text{ld}(\rho) - \frac{1}{2} \cdot \text{ld}(G_p).$$

Most már csak az a kérdés, hogy mekkora predikációs nyereség érhető el, tehát mennyivel csökkenthető a forrás leírásához szükséges információ mennyisége. Felhasználva a lineáris előrejelzésnél kapott eredményünket, a következő kifejezést találjuk:

$$G_p = \frac{\mathbf{M}\xi^2}{\mathbf{M}\delta^2} = \frac{\mathbf{M}\xi^2}{\varepsilon(\tilde{\mathbf{c}})} = \frac{\mathbf{M}\xi^2}{\mathbf{M}\xi^2 - \mathbf{M}\xi\hat{\xi}}.$$

Ha példaként kiértékeljük az eredményünket egy olyan jelre, amelynek korrelációfüggvénye  $\tau=0$ -ról lineárisan csökken a mintavételi időköz duplájáig és innen nulla, akkor a legjobb lineáris előrejelzésre az alábbiakat kapjuk:

$$G_p = \frac{4}{3}.$$

Nyilván érdekes kérdés, hogy bármilyen korrelációfüggvény esetén mekkora predikációs nyereség érhető el, ha a jelre vonatkozóan létező legtöbb információt, azaz a teljes múltját felhasználjuk.

Erre vonatkozóan a következő eredményt kaphatjuk (lásd Függelék):

$$ld(G_p) = -\frac{1}{2B} \int_{-B}^B ld \frac{s_\xi(\omega)}{\bar{s}_\xi} d\omega,$$

ahol bevezettük az átlagos spektrális sűrűséget a következő módon:

$$\bar{s}_\xi = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B s_\xi(\omega) d\omega.$$

Ezzel a digitális csatornán mintánként továbbítandó bináris szimbólumok száma a következő lesz:

$$n = \frac{1}{2} \cdot ld(\rho) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2B} \int_{-B}^B ld \frac{s_\xi(\omega)}{\bar{s}_\xi} d\omega,$$

illetve a csatorna szükséges átviteli sebessége:

$$v = \frac{B}{\pi} n = \frac{B}{2\pi} ld(\rho) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B ld \frac{s_\xi(\omega)}{\bar{s}_\xi} d\omega.$$

Mivel a fenti kifejezés második tagja sohasem lehet pozitív, ezért összehasonlítva a mintánkénti kódolásra nyert összefüggéssel, láthatjuk, hogy kisebb átviteli sebességű csatorna elegendő azonos jel-zaj viszony eléréséhez.

### A rész-sávú kódolás

A spektrális sűrűségnek a hatását az előírt követelményt teljesítő jel-sebességre közvetlenül is felismerhetjük az alábbi gondolatmenet alapján. Ha egy jel spektrális sűrűségfüggvénye nem állandó, sőt számottevő ingadozásokat mutat, akkor célszerű lehet a jelet frekvenciában szétbontani az eltérő sűrűségű (rész-teljesítményű) sávokra, majd az egyes sávokban eltérő, a jel rész-sávjának tulajdonságaihoz illeszkedő kódolást alkalmazni. Például, ha valamely részben a spektrális sűrűség elhanyagolhatóan kicsi, akkor azt a részt ki lehet hagyni (nulla hosszúságú kódszavakkal leírni) és ez nyilván megtakarítást eredményez.

Vizsgáljuk meg a fenti ötletet mennyiségileg az alábbiak szerint: a  $B$  sávra korlátozott  $\xi$  jelet osszuk fel  $K$  azonos szélességű rész-sávra.

A  $B/K$  rész-sávok mindegyikének a jellemzéséhez elegendő  $2B/K$  mintavételi frekvencia. Legyen a kvantálási lépcsők nagysága azonos mindegyik rész-sávban! Okozzon  $v_i$  zajt a visszaállított  $i$ -edik rész-sávban a kvantálás. A rekonstruált teljes jel jel-zaj viszonya az alábbi módon fejezhető ki:

$$\rho = \frac{2B \cdot \bar{s}_\xi}{K \cdot \mathbf{M} v_i^2}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy hány bináris szimbólummal történő leírást kell alkalmazni az egyes rész-sávokban! Jelölje  $\omega_i$  az  $i$ -edik rész-sávban lévő frekvenciát, amelynél az  $s_\xi(\omega)$  sűrűségfüggvény jellemző értéket vesz fel! Ezzel az  $i$ -edik sávban szükséges kódszavak mérete (bináris szimbólumok száma):

$$n_i \cong \frac{1}{2} \cdot ld \frac{2 \cdot s_\xi(\omega_i) \cdot B/K}{\mathbf{M} v_i^2}.$$

Ha a felhasználjuk az előző összefüggést, akkor kiküszöbölhetjük a kifejezésből az  $i$ -edik sávban keletkező kvantálási zajt:

$$n_i \cong \frac{1}{2} \cdot ld \frac{2 \cdot s_\xi(\omega_i) \cdot B/K}{2B \cdot \bar{s}_\xi} \cdot K \cdot \rho = \frac{1}{2} \cdot ld \frac{s_\xi(\omega_i)}{\bar{s}_\xi} \cdot \rho.$$

Ebből pedig könnyen meghatározhatjuk, hogy mekkora átviteli sebességre van szükség a  $\xi$  jel megkívánt jel-zaj viszonyú továbbításához:

$$v = \frac{B}{\pi \cdot K} \cdot \sum_{i=1}^K n_i = \frac{B}{\pi \cdot K} \cdot \sum_{i=1}^K \left( \frac{1}{2} \cdot ld \frac{s_{\xi}(\omega_i)}{\bar{s}_{\xi}} \cdot \rho \right) = \frac{B}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot ld(\rho) + \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{i=1}^K \left( \frac{B}{K} \cdot ld \frac{s_{\xi}(\omega_i)}{\bar{s}_{\xi}} \right)$$

Ennek a kifejezésnek a második tagjában egy integrál közelítő összegére ismerhetünk. Amennyiben a rész-sávok száma elegendően nagy, akkor a szükséges átviteli sebességre jó közelítést ad a következő kifejezés:

$$v = \frac{B}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot ld(\rho) + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^B ld \frac{s_{\xi}(\omega)}{\bar{s}_{\xi}} d\omega = \frac{B}{2\pi} \cdot ld(\rho) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-B}^B ld \frac{s_{\xi}(\omega)}{\bar{s}_{\xi}} d\omega$$

Feltétlenül érdekes, hogy a rész-sávú kódolás által elérhető tömörség megegyezik a prediktív kódolással elérhetővel, amint azt a korábban kapott összefüggéssel való egybeesés mutatja. Ugyanakkor rá kell mutatni arra, hogy a fenti határérték messze van minden gyakorlati megvalósítástól, hiszen nem tudunk bármilyen keskeny sávokra történő szétválasztást megvalósítani. Éppen ezért feltétlenül érdekes a véges sok rész-sávra osztás esetén is megvizsgálni, hogy miként érhető el optimum, azaz mekkora a legkisebb szükséges átviteli sebesség megkívánt jel-zaj viszonyú rekonstrukció esetén.

(Érdekes módon eredményül azt kapjuk, hogy azonos méretű rész-sávok esetén az egyes rész-sávokra használt bináris szimbólumok számát a rész-sávba eső jel négyzetes várható-értékének arányában kell kiosztani.)

Adjunk kicsit más formát a fenti kifejezéseinknek! Jelöljük  $\mathbf{M}_{\xi_i}^2$ -el a jel-rész négyzetes várható-értékét az  $i$ -edik rész-sávban, így a jel-zaj viszony a következő:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^K \mathbf{M}_{\xi_i}^2}{K \cdot \mathbf{M}_v^2},$$

a szükséges bináris szimbólumok száma pedig az alábbi lesz:

$$n_i = \frac{1}{2} \cdot ld \frac{\mathbf{M}_{\xi_i}^2}{\mathbf{M}_v^2}.$$

Ismét kiejtve a fenti két egyenletből  $\mathbf{M}_v^2$ -et,  $n_i$ -re kapjuk:

$$n_i = \frac{1}{2} \cdot ld \left( \frac{\mathbf{M}_{\xi_i}^2}{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{M}_{\xi_i}^2} \cdot \rho \right).$$

Az átlagosan szükséges szimbólumok száma pedig:

$$n = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K n_i = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{1}{2} \cdot ld \left( \frac{\mathbf{M}_{\xi_i}^2}{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{M}_{\xi_i}^2} \cdot \rho \right)$$

A logaritmusban lévő szorzatot válasszuk ketté:

$$n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left( ld(\rho) + ld \frac{\mathbf{M}_{\xi_i}^2}{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{M}_{\xi_i}^2} \right)$$

A szumma első tagja egy konstans, így  $K$ -szorosának  $K$ -ad része nyilván önmaga:

$$n = \frac{1}{2} \text{ld}(\rho) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \text{ld} \frac{\mathbf{M}_{\xi_i}^{\xi_i^2}}{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{M}_{\xi_i}^{\xi_i^2}}.$$

Az első tagban felismerhetjük a kívánt jel-zaj viszonyhoz szükséges bináris szimbólumok számát, amihez jön még (egy várhatóan negatív értékű) összeget, amelyet kicsit átalakítunk:

$$n = \frac{1}{2} \text{ld}(\rho) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left( \text{ld}(\mathbf{M}_{\xi_i}^{\xi_i^2}) - \text{ld}\left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{M}_{\xi_i}^{\xi_i^2}\right) \right).$$

A külső szumma második tagja szintén konstans, így:

$$n = \frac{1}{2} \text{ld}(\rho) + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (\text{ld}(\mathbf{M}_{\xi_i}^{\xi_i^2})) - \text{ld}\left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{M}_{\xi_i}^{\xi_i^2}\right) \right).$$

Viszont az első szummában most logaritmusok összege szerepel, ami átalakítható szorzattá a következő módon:

$$n = \frac{1}{2} \text{ld}(\rho) + \frac{1}{2} \cdot \left( \text{ld}\left(\prod_{i=1}^K \mathbf{M}_{\xi_i}^{\xi_i^2}\right)^{\frac{1}{K}} - \text{ld}\left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{M}_{\xi_i}^{\xi_i^2}\right) \right).$$

Most még visszaalakítjuk a két logaritmus különbségét hányadosná:

$$n = \frac{1}{2} \text{ld}(\rho) + \frac{1}{2} \cdot \text{ld} \frac{\left(\prod_{i=1}^K \mathbf{M}_{\xi_i}^{\xi_i^2}\right)^{\frac{1}{K}}}{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{M}_{\xi_i}^{\xi_i^2}} = \frac{1}{2} \text{ld}(\rho) - \frac{1}{2} \cdot \text{ld} \frac{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{M}_{\xi_i}^{\xi_i^2}}{\left(\prod_{i=1}^K \mathbf{M}_{\xi_i}^{\xi_i^2}\right)^{\frac{1}{K}}},$$

ahol végül a reciprok képzésével azt hangsúlyoztuk, hogy mennyivel csökken a szükséges szimbólumok száma, ami a rész-sávokban lévő jel-részek négyzetes várható-értékei számtani közepe és mértani közepe hányadosának a logaritmusával arányos.

A levonandó mennyiség mindig pozitív lesz, mert a logaritmus argumentumában egynél nagyobb mennyiség szerepel. A legnagyobb értéket akkor kell levonni, ha a mértani közép a legkisebb, a rész-sávokban a jel-részek teljesítménye a lehető legegyszerűsebb.

## A transzformációs kódolás

Az alábbiakban röviden összefoglaljuk az ú.n. transzformációs kódolás lényegét. A használt transzformációkat tekintve több különböző eljárást dolgoztak ki, de lényegében mindegyikben közös a forrás mintavételezett üzeneteinek blokkokra tördelése, és ezeken a blokkokon valamilyen transzformáció végrehajtása.

A transzformált blokkok természetesen szintén diszkrét értékek lesznek, amelyeket kvantálni és kódolni lehet a tulajdonságaikhoz legjobban illeszkedő módon.

A transzformáció leírására, amely tehát egy  $K$  elemű blokkot (vektort) egy  $K$  elemű vektorba alakít át, a legegyszerűbb a transzformáló mátrix megadása:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x},$$

ahol  $\mathbf{y}$  a transzformált vektor, az  $\mathbf{A}$  a transzformáló mátrix, és  $\mathbf{x}$  a bemenő minták vektora. Természetesen lényeges a transzformáció egyszerű invertálhatósága, hogy a vételi oldalon egyszerűen visszaállíthassuk az eredeti (hez hasonló) mintákat:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{y}.$$

Ha példaként az időbeli üzenet mintáinak blokkján végrehajtott diszkrét Fourier transzformációt (DFT) tekintjük, akkor eredményül a blokknak egy diszkrét leírását kapjuk a frekvencia-tartományban. Ennek a vonalas spektrumnak az egyes vonalait úgy is tekinthetjük, mint a jel „rész-sávokra” osztását (a sáv két szomszédos vonal



$$\mathbf{R}_\eta = \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}_\xi \cdot \mathbf{A}^T .$$

Amennyiben a transzformációval azt akarjuk elérni, hogy a transzformált vektorváltozó elemei korrelálatlanok legyenek, akkor az  $\mathbf{A}$  mátrixot úgy kell megválasztani, hogy az  $\mathbf{R}_\xi$ -t egy diagonál-mátrixba transzformálja.

Legyenek az  $\mathbf{A}$  mátrix sorai az  $\mathbf{R}_\xi$  sajátvektorai! Ekkor  $\mathbf{R}_\xi$ -t jobbról egy olyan mátrixszal szorozzuk, amelynek oszlopai az  $\mathbf{R}_\xi$  sajátvektorai, amire igaz a következő:

$$\mathbf{R}_\xi \cdot \mathbf{u}_i = \lambda_i \cdot \mathbf{u}_i ,$$

ahol  $\mathbf{u}_i$  az  $\mathbf{R}_\xi$  mátrix  $i$ -edik sajátvektora, és  $\lambda_i$  pedig az ehhez tartozó sajátérték.

A jobboldali szorzás eredménye tehát egy olyan mátrix, amelynek oszlopai az  $\mathbf{R}_\xi$  sajátvektorainak sajátérték-szeresei. Ezzel a mátrixszal megszorozva  $\mathbf{A}$ -t, amelynek tehát a sorai az  $\mathbf{R}_\xi$  sajátvektorai, egy diagonál-mátrixot kapunk, amelynek átlójában a sajátértékek vannak. Ez abból következik, hogy a szimmetrikus, valós,  $K \times K$  méretű  $\mathbf{R}_\xi$  mátrixnak éppen  $K$  sajátvektora van, amelyek ortogonálisak, és választhatók úgy, hogy ortonormáltak legyenek, azaz:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{E} ,$$

ahol  $\mathbf{E}$  az egységmátrixot jelöli.

Ezzel tehát  $\mathbf{R}_\eta$  a következő lesz:

$$\mathbf{R}_\eta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_K \end{pmatrix} ,$$

ahol a főátló elemei, a „sajátértékek” jelenleg a blokk elemeinek négyzetes várható-értékét jelentik.

A Karhunen – Loève (KL) transzformáció esetén tehát egy olyan transzformáló mátrixot kell használni, amelynek sorai a transzformálandó jel korreláció-mátrixának ortonormált sajátvektorai. A transzformált blokk ( $\boldsymbol{\eta}$ ) elemei így korrelálatlanok lesznek, de fontos kérdés az is, hogy milyen ezek négyzetes várható-értékeinek az eloszlása, hiszen ezeket az elemeket akarjuk egymástól függetlenül kvantálni és kódolni, tehát fontos tudni, hogy melyikre hány szimbólumot kell fordítanunk a kívánt jel-zaj viszony eléréséhez.

A mátrixalgebrából ismert, hogy diagonális mátrixok determinánsa a főátló elemeinek a szorzata, azaz:

$$|\mathbf{R}_\eta| = \prod_{i=1}^K \lambda_i ,$$

és egyébként bármely korreláció-mátrixra a főátló elemeinek a szorzata nagyobb vagy egyenlő, mint a mátrix determinánsa. Ebből következően a KL transzformáció mellett, hogy megszünteti a korrelációt a transzformált blokk elemei között, még minimalizálja is az elemek négyzetes várható-értékeinek a szorzatát. Ez más szavakkal azt jelenti, hogy a lehető legegyszerűtlenebbül „teríti” el azokat, miközben megőrzi az összegüket:

$$\sum_{i=1}^K \mathbf{M}(\eta_i^2) = \mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}^T \cdot \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{M}((\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\xi})^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\xi})) = \mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{M}(\boldsymbol{\xi}^T \cdot \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^K \mathbf{M}(\xi_i^2) ,$$

hiszen a transzformáló mátrix ortonormált, így  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$ , azaz az egységmátrix.

Most már csak az a kérdés, hogy a fenti transzformált blokkot hány szimbólummal lehet leírni adott jel-zaj viszony eléréséhez.

Kövessük a rész-sávú kódoláshoz alkalmazott módszert! Legyen a kvantálási lépcsők nagysága azonos mindegyik transzformált összetevőre! Okozzon  $v_i$  zajt a visszaállított együtthatóban a kvantálás. A rekonstruált teljes jel jel-zaj viszonya az alábbi módon fejezhető ki:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^K \mathbf{M} \eta_i^2}{K \cdot \mathbf{M} v_i^2},$$

ahol  $\mathbf{M} \eta_i^2 = \lambda_i$ .

Vizsgáljuk meg, hogy hány bináris szimbólummal történő leírást kell alkalmazni az egyes összetevőkre:

$$n_i = \frac{1}{2} \cdot ld \frac{\mathbf{M} \eta_i^2}{\mathbf{M} v_i^2} = \frac{1}{2} \cdot ld \frac{\lambda_i}{\mathbf{M} v_i^2}.$$

Ejtsük ki  $\mathbf{M} v_i^2$ -et a fenti két egyenletből:

$$n_i = \frac{1}{2} \cdot ld \left( \frac{\lambda_i}{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \lambda_i} \cdot \rho \right).$$

Az átlagosan szükséges szimbólumok száma pedig a következő lesz:

$$n = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K n_i = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{1}{2} \cdot ld \left( \frac{\lambda_i}{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \lambda_i} \cdot \rho \right).$$

Folytatva azokat az átalakításokat, amelyeket a rész-sávú esetben részleteztünk, a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2} \cdot ld(\rho) + \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \frac{1}{2} \cdot ld \frac{\lambda_i}{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \lambda_i} = \frac{1}{2} \cdot ld(\rho) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^K \frac{1}{K} \cdot \left( ld(\lambda_i) - ld \left( \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \lambda_i \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot ld(\rho) + \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{i=1}^K \frac{1}{K} \cdot ld(\lambda_i) - ld \left( \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \lambda_i \right) \right) = \frac{1}{2} \cdot ld(\rho) + \frac{1}{2} \cdot ld \frac{\left( \prod_{i=1}^K \lambda_i \right)^{\frac{1}{K}}}{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \lambda_i}. \end{aligned}$$

Amennyiben itt is megfordítjuk a logaritmus alatt szereplő törtet, akkor az eredményünk formailag azonos lesz a rész-sávú kódolásra kapott eredménnyel:

$$n = \frac{1}{2} \cdot ld(\rho) - \frac{1}{2} \cdot ld \frac{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \lambda_i}{\left( \prod_{i=1}^K \lambda_i \right)^{\frac{1}{K}}},$$

de itt  $\lambda_i = \mathbf{M} \eta_i^2$ , a transzformált vektor  $i$ -edik elemének a négyzetes várható-értéke. A korábbi állítás szerint viszont a KL transzformáció ezek szorzatát minimalizálja.

## A négyzetes középhibától különböző hűségkritériumok

Amennyiben a jel-zaj viszonyt használjuk hűségkritériumként, akkor az elérhető jel-sebesség csökkentési értékek nem lesznek túl nagyok. Azt mondhatjuk, hogy a jel-zaj viszony, vagy pontosabban a pontos értéktől való eltérés négyzetes középértékének előírása igen szigorú módon megköti a jelalak vagy másnéven hullámalak megengedett eltérését, ami viszont nem tesz lehetővé jelentős tömörítést.

Ahhoz, hogy a legkritikusabbnak tekinthető források, mint a beszéd, a hang (zene), a kép és a mozgókép esetén a megfizethető átviteli csatornákon való továbbításra alkalmas tömörítési értékeket el lehessen érni, a hullámalak megőrzése helyett az említett információ hordozó közegek végső felfogójának, tehát az embernek a hallását és látását tekintetbe vevő hűségkritériumokat kell találni. Sajnos azt kell mondanunk, hogy a jel-zaj viszonytal összemerhető módon egyszerűen kezelhető kritériumot napjainkig még nem sikerült találni. Ennek következtében a matematikai modellek és elmélet helyett a technika és a tömeges véleményvizsgálatok kerülnek előtérbe.

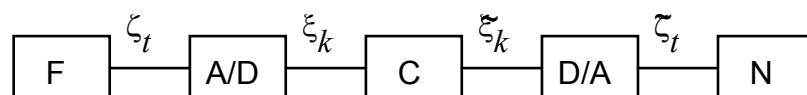
Innen kezdve maximális csodálattal szemlélhetjük a beszédre jól bevált 8 kbps sebességű tömörítési módszereket, amelyek tehát 64 kbps-ról indulva 12,5 %-ra tömörítik a beszédet, vagy a 100 ÷ 200 Kbps-ra tömörített zenét, amely a CD minőség közel 1,5 Mbps értékéről indul, és közel hasonló arányt ér el, és ne feledkezzünk meg a mozgóképek terén elért eredményekről, amelynél Mbps nagyságrendjébe csökkent a televízió minőségű mozgóképek továbbításához szükséges átviteli sebesség.

Ezek az itt említett eredmények a forrás tömörítését olyan hűségkritériummal végzik, amelyet „átlagos értékelő véleménynek”, Mean Opinion Score (MOS) neveznek, és az a lényege, hogy a hallgatók, vagy nézők nagyszámú csoportjai a különböző módszerek eredményét összehasonlítva (például az eredetivel), melyiket milyennek értékelik egy ötfokozatú skálán. Így azután kiváló, jó, közepes, gyenge és elfogadhatatlan eredményeket kapunk, de sajnos az egész procedúra matematikai modellezésére még nem találtunk megoldást, bár széleskörűen művelt kutatási téma az említett információ-hordozók felfogó által lényegesnek tartott jellemzőinek a megragadása.

## C) Analóg jel továbbítása digitális csatornán

Befejezésül felteszünk egy átfogóbb kérdést is: milyen minőségű rekonstruált analóg jel jut a felhasználóhoz, ha a digitális csatornán (miként az természetes) szimbólumtévesztés történik? A választ egy viszonylag egyszerű, de a lényegre rámutató modell alapján adjuk meg.

A vizsgálandó hírközlési modell a következő ábrán látható. Az analóg forrás  $\zeta_t$  jelét az A/D jelű (analóg/digitál) tömb alakítja át  $\xi_k$  szimbólumsorozattá. Ezt a



3.1. ábra A vizsgált modell

szimbólumsorozatot továbbítja a digitális csatorna, amelynek kimenetén - az időnkénti szimbólumtévesztésektől eltekintve - ugyanaz a sorozat van. Ebből a kimeneti sorozatból állít vissza a D/A jelű tömb egy, az eredeti jelhez közeli analóg jelet, amit  $\tilde{\zeta}_t$  hullámmal jelöltünk.

Az eddigiek alapján már tudjuk, hogy mekkora lesz a kvantálási hiba, de arról még nem ejtettünk szót, hogy mi lesz az eredménye a digitális csatornában eltévesztett szimbólumoknak. Azt könnyű felismerni, hogy a két zajforrás, tehát a kvantálás és a



szimbólumtévesztés függetlenül működik, és így a kimeneten általuk keltett zajösszetevők négyzetes várhatóértékei összeadódnak. Ha a kimeneti rekonstruált analóg jel minőségét jel/zaj viszonytal jellemezzük, akkor az alábbi összefüggést állíthatjuk fel:

$$\rho_{ki} = \frac{\mathbf{M}(\text{jel})^2}{\mathbf{M}(\text{kvt})^2 + \mathbf{M}(\text{tév})^2}$$

Ha az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a jel egyenletes eloszlású  $(-C, C)$ -ben, akkor a négyzetes várható értéke könnyen ellenőrizhetően  $C^2/3$  lesz. Mivel a kvantálási hibát korábban kiszámítottuk, már csak a szimbólumtévesztés hatását kell meghatározni.

Tételezzünk fel bináris csatornát, bitenként független  $P_e$  hibavalószínűséggel, és csak a szimbólumonkénti egyetlen bithiba hatását vegyük figyelembe! Mivel az  $n$  bittel leírt szimbólumokban, mint mintaértékekben keletkező hiba lényegesen függ attól, hogy milyen helyi-értéke van az eltévesztett bitnek, ezért a hiba átlagos értékét az alábbi módon számíthatjuk:

$$\mathbf{M}(\text{tév})^2 = P_e \cdot C^2 + P_e \cdot \left(\frac{C}{2}\right)^2 + P_e \cdot \left(\frac{C}{4}\right)^2 + \dots + P_e \cdot \left(\frac{C}{2^{n-1}}\right)^2$$

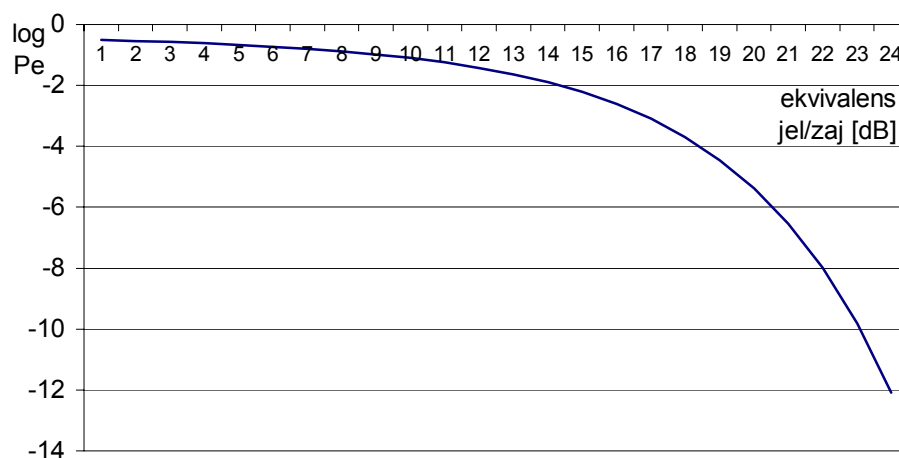
ahol az első tag a legnagyobb helyi-értékű bit (MSB) tévesztése által keltett összetevő értéke a rekonstruált mintában, míg az utolsó tag az LSB tévesztése által okozott hiba. Ezt az összeget felülről becsülhetjük egy mértani sor összegével, ami elég pontos, ha  $n$  értéke elég nagy:

$$\mathbf{M}(\text{tév})^2 \cong P_e \cdot C^2 \frac{1}{1 - 1/4} = 4P_e \cdot \frac{C^2}{3}$$

Ha behelyettesítünk a  $\rho_{ki}$  kifejezésébe, akkor a következőt kapjuk:

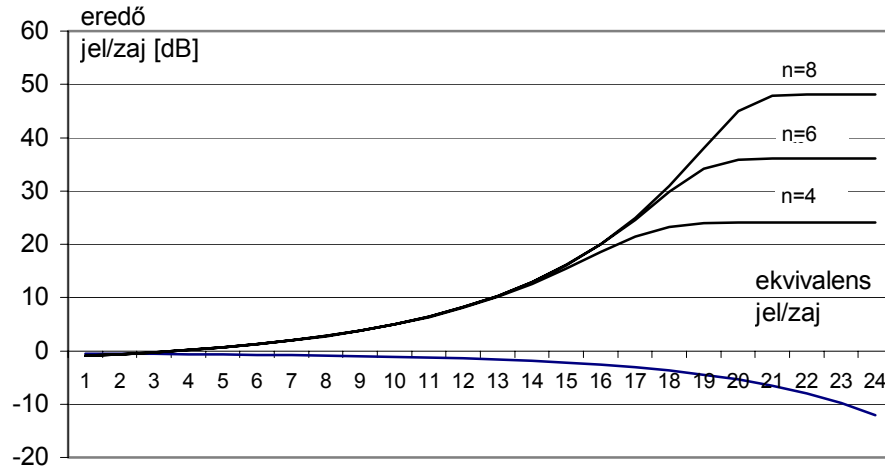
$$\rho_{ki} = \frac{\frac{C^2}{3}}{\frac{C^2}{3 \cdot 2^{2n}} + 4P_e \cdot \frac{C^2}{3}} = \frac{1}{2^{-2n} + 4P_e}$$

Ennek az igen egyszerű összefüggésnek, amelyben tehát a kvantálási értékeket leíró bináris számjegyek hossza és a digitális csatorna bit-hibavalószínűsége szerepel, kiértékelése van még hátra. Erre a legegyszerűbb diagramokat szerkeszteni. Először megmutatjuk a csatorna ekvivalens jel/zaj viszonya és a bit-hibavalószínűség közötti jellegzetes kapcsolatot, amit a döntési problémák vizsgálatánál ismertünk meg:



3.2. ábra Bit-hibavalószínűsége az ekvivalens jel/zaj függvényében

A kimenő jel/zaj viszonyának és a csatorna ekvivalens jel/zaj viszonyának a kapcsolata, ahol a görbéket a kerékítési szintek számát meghatározó kódszó-hosszakkal



paramétereztük:

3.3. ábra A eredő jel/zaj és a hibaválósínúség az ekvivalens jel/zaj függvényében

- ♣ -

### Függelék: A predikciós nyereség határértékének bizonyítása

$$ld(G_p) = -\frac{1}{2B} \int_{-B}^B ld \frac{s_\xi(\omega)}{\bar{s}_\xi} d\omega$$

Emlékeztetőül, a predikciós nyereség a gyengén stacionárius  $\xi$  négyzetes várható-értékének és a  $\delta$  előrejelzési hiba négyzetes várható-értékének a hányadosa:

$$G_p = \frac{\mathbf{M}\xi_0^2}{\mathbf{M}\delta_0^2}.$$

A predikciós hiba négyzetes várható-értékét korábban az alábbi módon jelöltük:

$$\varepsilon(\mathbf{c}) = \mathbf{M}\delta_0^2 = \mathbf{M}\left(\xi_{K+1} - \sum_{i=1}^K c_i \xi_i\right)^2$$

Ha a teljes múltat tekintetbe akarjuk venni, akkor

$$\mathbf{M}\delta_0^2 = \mathbf{M}\left(\xi_{K+1} - \sum_{i=-\infty}^K c_i \xi_i\right)^2.$$

Ezzel természetesen egyenértékű a következő:

$$\mathbf{M}\delta_0^2 = \mathbf{M}\left(\xi_k - \sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_{k-i}\right)^2.$$

A feladat pedig az volt, hogy keressünk olyan  $c_i$  együtthatókat, amelyek minimalizálják a fenti különbséget.

Írjuk át egy kissé a fenti összefüggést! Vonjuk be valahogy  $\xi_k$ -t is a szummába! Írjuk a következőt:

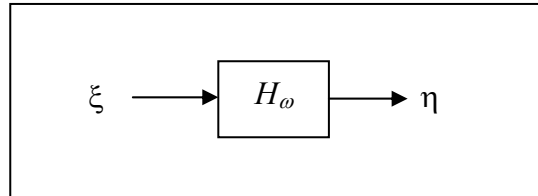
$$\mathbf{M}\delta_0^2 = \mathbf{M}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi_{k-i}\right)^2, \text{ ahol } a_0 = 1.$$

Ez a szumma láthatóan tartalmazza  $\xi_k$  -t is, valamint a korábbi tagokat, viszont a minimum eléréséhez nyilván  $a_i = -c_i$  kell legyen, kivéve  $i = 0$  esetén.

Értelmezzük újra a feladatot! Minimalizálni kell valaminek – jelölje  $\eta$  - a négyzetes várható értékét, ahol tehát:

$$\eta = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \xi_{k-i},$$

ami egy súlyozott összeg, és így egy digitális szűrő kimenőjelének tekinthetjük:



Jól ismerjük viszont, hogy egy lineáris invariáns transzformáció miként transzformálja a bemenetre jutó folyamat spektrális sűrűség-függvényét:

$$s_{\eta}(\omega) = |H_{\omega}|^2 \cdot s_{\xi}(\omega).$$

A kimeneten lévő folyamat spektrális sűrűségének az ismeretében a minimalizálandó négyzetes várható-értéket könnyen kiszámíthatjuk:

$$\mathbf{M}\eta_0^2 = \int_{-B}^B s_{\xi}(\omega) \cdot |H_{\omega}|^2 d\omega$$

ahol feltételeztük, hogy a bemenő folyamat  $B$ -re sávhatárolt.

Tehát azt a  $H_{\omega}$  -t keressük, amely a fenti kifejezést minimalizálja. A keresett transzformáció alakját jól ismerjük a  $z$ , illetve az  $\omega$  tartományokban:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot z^{-i}, \quad H_{\omega} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot e^{-j \cdot i \cdot \omega \cdot \pi / B}, \quad \text{és } a_0 = 1.$$

*Állítás:*  $\mathbf{M}\eta_0^2$  akkor lesz minimális, ha  $H_{\omega}$  a következő:

$$|H_{\omega}|^2 = \frac{S}{s_{\xi}(\omega)}$$

ahol  $S =$  állandó, amely biztosítja az  $a_0 = 1$  - et.

*Bizonyítás:* Legyen  $|\tilde{H}_{\omega}|^2 = \frac{S}{s_{\xi}(\omega)}$ , valamint  $H_{\omega}$  tetszőleges, de mindegyikre teljesüljön az

$$a_0 = 1.$$

Ekkor a predikciós hibára írhatjuk a következőt:

$$\mathbf{M}\delta_0^2 = \mathbf{M}\eta_0^2 = \varepsilon(H_{\omega}), \quad \text{így } \varepsilon(H_{\omega}) - \varepsilon(\tilde{H}_{\omega}) = \int_{-B}^B (|H_{\omega}|^2 - |\tilde{H}_{\omega}|^2) \cdot s_{\xi}(\omega) d\omega$$

Az integrálon belüli különbség kis átrendezésével az alábbiakat kapjuk:

$$\varepsilon(H_{\omega}) - \varepsilon(\tilde{H}_{\omega}) = \int_{-B}^B |\tilde{H}_{\omega}|^2 \cdot s_{\xi}(\omega) \cdot \left( \left| \frac{H_{\omega}}{\tilde{H}_{\omega}} \right|^2 - 1 \right) d\omega.$$

Az integrálon belüli zárójelben lévő különbségről könnyen kimutathatjuk (két polinom hányadosaként) a következőket:

$$\frac{H_{\omega}}{\tilde{H}_{\omega}} = 1 + b_1 \cdot e^{-j \cdot \omega / 2B} + b_2 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot 2 / 2B} + b_3 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot 3 / 2B} + \dots$$

és

$$\left| \frac{H_\omega}{\tilde{H}_\omega} \right|^2 = 1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + \text{exponenciális tagok.}$$

Ezzel:

$$\varepsilon(H_\omega) - \varepsilon(\tilde{H}_\omega) = \int_{-B}^B \frac{S}{s_\xi(\omega)} \cdot s_\xi(\omega) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + \text{exp tagok}) d\omega.$$

Az integrálban  $S$  nem lehet negatív, úgyszintén az együtthatók négyzetei sem, az exponenciális tagok integrálja viszont nulla, így:

$$\varepsilon(H_\omega) - \varepsilon(\tilde{H}_\omega) = \int_{-B}^B S \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + \text{exp tagok}) d\omega \geq 0,$$

tehát az állítás igaz.

Ezután meghatározhatjuk, hogy mekkora a hibája a legjobb előrejelzésnek. Ehhez  $S$  kiszámítását kell elvégezni:

$$\min \mathbf{M}\eta_0^2 = \int_{-B}^B s_\xi(\omega) \cdot |\tilde{H}_\omega|^2 d\omega = \int_{-B}^B S \cdot d\omega = S \cdot 2B, \text{ de úgy, hogy } a_0 = 1 \text{ legyen.}$$

A  $\tilde{H}_\omega$ -ra vonatkozó – most bizonyított – feltételünkben vegyük mindkét oldal logaritmusát (például 2-es alapút):

$$\begin{aligned} \text{ld} \left| \tilde{H}_\omega \right|^2 &= \text{ld} \frac{S}{s_\xi(\omega)} \\ \text{ld}(\tilde{H}_\omega) + \text{ld}(\tilde{H}_\omega^*) &= \text{ld} \frac{S}{\bar{s}_\xi} + \text{ld} \frac{\bar{s}_\xi}{s_\xi(\omega)} = \text{ld} \frac{S}{\bar{s}_\xi} - \text{ld} \frac{s_\xi(\omega)}{\bar{s}_\xi} \end{aligned}$$

(A baloldalon csillaggal jelöltük a konjugáltat, a jobboldalon az átlagos spektrális sűrűséggel bővítettünk, elkerülve a dimenzió problémáját.)

Vegyük mindkét oldal integrálját  $-B$  és  $+B$  között:

$$\int_{-B}^B (\text{ld}(\tilde{H}_\omega) + \text{ld}(\tilde{H}_\omega^*)) d\omega = \int_{-B}^B \left( \text{ld} \frac{S}{\bar{s}_\xi} - \text{ld} \frac{s_\xi(\omega)}{\bar{s}_\xi} \right) d\omega$$

Megvizsgálva a baloldalon lévő integrált, megállapíthatjuk, hogy annak értéke nulla, mert az  $\text{ld}(\tilde{H}_\omega)$  a következő módon fejezhető ki:

$$\text{ld}(\tilde{H}_\omega) = \text{ld} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot e^{-j \cdot i \cdot \omega \cdot \pi / B} \right), \text{ és } a_0 = 1.$$

Kifejtve a szummát:

$$\text{ld}(\tilde{H}_\omega) = \text{ld}(1 + a_1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \pi / B} + a_2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega \cdot \pi / B} + \dots).$$

A logaritmus argumentumát jelöljük  $(1+x)$ -el, és vegyük a deriváltját:

$$\frac{d}{dx} \text{ld}(1+x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{1}{1+x}.$$

Vegyük észre, hogy a második tényező egy mértani sor összege:

$$\frac{d}{dx} \text{ld}(1+x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot (1 - x + x^2 - x^3 \pm \dots).$$

Ennek sornak, mint deriválnak a primitív függvénye a következő:

$$\text{ld}(1+x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots \right)$$

Most vegyük figyelembe, hogy mit jelöltünk  $x$ -el:

$$ld\left(1 + a_1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \pi / B} + a_2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega \cdot \pi / B} + \dots\right) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot e^{-j \cdot i \cdot \omega \cdot \pi / B} - \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot e^{-j \cdot i \cdot \omega \cdot \pi / B} \right)^2 \pm \dots \right)$$

Vegyük észre, hogy a zárójelen belül lévő tagok továbbra is csak  $e^{-j \cdot i \cdot \omega / 2B}$  alakúak, de megváltozott együtthatókkal:

$$ld\left(1 + a_1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \pi / B} + a_2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega \cdot \pi / B} + \dots\right) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \left( \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot e^{-j \cdot i \cdot \omega \cdot \pi / B} \right)$$

Tehát :

$$ld(\tilde{H}_\omega) = ld\left(1 + a_1 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \pi / B} + a_2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \omega \cdot \pi / B} + \dots\right) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \left( \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot e^{-j \cdot i \cdot \omega \cdot \pi / B} \right).$$

Végül maradt még az integrálás  $-B$ -től  $+B$ -ig:

$$\int_{-B}^B ld(\tilde{H}_\omega) d\omega = \int_{-B}^B \frac{1}{\ln(2)} \cdot \left( \sum_{i=1}^{\infty} k_i \cdot e^{-j \cdot i \cdot \omega \cdot \pi / B} \right) d\omega = 0,$$

hiszen a szumma bármely tagjának az integrálja:

$$\int_{-B}^B e^{-j \cdot i \cdot \omega \cdot \pi / B} d\omega = \left[ \frac{e^{-j \cdot i \cdot \omega \cdot \pi / B}}{-j \cdot i \cdot \pi / B} \right]_{-B}^B = \frac{e^{j \cdot i \cdot \pi} - e^{-j \cdot i \cdot \pi}}{j \cdot i \cdot \pi / B} = \frac{2 \sin(i \cdot \pi)}{i \cdot \pi / B} = 0.$$

Ugyanez igaz természetesen a konjugáltra is, így:

$$\int_{-B}^B \left( ld(\tilde{H}_\omega) + ld(\tilde{H}_\omega^*) \right) d\omega = 0,$$

azaz:

$$0 = \int_{-B}^B \left( ld \frac{S}{\bar{S}_\xi} - ld \frac{S_\xi(\omega)}{\bar{S}_\xi} \right) d\omega,$$

amiből:

$$2B \cdot ld \frac{S}{\bar{S}_\xi} = \int_{-B}^B ld \frac{S_\xi(\omega)}{\bar{S}_\xi} d\omega.$$

Viszont a keresett predikciós nyereség:

$$G_p = \frac{\mathbf{M}_{\xi_0}^{\xi^2}}{\mathbf{M}_{\delta_0}^{\delta^2}} = \frac{\mathbf{M}_{\xi_0}^{\xi^2}}{\min \mathbf{M}_{\eta_0}^{\eta^2}} = \frac{\int_{-B}^B \bar{S}_\xi d\omega}{S \cdot 2B} = \frac{\bar{S}_\xi \cdot 2B}{S \cdot 2B} = \frac{\bar{S}_\xi}{S}.$$

Vegyük a kettes-alapú logaritmusát:

$$ld(G_p) = ld\left(\frac{\bar{S}_\xi}{S}\right) = -ld\left(\frac{S}{\bar{S}_\xi}\right).$$

Erre viszont két sorral feljebb kaptunk egy eredményt, amit behelyettesítve:

$$ld(G_p) = -\frac{1}{2B} \cdot \int_{-B}^B ld \frac{S_\xi(\omega)}{\bar{S}_\xi} d\omega,$$

és ezzel igazoltuk a predikciós nyereség határértékére vonatkozó összefüggést.