

## Zajos jel vétele

Digitálisan modulált zajos jel vétele esetén megfigyeljük a csatorna kimenetét, és szeretnénk minél biztosabban megállapítani, hogy mi volt a csatorna bemenetén. Már a moduláció végén utaltunk arra, hogy a döntést a jeltérben hozzuk meg.

Emlékeztetőül felsoroljuk az ortonormált jeltér alapvető jellemzőit:

- a teret az alábbi bázisfüggvények feszítik ki:

$$\varphi_j(t), \quad 0 \leq t < \tau_0, \quad j = 1, \dots, N$$

- amelyek skaláris szorzata:

$$\langle \varphi_j(t), \varphi_k(t) \rangle = \int_0^{\tau_0} \varphi_j(t) \cdot \varphi_k(t) dt = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

- és a jelekre nézve a tér teljes:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^N x_{ij} \cdot \varphi_j(t), \quad i = 1, \dots, M; \quad \text{ahol} \quad x_{ij} = \int_0^{\tau_0} x_i(t) \cdot \varphi_j(t) dt .$$

### Fehér, Gauss zaj a jeltérben

Vizsgáljuk meg, hogy miként írható le a *zaj* a jeltérben! Az additív, azaz jeltől független zajt modellezzük egy konstans spektrális sűrűségű normális folyamattal, vagy másik szokásos elnevezéssel, *fehér Gauss folyamat*-tal! Ugyan jól tudjuk, hogy ennek a folyamatnak nem korlátos a négyzetes várhatóértéke, de rögtön meglátjuk, hogy a jeltérbe „vetítve” egy nagyon jól használható modellt képvisel.

A  $v$ -nek nevezett, nulla várhatóértékű, fehér Gauss folyamat spektrális sűrűségfüggvényére és korreláció függvényére az alábbi jelöléseket használjuk:

$$s_v(\omega) = s_0, \quad -\infty < \omega < \infty$$

$$R_v(\tau) = s_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} d\omega = 2 \cdot \pi \cdot s_0 \cdot \delta(\tau),$$

ahol a konstans Fourier transzformáltjaként is megadható Dirac függvényt vettük észre.

A Gauss folyamat  $n$  dimenziós együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_v(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{K}|(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})},$$

ami jelenleg (a korrelálatlanság miatt) a következőre egyszerűsödik:

$$f_v(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n x_j^2}.$$

Vetítsük ezt a zajt a bázisfüggvényekre:

$$v_j = \int_0^{\tau_0} v(t) \cdot \varphi_j(t) dt; \quad j = 1, \dots, N .$$

Jól látható, hogy a  $v(t)$  zaj jeltérbeli összetevőit lineáris transzformációval kapjuk, tehát a komponensek is normális eloszlásúak, nulla várhatóértékűek, és szórásnégyzetük a következő:

$$\mathbf{M}(v_j^2) = \mathbf{M} \left( \int_0^{\tau_0} v(t) \cdot \varphi_j(t) dt \cdot \int_0^{\tau_0} v(\vartheta) \cdot \varphi_j(\vartheta) d\vartheta \right).$$

Számítsuk ki ezt a várhatóértéket:

$$\mathbf{M}(v_j^2) = \int_0^{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \mathbf{M}\{v(t) \cdot v(\mathcal{G})\} \cdot \varphi_j(t) \cdot \varphi_j(\mathcal{G}) dt d\mathcal{G} = 2\pi \cdot s_0 \int_0^{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \delta(t-\mathcal{G}) \cdot \varphi_j(t) \cdot \varphi_j(\mathcal{G}) dt d\mathcal{G} = 2\pi \cdot s_0,$$

mert a várhatóértékben felismerhettük a korreláció függvényt.

(Megjegyezzük, hogy a dirac-delta az integrálban „mintát vesz” a szorzótényezőből, így például a  $t$  szerint integrálva először,  $\varphi_j(\mathcal{G})$ -t kapjuk. A bázisfüggvények pedig ortonormáltak, tehát szorzatuk integrálja 1-et ad.)

Eredményünk igen fontos, és jelentős. Azt mondja, hogy a fehér zajnak a jeltérbe vetített összetevői korlátos négyzetes várhatóértékűek, annak ellenére, hogy maga a folyamat, amiből a vetítés készült, végtelen négyzetes várhatóértékű. Persze rögtön felmerül a kérdés, hogy hová tűnt a végtelen. Nem történt hiba, mert a zaj jeltérbeli komponensei nem adják ki a teljes zajt:

$$v(t) = \sum_{j=1}^N v_j \cdot \varphi_j(t) + \tilde{v}(t)$$

Úgy is fogalmazhatunk, hogy a jeltér *nem teljes* a használt zajmodellre nézve, és a  $\tilde{v}(t)$  csak végtelen sok dimenziójú vektorral reprezentálható. Ez viszont nem probléma, mert olyan zajkomponensek maradnak így „figyelmen kívül”, amelyek nem kapcsolatosak a jellel, azaz:

$$\mathbf{M}(x_{ij} \cdot \tilde{v}(t)) = 0,$$

tehát a „maradék” irreleváns a jelre vonatkozóan.

Megjegyzést érdemel még az is, hogy a jeltérbe történt vetítéssel kapott fenti eredmény a zajkomponens időrésbe jutó energiáját adja, hiszen a  $\tau_0$  időtartamú bázisfüggvényekkel végeztük a vetítést. Az így kapott zajenergiával kell megküzdenie az időrésbe jutó jelkomponens energiájának, amikor a zajos csatorna kimenetén a döntést meghozzuk.

## Jel plusz zaj a jeltérben

A modulált jelet plusz az additív zajt jelöljük az alábbi módon

$$\tilde{\eta}(t) = \eta(t) + v(t).$$

Digitális moduláció esetén véges időszakokat, ú.n. időrészeket használunk egy-egy szimbólum továbbítására, ezért a modulációnál már bevezettük az időrésenkénti jelölést is:

$$\tilde{\eta}_k(t) = \eta_k(t) + v(t)$$

(itt a jel mellett szereplő  $k$  index azt kívánja jelölni, hogy a moduláló szimbólumtól függően valamely meghatározott elemi jel van az időrésben, viszont a zaj mellől elhagyjuk ezt a jelet, azt hangsúlyozva, hogy az előbbtől függetlenül, és részleteiben érdektelenül adódik a jelhez a zavaró zaj)

A moduláció jeltérbeli leírásakor a modulált jelre a következőt kaptuk:

$$\eta_k(t) = \sum_{j=1}^N y_j^{(i)}(k) \cdot \varphi_j(t), \quad i=1, \dots, M, \quad -\infty < k < \infty,$$

így

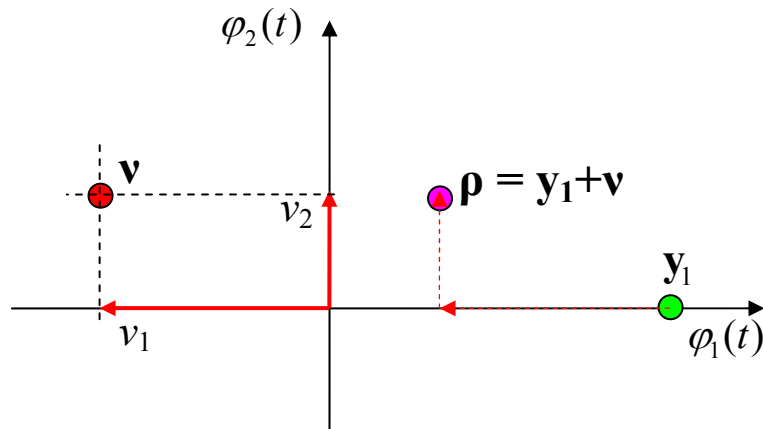
$$\tilde{\eta}_k(t) = \eta_k(t) + v(t) = \sum_{j=1}^N y_j^{(i)}(k) \cdot \varphi_j(t) + \sum_{j=1}^N v_j \cdot \varphi_j(t) + \tilde{v}(t).$$

A vett zajos jelnek a jeltérbeli leírása pedig az alábbi lesz:

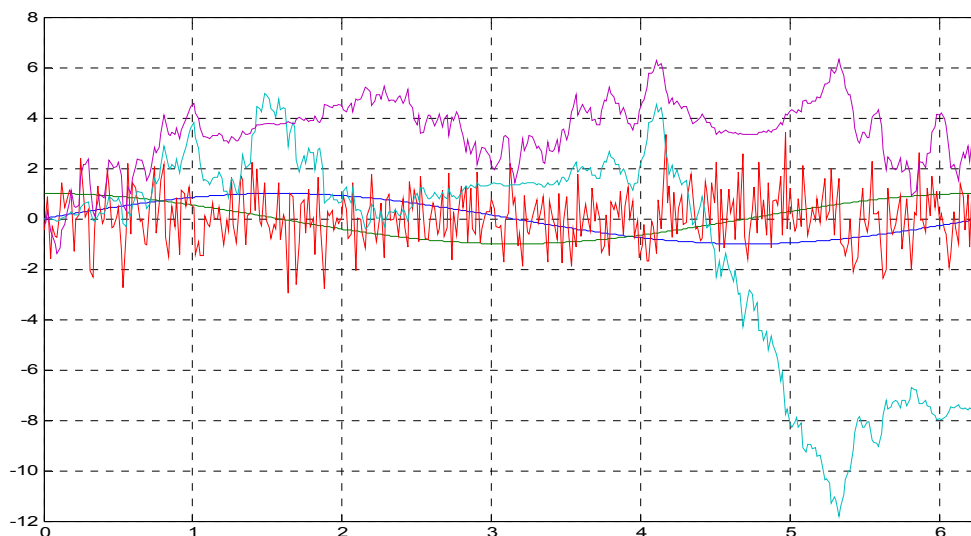
$$\begin{aligned} \rho_k(t) &= \sum_{j=1}^N y_j^{(i)} \cdot \varphi_j(t) + \sum_{j=1}^N v_j \cdot \varphi_j(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbf{\rho} = \begin{pmatrix} y_1^{(i)} & \dots & y_j^{(i)} & \dots & y_N^{(i)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_j & \dots & v_N \end{pmatrix} = \mathbf{y}_i + \mathbf{v} \end{aligned}$$

azaz az  $i$ -edik elemi jel vektora plusz a zajvektor.

Illusztrációként tekintsük például a QPSK modulációt! Tegyük fel, hogy az 1-es elemi jelet küldtük a csatornába, és az alábbi ábrán látható zajkomponensek adódtak hozzá. Természetesen az időtartományban is ábrázolhatjuk a zajos jelet (feltételezve valamilyen lefolyását a zajnak), de ott sokkal „zavarosabbak” a viszonyok. Mutatunk egy „felvételt”



szimulált zaj esetén. Az ábrán látható egy szinuszos és koszinuszos elemi jel, a normális eloszlású zaj (ez vörös), valamint a két vetület „kialakulása”, tehát a bázisfüggvényekkel képezett szorzat „integrálódása” az időrés mentén:



A zajos jelnek a jeltérbeli illusztrálása után térjünk rá a döntési szabály vizsgálatára.

### A döntési szabály a jeltérben

Korábban megállapítottuk, hogy a legjobb döntést úgy hozhatjuk meg, ha keressük az a-priori valószínűségek és az elemi jelekre vonatkoztatott megfigyelések valószínűségei szorzatának a maximumát. Ez a jeltérben, mint *döntési térben* a következő:

$$\hat{i} = \arg \max_i \{P_i \cdot \Pr(\boldsymbol{\rho} | \mathbf{y}^{(i)})\},$$

azaz keressük meg azt a hipotézist (elemi jelet), amelyre vonatkozóan a megfigyelt  $\boldsymbol{\rho}$  vektor valószínűségének és az elemi jel a-priori valószínűségének a szorzata a legnagyobb. A keresés eredményén nem változtat, ha a logaritmust vesszük:

$$\hat{i} = \arg \max_i \{\ln P_i + \ln \Pr(\boldsymbol{\rho} | \mathbf{y}^{(i)})\}.$$

Fehér gaussi zajra egyszerűen megadható a második tag. Mivel a fehér zaj, mint láttuk, korrelálatlan, ezért  $N$  dimenziós együttes, feltételes sűrűségfüggvénye az alábbi:

$$\Pr(\mathbf{\rho} | \mathbf{y}^{(i)}) = \frac{1}{(2\pi \cdot \sqrt{s_0})^N} \cdot e^{-\frac{1}{4\pi \cdot s_0} \sum_{j=1}^N (\rho_j - y_j^{(i)})^2},$$

ahol felhasználtuk a vetített zajkomponensek négyzetes várhatóértékére kapott  $2\pi \cdot s_0$  eredményt.

A döntési feladat elvégzésének szabálya megadható a döntési tér részhalmazokra történő particionálásával. Az előbbi értelmében az  $i$ -edik részhalmazra fenn kell álljon:

$$\tilde{A}_i = \left\{ \mathbf{\rho} \mid \ln P_i + \ln \Pr(\mathbf{\rho} | \mathbf{y}^{(i)}) \geq \ln P_k + \ln \Pr(\mathbf{\rho} | \mathbf{y}^{(k)}), \quad \forall k \neq i \right\},$$

tehát mindazokat a  $\mathbf{\rho}$  vektorokat ide soroljuk, amelyekre az egyenlőtlenség teljesül. Illetve rendezhetjük az egyenlőtlenséget:

$$\tilde{A}_i = \left\{ \mathbf{\rho} \mid \ln \frac{P_i}{P_k} + \ln \frac{\Pr(\mathbf{\rho} | \mathbf{y}^{(i)})}{\Pr(\mathbf{\rho} | \mathbf{y}^{(k)})} \geq 0, \quad \forall k \neq i \right\},$$

és így a feltételes valószínűségek hányadosának logaritmusai nagyon egyszerű lesz:

$$\tilde{A}_i = \left\{ \mathbf{\rho} \mid \ln \frac{P_i}{P_k} + \frac{1}{4\pi \cdot s_0} \left( \sum_{j=1}^N (\rho_j - y_j^{(k)})^2 - \sum_{j=1}^N (\rho_j - y_j^{(i)})^2 \right) \geq 0, \quad \forall k \neq i \right\}.$$

Négyzetre emeléseket elvégezve, rendezve:

$$\tilde{A}_i = \left\{ \mathbf{\rho} \mid \ln \frac{P_i}{P_k} + \frac{1}{4\pi \cdot s_0} \left( \sum_{j=1}^N (y_j^{(k)2} - y_j^{(i)2}) + 2 \sum_{j=1}^N (\rho_j y_j^{(i)} - \rho_j y_j^{(k)}) \right) \geq 0, \quad \forall k \neq i \right\}.$$

Tekintetbe véve, hogy az egyik szummában felismerhetők az elemi jel-energiák:

$$\sum_{j=1}^N y_j^{(k)2} = E_k; \quad \sum_{j=1}^N y_j^{(i)2} = E_i$$

az  $i$ -edik részhalmazra kapunk egy kifejezést, amely számos konstans mellett tartalmazza a megfigyelésnek a jeltérbe vetített  $\rho_j$  összetevőit:

$$\tilde{A}_i = \left\{ \mathbf{\rho} \mid \ln \frac{P_i}{P_k} + \frac{1}{4\pi \cdot s_0} \left( E_k - E_i + 2 \sum_{j=1}^N (y_j^{(i)} - y_j^{(k)}) \cdot \rho_j \right) \geq 0, \quad \forall k \neq i \right\}.$$

Talán jobban áttekinthető alakot kapunk, ha az egyenlőtlenség egyik oldalára gyűjtjük a megfigyeléstől függő elemeket, a másik oldalra pedig az állandókat:

$$\tilde{A}_i = \left\{ \mathbf{\rho} \mid \frac{\sum_{j=1}^N (y_j^{(i)} - y_j^{(k)}) \cdot \rho_j}{2\pi \cdot s_0} \geq \frac{E_i - E_k}{4\pi \cdot s_0} + \ln \frac{P_k}{P_i}, \quad \forall k \neq i \right\}.$$

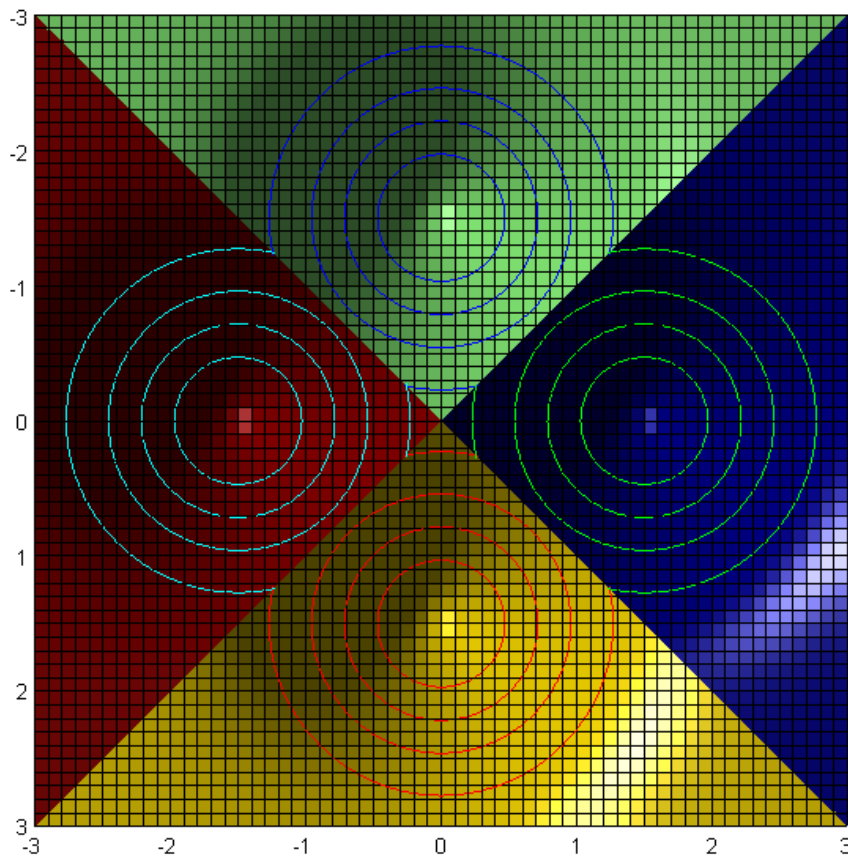
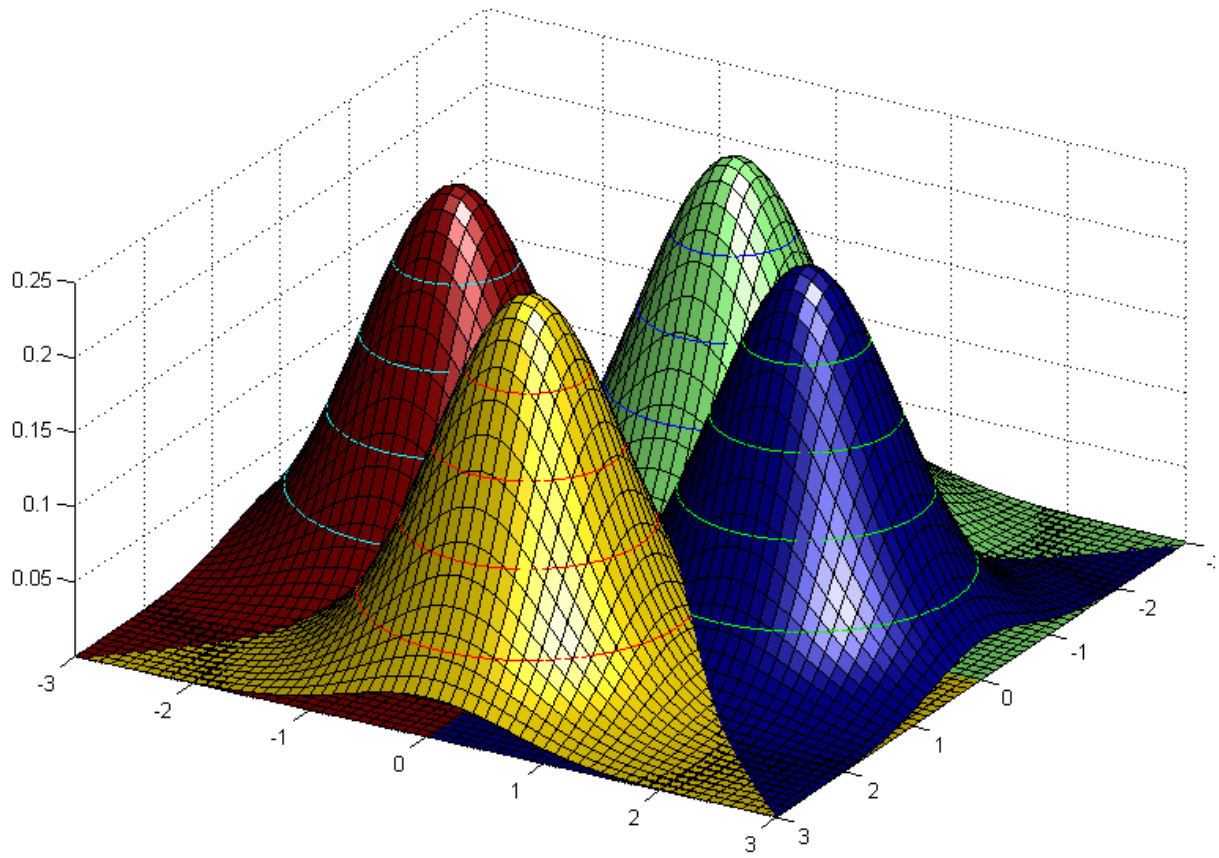
Végül még azt mutatjuk meg, hogy azonos jelenergiák, és a-priori valószínűségek esetén mennyire egyszerű lesz a legjobb döntést eredményező részhalmaz kifejezése:

$$\tilde{A}_i = \left\{ \mathbf{\rho} \mid \sum_{j=1}^N y_j^{(i)} \cdot \rho_j \geq \sum_{j=1}^N y_j^{(k)} \cdot \rho_j, \quad \forall k \neq i \right\}.$$

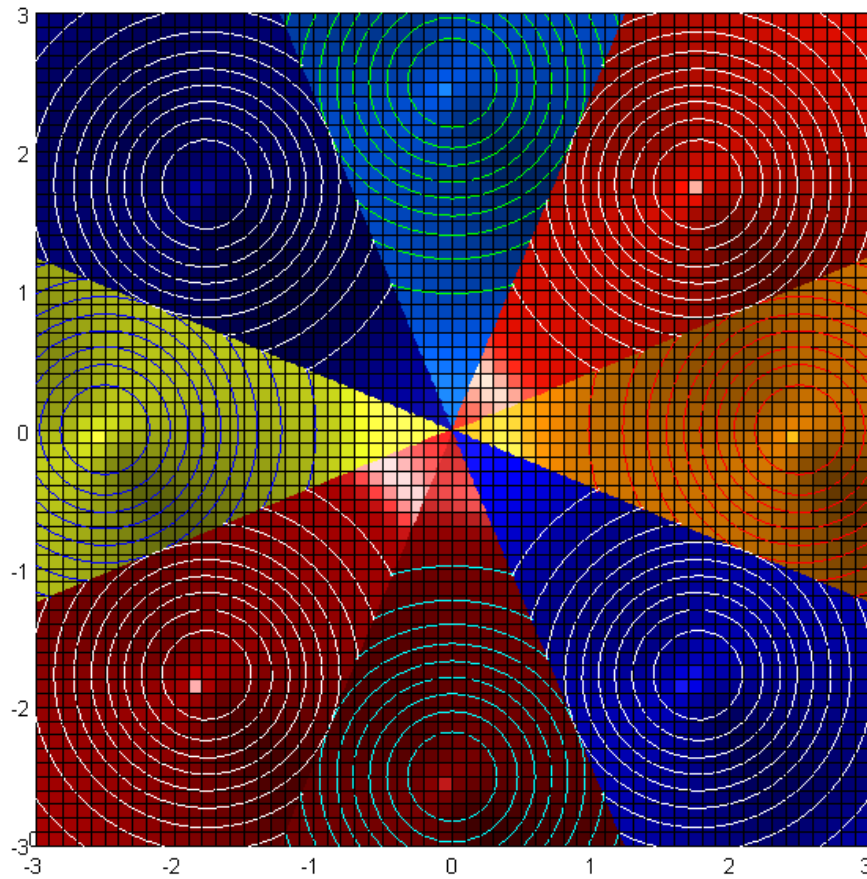
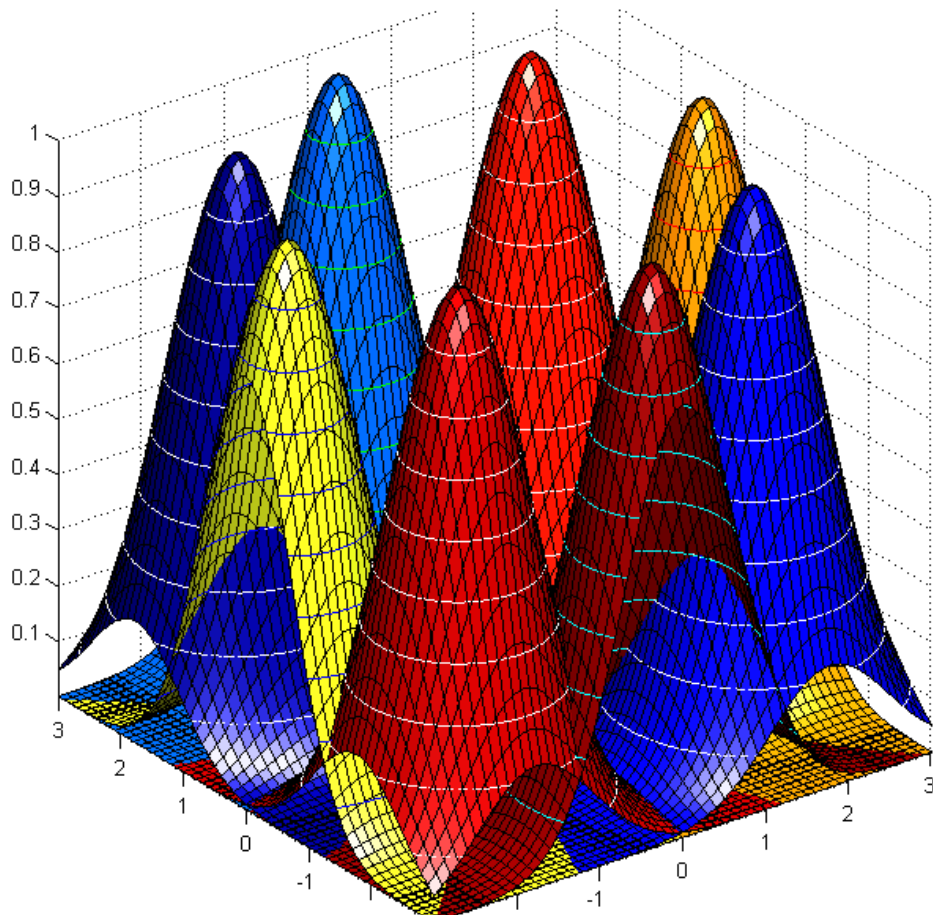
A megegyező jelenergiák és azonos a-priori valószínűségek egyébként több szempontból kedvezőek, tehát törekszünk a megvalósulásukra.

A következő ábrákon szemléltetni kívánjuk a most meghatározott döntési részhalmazokat, azok kialakulását QPSK és 8PSK moduláció esetén. Látható, hogy azonos valószínűségek és jelenergiák esetén a döntési tartományok negyed- illetve nyolcad körök lesznek.

A döntési szabály lerögzítése után foglalkozunk a döntési algoritmussal!



Döntési tartományok QPSK modulációnál



Döntési tartományok 8PSK modulációnál

## Az optimális döntési eljárás koherens demodulációnál

Jelenleg a döntési szabály, illetve a döntési tér részhalmazai helyett praktikusabban közelítjük a feladatot. Azt a kérdést válaszoljuk meg, hogy milyen eljárást követve tudjuk betartani az optimális döntési szabályt. Ehhez térjünk vissza a döntési célként megfogalmazott feladathoz:

$$\hat{i} = \arg \max_i \{ \ln P_i + \ln \Pr(\mathbf{\rho} | \mathbf{y}^{(i)}) \},$$

amely célkitűzés gaussi fehér zaj esetén, tekintve a feltételes valószínűség-sűrűséget:

$$\Pr(\mathbf{\rho} | \mathbf{y}^{(i)}) = \frac{1}{(2\pi \cdot \sqrt{s_0})^N} \cdot e^{-\frac{1}{4\pi \cdot s_0} \sum_{j=1}^N (\rho_j - y_j^{(i)})^2}$$

az alábbi lesz:

$$\hat{i} = \arg \max_i \left\{ \ln P_i + \ln \frac{1}{(2\pi \cdot \sqrt{s_0})^N} \cdot e^{-\frac{1}{4\pi \cdot s_0} \sum_{j=1}^N (\rho_j - y_j^{(i)})^2} \right\}.$$

Képezve a logaritmust, kapunk egy konstans tagot is, amelyet elhagyhatunk, mert valamennyi elemi jelre megegyezik. A megmaradó kifejezés az alábbi:

$$\hat{i} = \arg \max_i \left\{ \ln P_i - \frac{1}{4\pi \cdot s_0} \sum_{j=1}^N (\rho_j - y_j^{(i)})^2 \right\}$$

Néhány praktikus megállapítást tehetünk a kapott összefüggéssel kapcsolatban: (i) amikor áttérünk a maximum kiválasztásánál a logaritmusra, akkor érdekes helyzet áll elő, mert 1-nél kisebb mennyiségek (valószínűségek) logaritmusáról van szó, tehát a logaritmusok negatívak, és a maximum a **legkisebb negatív** lesz. (ii) amennyiben azonosak az a-priori valószínűségek, akkor  $\ln P_i = -\ln M$ , és a maximumot akkor kapjuk, ha a szumma a **legkisebb**. Mi is ez a szumma? Nem más, mint a vett zajos jelnek a jeltérbeli  $\rho_j$  komponensei és az elemi jelek jeltérbeli  $y_j^{(i)}$  komponensei különbségeinek a négyzet-összege. Ez pedig a vektorok euklédieszi távolságának a négyzete. Tehát azt a hipotézist (elemi jelet) kell elfogadni, amelynek megfelelő jelvektorhoz a legközelebb van a vett vektor.

Ha a teendők egyszerűsítése érdekében tovább egyszerűsítjük a kapott összefüggést, kifejtve a négyzet-összeget:

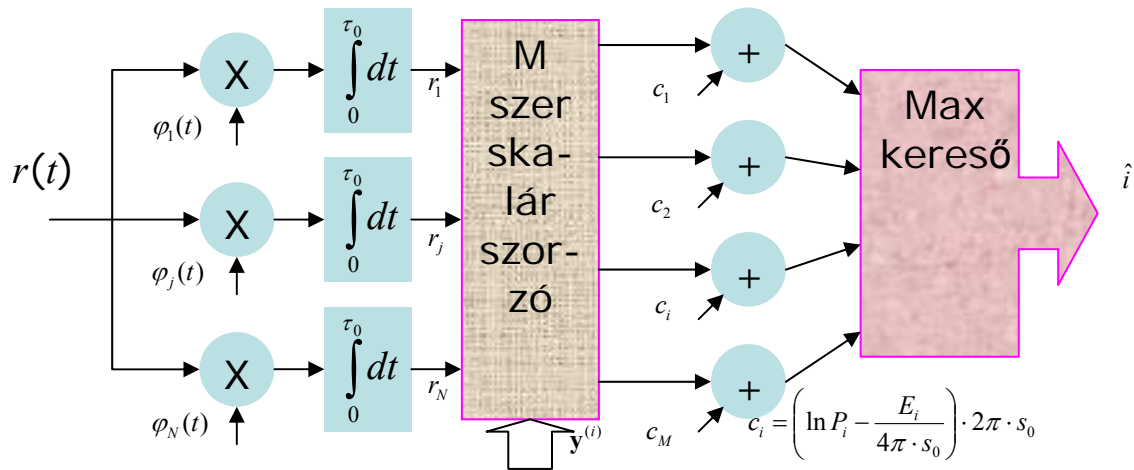
$$\sum_{j=1}^N (\rho_j - y_j^{(i)})^2 = \sum_{j=1}^N (\rho_j^2 - 2\rho_j \cdot y_j^{(i)} + y_j^{(i)2}),$$

akkor észrevehetjük, hogy az első tag  $i$ -től, tehát az elemi jelektől független, a harmadik tag pedig az  $i$ -edik elemi jel energiája. Ezeket figyelembe véve az alábbi kifejezést kapjuk:

$$\hat{i} = \arg \max_i \left\{ \left( \ln P_i - \frac{E_i}{4\pi \cdot s_0} \right) \cdot 2\pi \cdot s_0 + \sum_{j=1}^N \rho_j \cdot y_j^{(i)} \right\}.$$

A kapott összefüggés ugyanazt mondja mint a korábbi, de most ez a követendő tennivalóra utal, míg korábban a döntési tartományokat állapítottuk meg az összes lehetséges párra történő összehasonlítással.

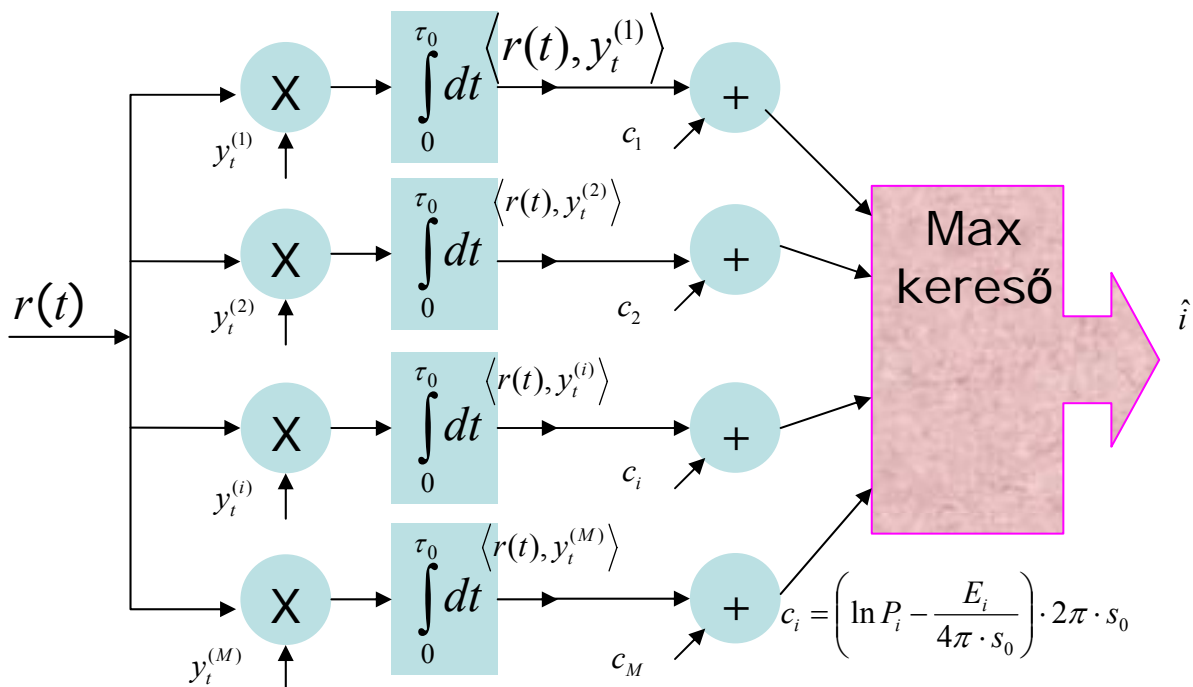
Olvassuk ki a tennivalót! Ki kell számítani a vett jelnek a jeltérbe vetített vektor-komponenseinek és az elemi jelek jeltérbeli vektorkomponenseinek a szorzat-összegét, ehhez hozzá kell adni az a-priori valószínűségtől és az elemi jel energiájától függő korrekciót, és meg kell keresni ezek közül a legnagyobb értékűt. Azt az elemi jelet kell elfogadni, amelyre ez az érték a legnagyobb. Tömbvázlatban is megfogalmazhatjuk az előbb elmondottakat. A csatorna kimenetén észlelhető  $r(t)$  jelből, amely pontosan egy elemi jelnek megfelelő  $\tau_0$  időzítésű, elkészítjük a jeltérbeli leképezést a bázisfüggvényekkel. Elkészítjük a kapott vektornak és az elemi jeleknek a skalár-szorzatait, majd ezekhez hozzáadjuk a konstansokat, és kiválasztjuk közülük a legnagyobbat:



A jeltér persze nem azért jó, hogy több munkánk legyen, hanem a viszonyok és feladatok jobb megértését szolgálja. Ugyanis a fenti feladatokat egy kicsit egyszerűbben is elvégezhetjük, ha „kihagyjuk” a jelteret:

$$\sum_{j=1}^n \rho_j \cdot y_j^{(i)} = \sum_{j=1}^n \int_0^{\tau_0} r(t) \cdot \varphi_j(t) dt \cdot y_j^{(i)} = \int_0^{\tau_0} r(t) \cdot \sum_{j=1}^n y_j^{(i)} \varphi_j(t) dt = \int_0^{\tau_0} r(t) \cdot y_t^{(i)} dt ,$$

tehát ahelyett, hogy a vett jelet és az elemi jeleket rávetítenénk a jeltér bázisára, majd a vetületek vektorkomponenseinek vennénk a skalár-szorzatát, közvetlenül is elkészíthetjük az azzal egyenértékű skalár-szorzatot a vett jel és az elemi jelek között:

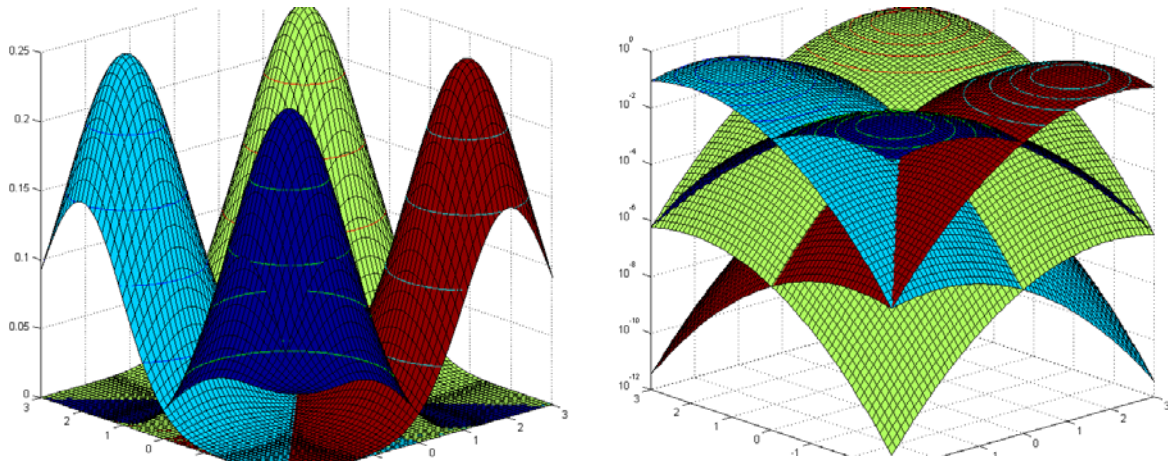


Ennek a résznek a címében jeleztük, hogy a *koherens* optimális vételt határozzuk meg. Egy rövid utalást már tettünk arra nézve, hogy pontosan egy-egy időrésre időzített  $r(t)$  jelszakaszon kell a műveleteket elvégezni. Hely és idő hiányában azonban nem foglalkozunk a vételnél elvégzendő időzítési feladatok elméleti vonatkozásaival, amelyek ugyancsak nagyon fontosak és érdekesek. A következőkben viszont választ keresünk arra, hogy mennyire jó a legjobb döntés, azaz mekkora a tévesztés valószínűsége.



## Az optimális koherens döntés hibavalószínűsége

A döntési tér részhalmazokra osztásához adott illusztrációk már sejteni engedték, hogy nem minden döntésünk lesz hibátlan, mert pozitív a valószínűsége annak, hogy a feltételezettől különböző szimbólum esetén jöjjön létre egy-egy megfigyelt érték. Most még jobban ki akarjuk emelni a tévedések lehetőségét, ezért a korábbi illusztrációt kisebb jel-zaj viszonynál megismételjük, de csak QPSK = 4QAM esetén:



A két ábra a feltételes sűrűségfüggvényeket mutatja a jeltérben, megegyező jelenergiák és a priori valószínűségek mellett. A baloldali ábrán lineáris, a jobboldalin logaritmusos a lépték a függőleges tengelyen. Jól látszik, hogy a negyed térrészekbe, mint optimális döntési tartományokba kölcsönösen átnyúlnak a sűrűségfüggvények. A helyes döntés valószínűségét a megfelelő térrészben a legnagyobb felület alatti térfogat adja, a hibás döntését pedig az alatta lévő felületek által határolt térfogat.

A Bayes típusú feladatoknál a döntés minőségét az átlagos hibavalószínűséggel jellemezzük:

$$P_e = \sum_{i=1}^M P_i \cdot P(\mathbf{p} \notin \tilde{A}_i | y_i^{(i)})$$

azaz az  $i$ -edik elemi jel jutott a csatornába, de a megfigyelt vektor nem esett az  $i$ -edik részhalmazba. Ugyanezt kiszámíthatjuk a következő módon is:

$$P_e = \sum_{i=1}^M P_i \cdot [1 - P(\mathbf{p} \in \tilde{A}_i | y_i^{(i)})].$$

Az alábbiakban bemutatunk néhány olyan esetet, amikor a hibavalószínűséget viszonylag könnyen ki lehet számítani. Sok érdekes esetben azonban csak felső korlátot sikerül adni, amivel itt nem foglalkozunk.

## A BPSK hibavalószínűsége

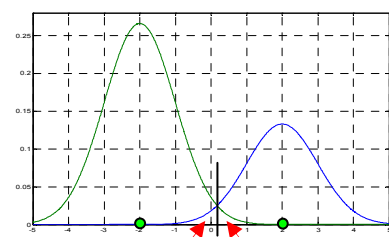
Azt mondhatjuk, hogy ez egy rendkívül egyszerű feladat, mert az egydimenziós jeltérben az additív fehér Gauss zaj egydimenziós valószínűség sűrűségfüggvényével kell számolni:

$$f_v(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{s_0}} e^{-\frac{1}{2 \cdot 2\pi \cdot s_0} x^2}$$

Ezzel a sűrűségfüggvénnyel jellemzett zaj adódik a

jeltérben  $\pm A\sqrt{\frac{\tau_0}{2}}$  nagyságú jelvektorhoz. A

viszonyokat a mellékelt ábrán szemléltetjük. A negatív értékű vektorral képviselt szimbólum a példában  $2/3$  valószínűséggel, míg a másik értelemszerűen  $1/3$ . A



döntési tartományok az egymást keresztező görbéknél feltüntetett függőleges vonaltól balra és jobbra vannak, a döntési hiba pedig a nyílakkal mutatott területekkel arányos. A sűrűségfüggvények szélessége („kövérsége”) a zaj négyzetes várhatóértékétől függ, a közepük pedig a jelenergia négyzetgyökével arányos.

A döntési határt („küszöböt”) a következő egyenlet megoldása adja:

$$P_0 \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{s_0}} e^{-\frac{(x+A\sqrt{\tau_0/2})^2}{2 \cdot 2\pi \cdot s_0}} = P_1 \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{s_0}} e^{-\frac{(x-A\sqrt{\tau_0/2})^2}{2 \cdot 2\pi \cdot s_0}}$$

Egyszerűsítve, rendezve és logaritmust véve:

$$\ln \frac{P_0}{P_1} = \frac{(x + A\sqrt{\tau_0/2})^2}{2 \cdot 2\pi \cdot s_0} - \frac{(x - A\sqrt{\tau_0/2})^2}{2 \cdot 2\pi \cdot s_0}$$

Kicsit rendezve:

$$\ln \frac{P_0}{P_1} = \frac{4 \cdot x \cdot A\sqrt{\tau_0/2}}{2 \cdot 2\pi \cdot s_0}$$

Az eredmény:

$$x = \frac{\pi \cdot s_0}{A\sqrt{\tau_0/2}} \cdot \ln \frac{P_0}{P_1}$$

A hibavalószínűséget a következő integrálok adják:

$$P_e = \frac{P_0}{2\pi\sqrt{s_0}} \cdot \int_{\frac{\pi \cdot s_0}{A\sqrt{\tau_0/2}} \cdot \ln \frac{P_0}{P_1}}^{\infty} e^{-\frac{(x+A\sqrt{\tau_0/2})^2}{2 \cdot 2\pi \cdot s_0}} dx + \frac{P_1}{2\pi\sqrt{s_0}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{\pi \cdot s_0}{A\sqrt{\tau_0/2}} \cdot \ln \frac{P_0}{P_1}} e^{-\frac{(x-A\sqrt{\tau_0/2})^2}{2 \cdot 2\pi \cdot s_0}} dx$$

Az integrálokat úgy kell átalakítani, hogy nulla várhatóértékű és egységnyi szórású Gauss görbék szerepeljenek bennük, mert mint tudjuk az  $\exp(-x^2)$  alakú függvények nem deriváltjai semmilyen függvénynek, de kidolgoztak igen gyors és pontos numerikus módszereket az ún. standard hibaintegrálra:

$$Q(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(-x),$$

itt  $Q(x)$  az egyik gyakran használt hibafüggvény, míg  $\Phi(x)$  a standard normális eloszlásfüggvény. A másik gyakran –és általunk is –használt hibafüggvény az alábbi:

$$\text{erfc}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

A  $Q(x)$ -el való kapcsolata a következő:

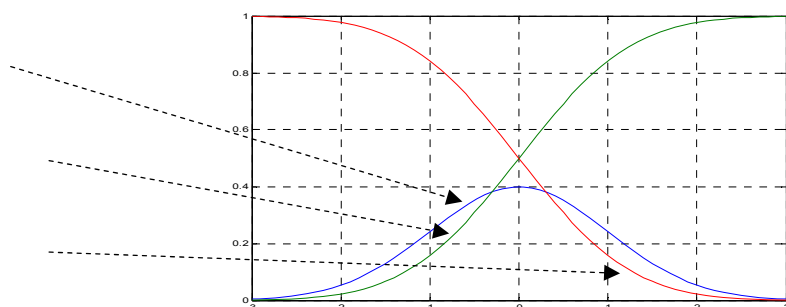
$$Q(x) = \frac{1}{2} \text{erfc}(x/\sqrt{2}), \text{ mivel } \text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-z^2} dz \stackrel{z=y/\sqrt{2}}{\equiv} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{x/\sqrt{2}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

A fenti függvényeket a mellékelt ábra illusztrálja.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \text{erfc}(x/\sqrt{2})$$



Térjünk vissza a BPSK hibavalószínűségéhez! Az első integrálban az alábbi helyettesítéssel:

$$z = \frac{x + A\sqrt{\tau_0}/2}{\sqrt{2 \cdot 2\pi \cdot s_0}} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2\pi \cdot s_0}}, \text{ és az alsó határ } \frac{\frac{\pi \cdot s_0}{A\sqrt{\tau_0}/2} \cdot \ln \frac{P_0}{P_1} + A\sqrt{\tau_0}/2}{\sqrt{2 \cdot 2\pi \cdot s_0}}$$

felismerjük:

$$\frac{P_0}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\frac{\pi \cdot s_0}{A\sqrt{\tau_0}/2} \cdot \ln \frac{P_0}{P_1} + A\sqrt{\tau_0}/2}{\sqrt{2 \cdot 2\pi \cdot s_0}}\right)$$

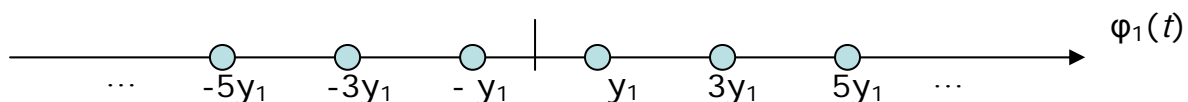
Hasonlóan járhatunk el a második integrállal is, de nem folytatjuk, mert általában csak a megegyező a-priori valószínűségek esetén szokták a megoldást vizsgálni. Ennek az a magyarázata, hogy a forráskódolással általában erre, vagy ennek jó megközelítésére törekszünk, hiszen ekkor fognak az egyes bináris szimbólumok közel egy-egy bit információt továbbítani.

Így  $P_0 = P_1 = 1/2$  esetén a két integrál értéke megegyezik, a döntési küszöb nulla lesz, és könnyen ellenőrizhetően az alábbi eredményt kapjuk a hibavalószínűsége:

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2\pi\sqrt{s_0}} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{(x+A\sqrt{\tau_0}/2)^2}{2 \cdot 2\pi \cdot s_0}} dx = \frac{2\sqrt{\pi \cdot s_0}}{2\pi\sqrt{s_0}} \cdot \int_{\frac{A\sqrt{\tau_0}/2}{\sqrt{2 \cdot 2\pi \cdot s_0}}}^\infty e^{-z^2} dz = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{A\sqrt{\tau_0}/2}{\sqrt{2 \cdot 2\pi \cdot s_0}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{4\pi \cdot s_0}}\right) \end{aligned}$$

## A QPSK és a QAM hibavalószínűsége

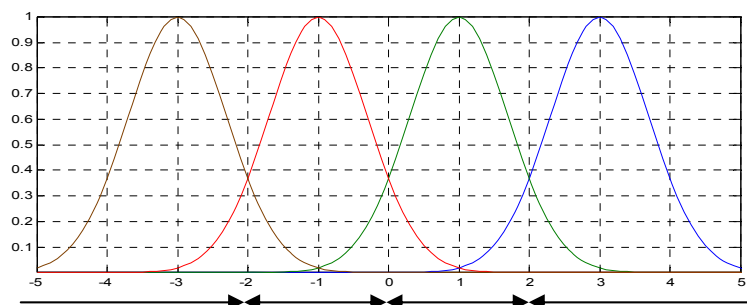
Additív fehér Gauss zaj esetén viszonylag egyszerű módon kaphatunk egzakt eredményt a QPSK és azon xQAM esetekre, amelyeknél  $x=2^{2k}$ . Tehát pl 4QAM, 16QAM, stb. Ez abból következik, hogy ekkor a moduláció úgy viselkedik, mint két független többállapotú PAM. A többszintű PAM-et szomszédoként azonos távolságú elemi jelekkel hozzuk létre:



A kvadratúra moduláció pedig egy erre „merőleges” többszintű PAM hozzáadásával jön létre. A *moduláció* részben ezt korábban részleteztük.

Első lépésben határozzuk meg egy többszintű ( $M$ -áris) PAM-re a hibavalószínűséget! A viszonyok szemléltetésére nézzük a mellékelt ábrát:

Itt példaként egy négyszintű PAM esetén  $(-3, -1, 1, 3)$  az additív zaj valószínűség sűrűségfüggvényei láthatók, megegyező a-priori valószínűségek esetén. Az ábra alján bejelöltük az optimális döntési tartományokat. Ebből az látszik, hogy vannak „belső” jelek, amelyek kétoldalról zavarnak, a



szomszédok és vannak „szélső” jelek, amelyeket csak az egyik oldalról zavarnak a szomszédok. Belső jeleknél hiba keletkezik mindkét irányban, szélső jeleknél csak az egyik irányban, valamint a két szélső jel egy belső jellel „ér fel”. Ennek következtében azonos a priori valószínűségek, és azonos jeltávolságok esetén:

$$P_e = \frac{M-1}{M} \cdot \Pr(|z_{aj}| > a \text{ jeltávolságok felénél})$$

a jobboldali szorzótényezőt az ábra megmagyarázza, mivel jól látszik, hogy a szomszédos jeltávolságok felénél nagyobb zaj téves döntést eredményez. A baloldali tényező pedig a két szélső jel 1-el csökkentő hatását képviseli, mivel ezek csak „befelé” okoznak hibát, tehát ketten csak egy belső jellel érnek fel, így az átlagos hiba  $(M-1)/M$  arányban csökken.

A jeltávolságok fele:

$$A \cdot \sqrt{\frac{\tau_0}{2}},$$

az additív fehér Gauss zaj  $N$  dimenziós együttes valószínűség sűrűségfüggvénye:

$$f_v(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{s_0})^N} \cdot e^{-\frac{1}{4\pi \cdot s_0} \sum_{j=1}^N x_j^2}$$

Ezzel a hibaválósínúség:

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{M-1}{M} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{s_0}} \int_{A\sqrt{\frac{\tau_0}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4\pi \cdot s_0}} dx \stackrel{u=\frac{x}{\sqrt{4\pi \cdot s_0}}}{=} \frac{M-1}{M} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{4\pi \cdot s_0}}{2\pi\sqrt{s_0}} \int_{\frac{\sqrt{A^2 \tau_0}}{\sqrt{2 \cdot 4\pi \cdot s_0}}}^{\infty} e^{-u^2} du = \\ &= \frac{M-1}{M} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{A^2 \tau_0}}{\sqrt{2 \cdot 4\pi \cdot s_0}}}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{M-1}{M} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2 \tau_0}{2 \cdot 4\pi \cdot s_0}}\right) \end{aligned}$$

A kapott eredményben a legkisebb jel energiája ( $A^2 \tau_0 / 2$ ) szerepel, mert értelemszerűen ez határozza meg a szomszédok közötti távolságokat, ami a tévesztések alapját képezi. (Csak zárójelben:  $M=2$  esetén ez ugyanaz, mint a BPSK.) Ugyanakkor a kapott kifejezés félrevezető a ténylegesen szükséges jelenergiákat tekintve. Annak érdekében, hogy a különböző modulációs eljárásokat összehasonlíthassuk, az átlagos jelenergiával szokták megadni az összefüggést. A második jel 3-szor akkora, a harmadik pedig ötször, stb. A páratlan számok négyzetének átlagát kell kiszámítani. Ahhoz, hogy a szomszéd jelek közötti „távolságok” megegyezzenek a legkisebb (antipodális) jelek közötti távolsággal, egyre nagyobb energiájú jeleket kell használni.

Az  $M$ -áris PAM átlagos jelenergiája:

$$\begin{aligned} E_{\text{át}}^{(M)} &= \frac{A^2 \tau_0}{2} \cdot \frac{2}{M} \sum_{m=1}^{M/2} (2m-1)^2 = \frac{A^2 \tau_0}{M} \sum_{m=1}^{M/2} (4m^2 - 4m + 1) = \\ &= \frac{A^2 \tau_0}{M} \left[ \frac{4}{6} \cdot \frac{M}{2} \left( \frac{M}{2} + 1 \right) (M+1) - \frac{4}{2} \cdot \frac{M}{2} \left( \frac{M}{2} + 1 \right) + \frac{M}{2} \right] = \frac{M^2 - 1}{3} \cdot \frac{A^2 \tau_0}{2} \end{aligned}$$

Így az átlagos hibaválósínúség:

$$P_e = \frac{M-1}{M} \cdot \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{3}{M^2 - 1} \cdot \frac{E_{\text{át}}^{(M)}}{4\pi \cdot s_0}}\right)$$

Most térjünk rá a kvadratúra modulációra! Miként ennek a pontnak az első bekezdésében leszögeztük, egy QAM jel detektálásánál a szinuszos és koszinuszos vivők szétválaszthatók, és amplitúdóik egymástól függetlenül eldönthetők. Így a QAM-ben hibátlan döntéshez az kell,

hogy hibátlanul döntsünk a két PAM-ben. Amennyiben  $M$  szintűek a PAM összetevők, akkor a QAM  $M^2$  szintű lesz, és a helyes (correct) döntés valószínűsége a következő lesz:

$$P_c^{(M^2)} = (1 - P_e^{(M)})^2 = \left[ 1 - \frac{M-1}{M} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{3}{M^2-1}} \cdot \frac{E_{\text{át}}^{(M)}}{4\pi \cdot s_0} \right) \right]^2$$

A hibás döntés valószínűsége pedig:

$$P_e^{(M^2)} = 1 - (1 - P_e^{(M)})^2 = 1 - \left[ 1 - \frac{M-1}{M} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{3}{M^2-1}} \cdot \frac{E_{\text{át}}^{(M)}}{4\pi \cdot s_0} \right) \right]^2$$

A többállapotú modulációs módszerek egymásközi és binárisal történő összehasonlításánál figyelemmel kell lenni arra, hogy az időrésben különböző számú bináris szimbólum kerül továbbításra, és ezért a jel-zaj viszonyt a bitre vonatkozóan szokták megadni. A négyállapotú 2 bitet, míg a 16 állapotú 4 bitet továbbít időrésenként, tehát feleannyi, illetve negyedannyi energia jut esetükben a „bitidőre”, mint egy bináris modulációnál. Végül még azt kell figyelembe venni, hogy a QAM átlagos jelenergiája kétszerese a megfelelő PAM jelenergiájának, mivel mindkét vivő (szinusz és koszinusz) megegyező teljesítményt képvisel. Például a négyállapotú QAM hibavalószínűsége:

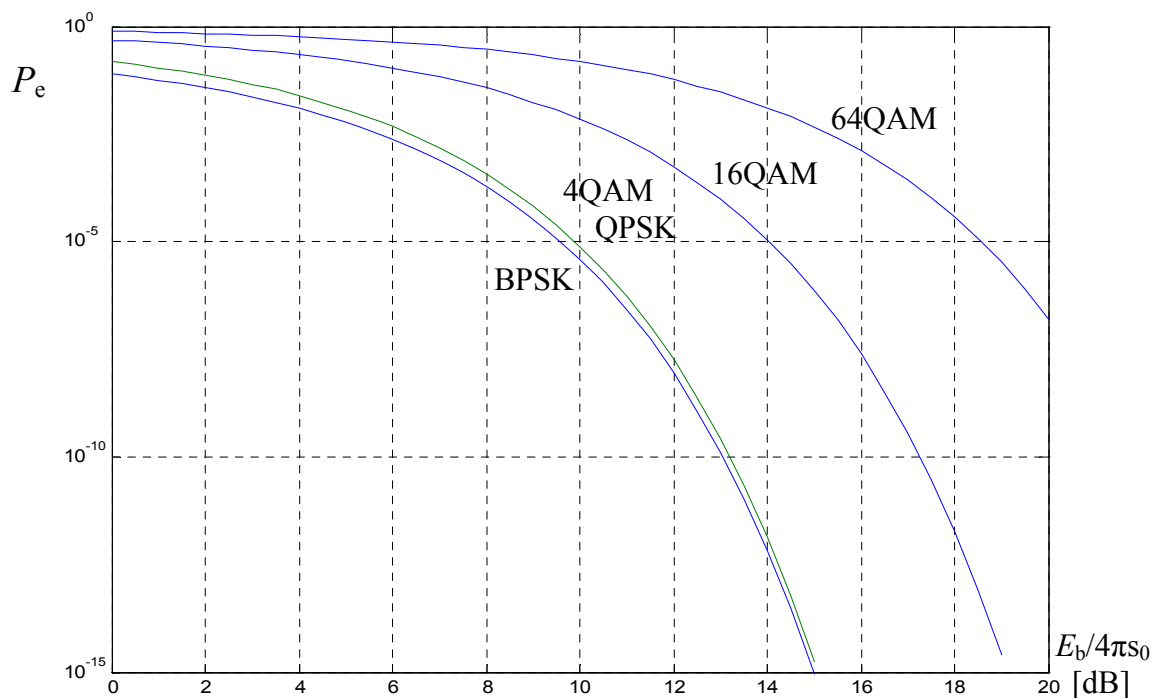
$$P_e^{(2^2)} = 1 - \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_{\text{át}}^{(2)}}{4\pi \cdot s_0}} \right) \right]^2 = 1 - \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_{\text{át}}^{(2^2)}/2}{4\pi \cdot s_0}} \right) \right]^2 = 1 - \left[ 1 - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{4\pi \cdot s_0}} \right) \right]^2$$

A 16 állapotú QAM esetén a következő eredményre jutunk:

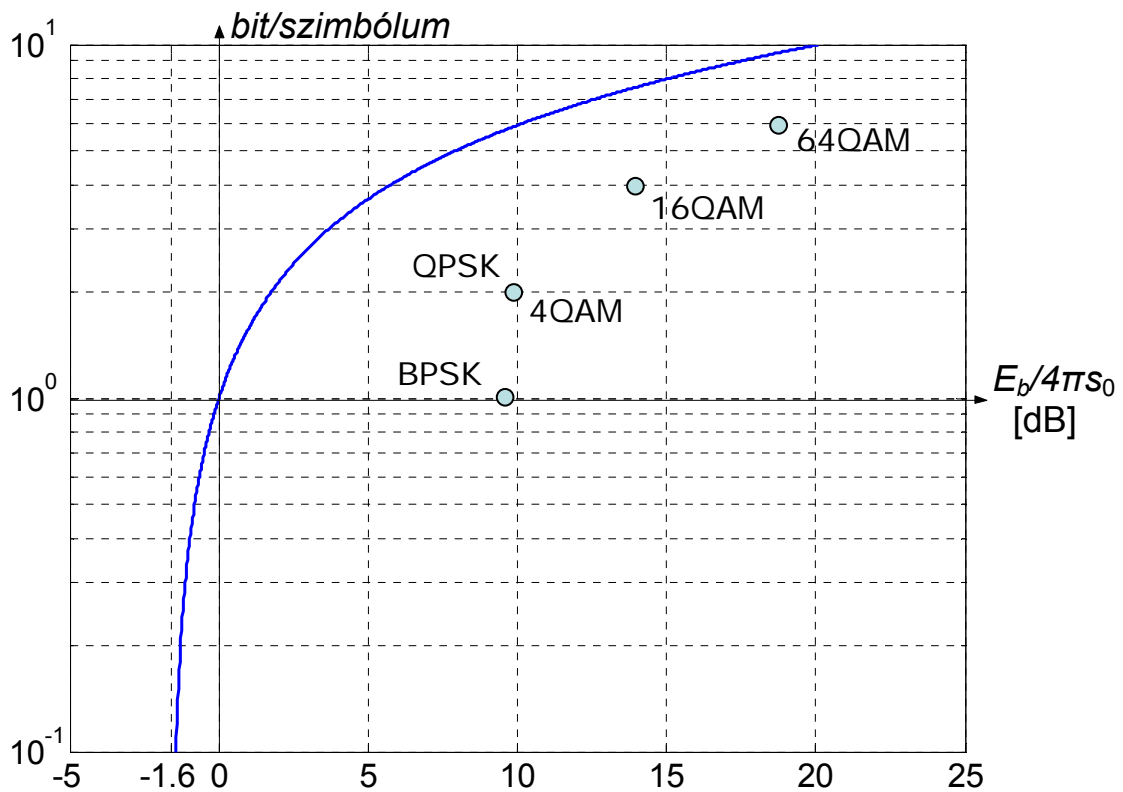
$$P_e^{(4^2)} = 1 - \left[ 1 - \frac{3}{4} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \frac{E_{\text{át}}^{(4)}}{4\pi \cdot s_0} \right) \right]^2 = 1 - \left[ 1 - \frac{3}{4} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \frac{E_b}{4\pi \cdot s_0} \right) \right]^2$$

Megmutatjuk még a 64 állapotú QAM hibavalószínűségét is:

$$P_e^{(8^2)} = 1 - \left[ 1 - \frac{8-1}{8} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{3}{8^2-1}} \cdot \frac{E_{\text{át}}^{(8)}}{4\pi \cdot s_0} \right) \right]^2 = 1 - \left[ 1 - \frac{7}{8} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{9}{63}} \cdot \frac{E_b}{4\pi \cdot s_0} \right) \right]^2$$



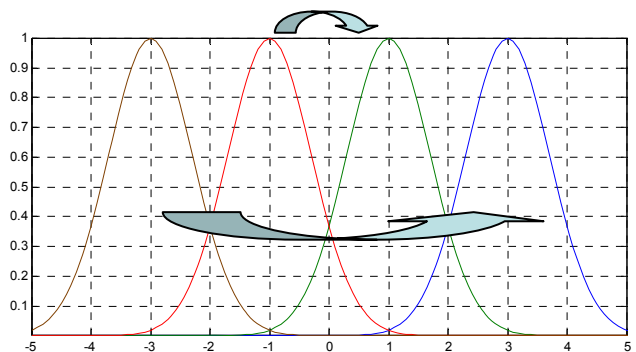
A hibavalószínűség diagramjának a vízszintes tengelyén  $E_b/4\pi s_0$  szerepel decibelben. A jeltérbe vetített fehér gaussi zaj négyzetes várhatóértékére  $2\pi s_0$ -t kaptunk, de ennek dupláját szokták viszonyításként használni. Erre magyarázat lehet, hogy a  $2\pi s_0$  érték az additív zaj kétoldalas spektrális sűrűsége Hz-ben mért frekvencia esetén. A valóságos (fizikai) frekvenciatengelyen ennek duplája a Hz-enkénti zajenergia. A kapott eredményeket viszonyíthatjuk az elvi lehetőségekhez:



A korábban megismert ábrában helyezzük el a megismert eredményeket! Persze ide hibátlanul továbbított információt kellene írni, mi viszont megelégszünk kis hibával, legyen például  $10^{-5}$  a hibavalószínűség.

### Szimbólumtévésztes vs bittévésztes

Az  $M$  állapotú modulációnál egy-egy szimbólumnak a döntésnél bekövetkező eltévésztesége legkevesebb 1, de maximum  $M$  bináris összetevő (bit) eltévésztesését eredményezheti. Amennyiben esetleg ki akarjuk javítani a tévedést, és tudjuk, illetve látjuk, hogy ezt tesszük, akkor nagyon célszerű a szimbólumtévésztes úgy befolyásolni, hogy a lehető legkevesebb bittévésztes járjon együtt. Ezt valósítja meg az ún. Gray kód, amit egy ábrával szemléltetünk. Az egymáshoz „közelebbi” szimbólumok kevés



bitben, a „távolabbiak” több bitben különböznek egymástól. Így a valószínűbb, tehát gyakrabban előforduló szimbólumtévesztések kevés, gyakran csak egy bithibát okoznak.

## Megjegyzések

*Szinkronizálás, a vett jelből szükséges időzítések kinyerésének elvi lehetőségei, illetve optimális módszerei nem kerülnek tárgyalásra idő hiányában.*

*Differenciális moduláció: az előbbieket vonatkozásában az egyik elvi korlátot jelenti az abszolút fázis meghatározásában lévő bizonytalanság. Ennek feloldására vagy egy meghatározott sorozattal történő „tanulás” utáni kezdést használják, vagy az ún. differenciális modulációt. A differenciális moduláció esetén az információt nem az abszolút fázis, hanem a szimbólumok közötti fázisváltozás hordozza, ezáltal az említett becslési probléma érdektelenné válik, viszont az elérhető szimbólumtévesztés alatta marad a megismert módszereknek.*

A különböző modulációs módszerek hibavalószínűség szerinti összehasonlításánál a bitenként továbbításra használt energiát tekintettük azonosnak. Ezt egy természetes összehasonlítási alapnak tekinthetjük, mert a továbbítandó bitre fordított átlagteljesítményt és az időt is figyelembe veszi. Érdeemes megvizsgálni, hogy milyen a jeltérbeli elhelyezkedése az összehasonlított modulációs módszerekre vonatkozó jelkomponenseknek, amennyiben azonos bitenergiát hoznak létre.

Korábban kiszámítottuk az átlagos energiát a négyzetes jelrendezésekre:

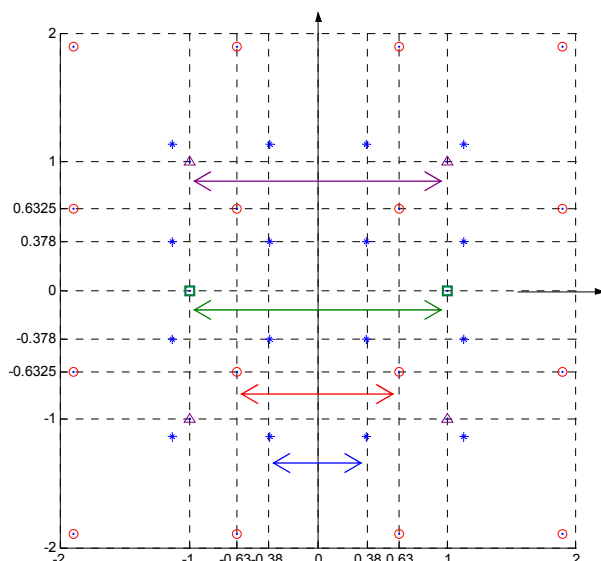
$$E_{\text{át}}^{(M^2)} = 2 \cdot \frac{M^2 - 1}{3} \cdot \frac{A^2 \tau_0}{2},$$

ami azt jelenti, hogy azonos átlagos energiához az  $\frac{A^2 \tau_0}{2}$  szorzótényezőjének arányában kell csökkenteni az energiát, de ezt még osztani kell a továbbított bitek számával, majd a jeltérbeli komponensek ennek négyzetgyökével csökkentendők. Az alábbi táblázatban foglaltuk össze az eredményeket:

	QPSK	16QAM	64QAM	256QAM
$M$	2	4	8	16
$2 \cdot (M^2 - 1) / 3$	2	10	42	170
bitszám	2	4	6	8
$\sqrt{\frac{\text{bitszám}}{2 \cdot (M^2 - 1) / 3}}$	1	$\sqrt{\frac{4}{10}}$	$\sqrt{\frac{1}{7}}$	$\sqrt{\frac{4}{85}}$

A mellékelt ábrán láthatók a jeltérbeli vektorok a BPSK ( $\square$ ), 4QAM=QPSK ( $\triangle$ ), 16QAM ( $\circ$ ) és 64QAM ( $*$ ) esetére. A 64QAM-RE CSAK A BELSŐ 16 ÁLLAPOTOT TŰNTETTÜK FEL! A KÉT KÜLSŐ GYŰRŰT AZ ÁTTEKINTHETŐSÉG ÉRDEKÉBEN ELHAGYTUK!

Az ábrából megállapíthatjuk a jeleknek a jeltérbeli euklideszi



távolságait. Az egység  $\frac{A^2 \tau_0}{2}$ , amelynek szorzótényezői az egyes esetekre a következők:

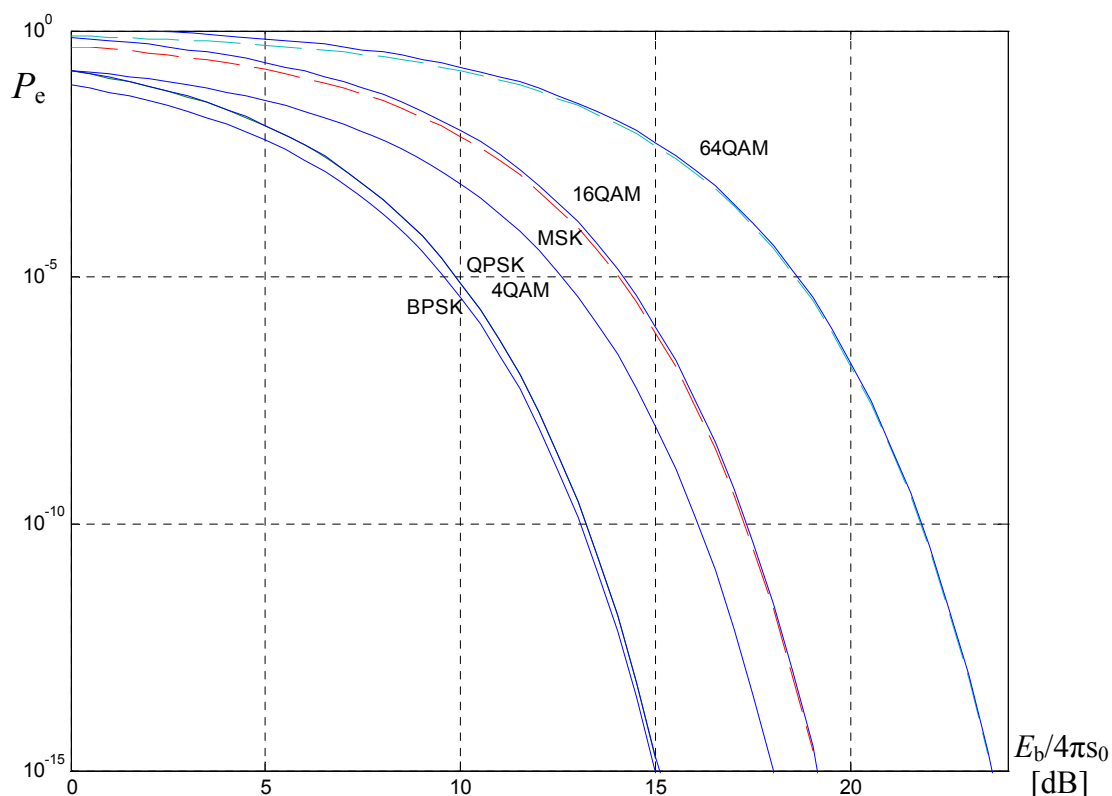
	BPSK	QPSK	16QAM	64QAM
$d_{min}$	2	2	$2\sqrt{0,4}$	$2\sqrt{1/7}$

Ha ezeket a szomszédos jeltávolságokat behelyettesítjük az alábbi összefüggésbe:

$$(\text{effektív szomszédszám}) \cdot 0,5 \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{d_{min} / 2}{\sqrt{4\pi \cdot s_0}} \right),$$

akkor nagyon jó felső becslést kapunk a hibavalószínűségekre. Magyarázatra már csak az *effektív szomszédszám* szorul, amely úgy állapítható meg, hogy összeszámoljuk a jeltérben (lehetőleg a belsejében) egy-egy jelpont körül azokat a szomszédokat, amelyek döntően előidéznek a téves döntést a közelségükkel. Meghatározni nehezebb, mint megállapítani, hogy a BPSK esetén nyilván csak 1 szomszéd van, QPSK-nál kettő (a távolabbi már nem „hatékony”), a többi QAM-nél pedig 4 szomszéd veszi körbe az egyes jelpontokat.

Az alábbi ábrán egyrészt megismételtük a hibavalószínűségekre korábban számított görbéket, másrészt pedig feltüntettük az előbbi közelítéseket, kivéve a BPSK esetét, mert arra nézve a fenti kifejezés nem közelítés, hanem megegyezik a pontos értékkel:



A szaggatott vonalak mutatják a pontos értékeket, míg a folytonos (sötétkék) vonalak a felső becslések. A QPSK esetén a felső becslés elfedi a pontos értéket, míg a többpontos QAM-eknél  $10^{-5}$  hibavalószínűség alatt nem lehet megkülönböztetni őket.

Sőt kihasználva a jeltérnek ezt a most megismert képességét, feltüntettük az ortogonális FSK, illetve azon belül az MSK hibavalószínűségét is:



$$P_e^{(MSK)} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b/2}{4\pi \cdot s_0}} \right),$$

ami 3 dB-el rosszabb, mint a PSK.

Mindez persze nem a véletlen műve, kimutatható, hogy a jeltérbeli euklédieszi távolságok, a zaj spektrális sűrűségével együtt, meghatározzák a *páronkénti* hibavalószínűséget. Az átlagos hibavalószínűségre jó (szoros) felső korlátot kaphatunk a páronkénti hibavalószínűségek egyesítésével. Ekkor persze lesznek többszörösen tekintetbe vett hibaösszetevők, amelyek miatt a becsült érték felette lesz az igazinak, de a korlátot szorossá lehet tenni, ha csak a legközelebbi szomszédokat vesszük figyelembe.