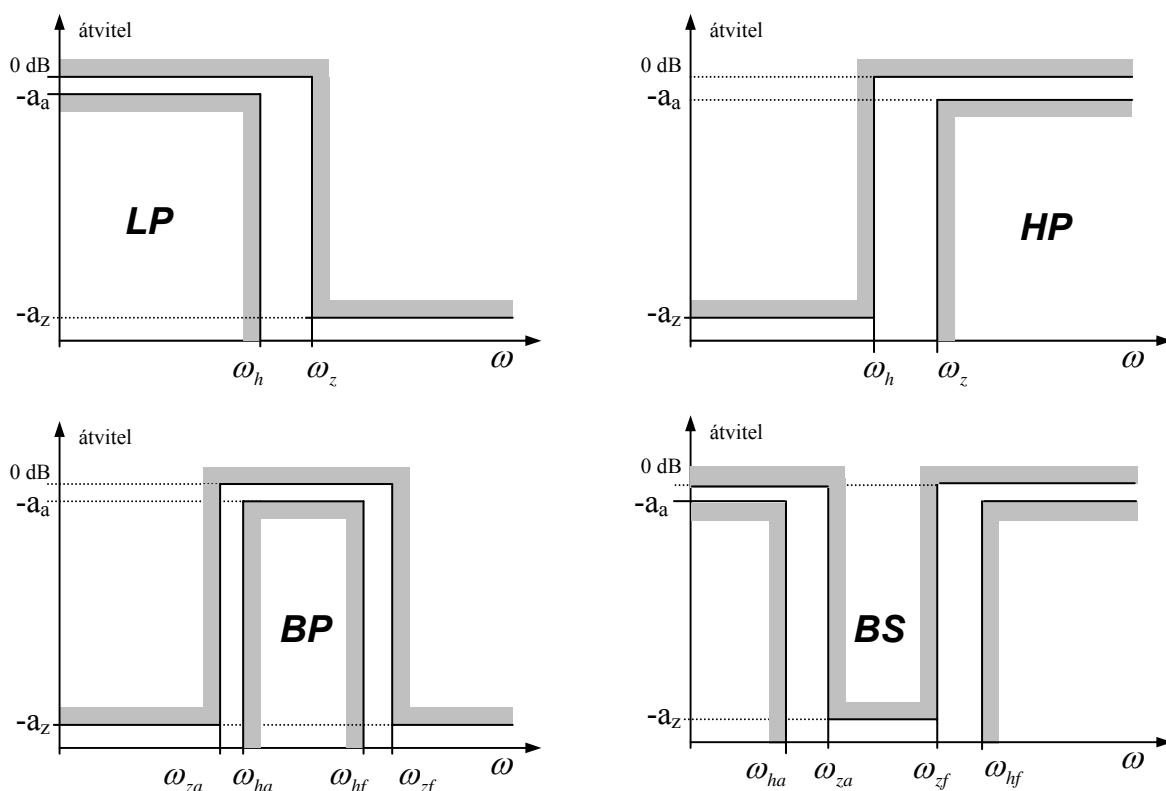


1. Frekvenciaszűrők tervezése

Tágabb értelemben a diszkrét idejű, lineáris, időinvariáns hálózatokat digitális szűrőknek nevezik. A frekvencia-szűrő elnevezés arra utal, hogy a szűrővel a jel spektrumát kívánjuk módosítani oly módon, hogy a jel bizonyos frekvencia sávba eső komponenseit átengedjük (áteresztő sáv), más tartományokba esőket viszont elnyomjuk (záró sáv).

Az áteresztő sáv elhelyezkedésétől függően beszélhetünk aluláteresztő (Low-Pass), feluláteresztő (High-Pass), sáváteresztő (Band-Pass) és sávzáró (Band-Stop) szűrőkről.



1.1.ábra Az amplitúdó követelmény megadása tolerancia-séma segítségével

Az áteresztő sávban elhelyezkedő jelkomponensek tozításmentes átvitelének feltétele az, hogy az áteresztő sávban:

- az amplitúdó karakterisztika konstans,
- a fázis karakterisztika lineáris (a csoport futási idő konstans)

legyen.

Az egyes sávokban a konstans amplitúdó karakterisztika (tipikusan az 1 és a 0) azonban egzaktul nem valósítható meg, csak kisebb-nagyobb ingadozással közelíteni tudjuk az előírt értéket. A közelítés pontosságát a toleranciák jelölik ki, a megengedett ingadozás értéke az áteresztő sávban a_a , a zárótartományban a_z . (Például $a_a = 0.1$ dB, $a_z = 60$ dB.)

Az egzakt lineáris fázis -mint látni fogjuk- csak a FIR szűrőkkel valósítható meg. Az IIR szűrők tervezésekor az amplitúdó és a fázis karakterisztika együttes kielégítése meglehetősen összetett feladat, ezért a szokásos megoldás az, hogy a szűrővel csak az amplitúdó követelményt elégítjük ki minimál-fázisú szűrővel. Ha az így kapott szűrő fázistorzitása megengedhetetlenül nagy, akkor a szűrő után kapcsolt mindent-áteresztő hálózattal korrigáljuk az eredő átvitelt (futási idő korrektor).

Az amplitúdó karakterisztikára vonatkozó paraméterek:

- Határ frekvencia (áteresztő tartomány széle(i))
- Záró tartomány(ok) széle(i)
- Áteresztő sávi ingadozás
- Záró sávi csillapítás(ok)
- Átmeneti sáv(ok) (az áteresztő és a záró sáv közötti tartomány)

A szűrők tervezése során vizsgálni fogjuk:

- A megengedett függvények
- Az approximáció
- A realizálás

kérdéseit.

1.1. A megengedett függvények

IIR szűrők (ARMA hálózatok):

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}} = a_0 \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} \quad (1.1.)$$

Az $A(z)$ és $B(z)$ polinomok együtthatói valósak, így a z_i zérusok és a p_k pólusok valósak vagy konjugált komplexek.

A stabilitási követelményből adódóan a pólusok szigorúan csak az egységkörön belül helyezkedhetnek el. Az átviteli zérusokra megkötés elvileg nincs, de a zárótartomány gazdaságos közelítése miatt, azokat célszerű az egységkörre helyezni. Ha ettől valamilyen oknál fogva eltérnénk, a hálózat akkor lesz minimál-fázisú, ha a zérus az egységkörön belül van.

FIR szűrők (MA hálózatok):

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_M z^{-M} = h_0 \prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1}) \quad (1.2.)$$

A $H(z)$ polinom együtthatói valósak, így a szűrő z_i zérusai valósak vagy konjugált komplexek.

A pólusok strukturális okból mind az origóban vannak. Lineáris fázis esetén, az egységkörön kívül is és belül is lesznek zérusok.

1.2. Az approximáció

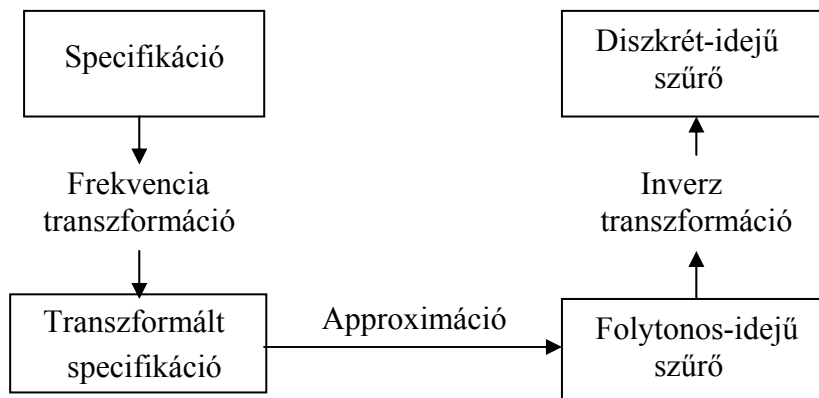
Az approximációs feladatban a kérdés:

Milyen $M, N, a_0, a_1, \dots, a_M, b_1, \dots, b_N$ illetve
 milyen M, h_0, h_1, \dots, h_M értékek esetén elégíti ki
 $|H(e^{j\omega T})|$ a specifikációt?

Az IIR és a FIR szűrők módszerei lényegesen különböznek egymástól, ezért külön fogjuk tárgyalni azokat.

Az IIR szűrők tervezését folytonos idejű szűrők tervezésére vezetjük vissza. A folytonos-idejű szűrők megengedett függvényei egyszerűbbek, másrészt a módszerek már kidolgozottak (katalógusok állnak rendelkezésre). Megfelelő transzformációkkal a

folytonos idejű szűrő átviteli függvénye, impulzus-válasza, -vagy akár maga az analóg hálózat- a specifikációt kielégítő diszkrét-idejű szűrőbe transzformálható. Ezért foglalkozni fogunk ezen transzformációkkal és a folytonos-idejű szűrők approximációs eljárásainak némelyikével.



1.2. ábra Az IIR szűrők tervezésének folyamata

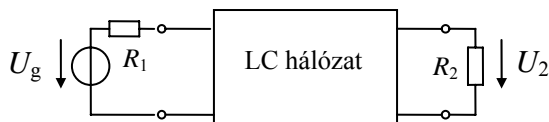
A FIR szűrők esetén a fenti módszer nem követhető. A folytonos idejű szűrők végtelen időtartamú impulzus válasza elvileg nem teszi lehetővé a véges impulzus válaszu FIR szűrővel való ekvivalenciát. A FIR szűrők tervezésével ezért külön fejezetben fogunk foglalkozni.

1.3. A realizálás

IIR szűrők esetében a $H(z)$ transzfer függvény ismeretében számos, elvileg ekvivalens hálózat határozható meg: direkt struktúrák, kaszkád, párhuzamos, stb.... A különböző struktúrák közötti ekvivalencia azonban csak elvi jellegű. A jelfeldolgozó processzorok véges szóhosszúságából adódó másodlagos effektusok: a szűrő együtthatóinak érzékenysége, a kivezérelhetőség (túlsordulás) és az aritmetikai zaj miatt, a különböző struktúrák nem ekvivalensek. A kérdés összetettsége miatt a realizálás fenti aspektusaival külön fejezetekben foglalkozunk.

1.4. Folytonos idejű szűrők

Folytonos idejű szűrőn rezisztív (üzemi) lezárások között működő passzív, reaktáns (LC) hálózatot értünk:



1.3. ábra Üzemi paraméteres lezárások között működő folytonos idejű szűrő

A megengedett függvényt erre a hálózat típusra fogjuk meghatározni.

A harmonikus jelet előállító generátorból a kivehető maximális teljesítmény:

$$P_0 = \frac{|U_g|^2}{4R_1} \quad (1.3.)$$

A lezárásra jutó teljesítmény:

$$P_2 = \frac{|U_2|^2}{R_2} \quad (1.4.)$$

E két teljesítmény hányadosa:

$$|\Gamma|^2 = \frac{P_0}{P_2} = \frac{|U_g|^2}{|U_2|^2} \frac{R_2}{4R_1} \geq 1 \quad (1.5.)$$

Ennek alapján az **átviteli tényező** általánosított definíciója:

$$\Gamma(s) = \frac{1}{2} \frac{U_g(s)}{U_2(s)} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \frac{H(s)}{N(s)} \quad (1.6.)$$

Az átviteli tényező bemenet/kimenet típusú (csillapítás) függvény, melynek főbb tulajdonságai a következők:

1. $|\Gamma(j\Omega)| \geq 1$ Mivel $P_0 \geq P_2$.
2. $\Gamma(s)$: Racionális törtfüggvény (két polinom: $H(s)$ és $N(s)$ hányadosa)
3. $H(s)$: Hurwitz polinom.
A stabilitás biztosítása érdekében gyökei szigorúan csak a bal félsíkon lehetnek.
4. $N(s)$: Nincs rá fizikai megkötés.
Gyökei a záró tartomány hatékony kialakítása érdekében tipikusan a képzetes tengelyen helyezkednek el.

Az abszolút érték függvényt a képzetes (a $j\Omega$) tengely mentén, az alábbi módon számíthatjuk ki:

$$|\Gamma(j\Omega)|^2 = \Gamma(s)\Gamma(-s)|_{s=j\Omega} = \frac{H(s)}{N(s)} \frac{H(-s)}{N(-s)} \bigg|_{s=j\Omega} \geq 1 \quad (1.7.)$$

mivel:

$$\Gamma^*(j\Omega) = \Gamma(-j\Omega) \quad (1.8.)$$

Az approximációs eljárás fő nehézsége az 1. és a 3. tulajdonság együttes kielégítése. Ennek megkönnyítése érdekében vezessük be a $h(s)/N(s)$ alakú, ún. karakterisztikus függvényt a következő módon:

$$\Gamma(s)\Gamma(-s) = 1 + \frac{h(s)}{N(s)} \frac{h(-s)}{N(-s)} \quad (1.9.)$$

Mivel:

$$\frac{h(s)}{N(s)} \frac{h(-s)}{N(-s)} \bigg|_{s=j\Omega} = \frac{|h(j\Omega)|^2}{|N(j\Omega)|^2} \geq 0 \quad (1.10.)$$

az (1.9.) szerinti választással az 1. tulajdonság automatikusan kielégül. A racionális tört alakú karakterisztikus függvényt (amelyre nézve már nincs a Hurwitz megkötés) válasszuk meg olyannak, hogy elégítse ki a specifikációt. Ennek módszereit később fogjuk látni.

Az (1.9.)-et közös nevezőre hozva írhatjuk:

$$\Gamma(s)\Gamma(-s) = 1 + \frac{h(s)}{N(s)} \frac{h(-s)}{N(-s)} = \frac{N(s)N(-s) + h(s)h(-s)}{N(s)N(-s)} = \frac{H(s)H(-s)}{N(s)N(-s)} \quad (1.11.)$$

$$A \quad H(s)H(-s) = N(s)N(-s) + h(s)h(-s) = 0 \quad (1.12.)$$

2n-ed fokú egyenletet megoldva, a bal félsíkra eső s_k gyökökből ($k=1,2,\dots,n$) felépíthetjük a $H(s)$ Hurwitz polinomot, kielégítve a 3. feltételt:

$$H(s) = c_n \prod_{k=1}^n (s - s_k) \quad (1.13.)$$

ahol c_n az (1.12.) egyenlet legmagasabb hatványához tartozó együttható négyzetgyöke.

A gyökök szétválasztásának fenti módszerét hívjuk szeparációnak.

1.5. LP-HP, LP-BP, LP-BS transzformációk

A szűrő katalógusok nagyon sokféle, különböző specifikációhoz tartozó szűrők adatait tartalmazzák. Az átviteli függvény adatain kívül, kiolvashatóak belőlük az LC hálózat elemértékei is (a realizált analóg hálózat). A katalógusokban csak alul-áteresztő szűrőket találunk, melyek határfrekvenciája mindig az egység (az „1” szám).

Valóságos (fizikai frekvencia előírással bíró) alul-áteresztő, felül-áteresztő, sáváteresztő és sávzáró szűrőket a katalógus használatával úgy tudunk tervezni, hogy a specifikációnkat transzformáljuk a normalizált frekvencia értékekre, majd katalógusban kikeressük a megfelelő szűrőt. A katalógusból kiolvasott függvényt ezek után vissza kell transzformálnunk, hogy az eredeti specifikációnak eleget tevő szűrőt kapjuk meg. Az alábbiakban ezeket a lépéseket fogjuk tárgyalni.

Aluláteresztő szűrő:

$$\text{Ebben az esetben a:} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_h} \quad (1.14.)$$

transzformációt használjuk. A záró tartomány kezdete relatív egységekben így:

$$\Omega_z = \frac{\omega_z}{\omega_h} > 1 \quad (1.15.)$$

Az áteresztő sávi tolerancia, Ω_z és a záró tartományban előírt minimális csillapítás alapján megkeressük a katalógusban a megfelelő szűrőt és kiolvasuk az átviteli tényező paramétereit.

$$\text{Pld:} \quad \Gamma_{kat}(p) = C \frac{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} (p^2 + 2\zeta_k p \Omega_{0k} + \Omega_{0k}^2)}{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} (p^2 + \Omega_{pk}^2)} \quad (1.16.)$$

A katalógusból kiolvasott paraméterek: $C, \zeta_1, \Omega_{01}, \Omega_{p1}, \zeta_2, \Omega_{02}, \Omega_{p2}, \dots$

A valóságos átviteli tényező:

$$\Gamma(s) = \Gamma_{kat} \left(p = \frac{s}{\omega_h} \right) \quad (1.17.)$$

Felüláteresztő szűrő:

Az alkalmazott transzformáció: $p = \frac{\omega_h}{s}$ (1.18.)

A záró tartomány: $\Omega_z = \frac{\omega_h}{\omega_z} > 1$ (1.19.)

Az átviteli tényező: $\Gamma(s) = \Gamma_{kat} \left(p = \frac{\omega_h}{s} \right)$ (1.20.)

Sáváteresztő szűrő:

Az alkalmazott transzformáció: $p = \frac{1}{\delta} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right)$ (1.21.)

Ahol a sávközép frekvencia és a relatív sávszélesség:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{ha} \omega_{hf}} \quad (1.22.)$$

$$\delta = \frac{\omega_{hf} - \omega_{ha}}{\omega_0} \quad (1.23.)$$

A zárótartományok szélei:

$$\Omega_{z1} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\omega_{zf}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{zf}} \right) \quad \Omega_{z2} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\omega_0}{\omega_{za}} - \frac{\omega_{za}}{\omega_0} \right) \quad (1.24.)$$

A választott alul áteresztő záró tartomány (a kisebb a szigorúbb) :

$$\Omega_z = \min\{\Omega_{z1}, \Omega_{z2}\} \quad (1.25.)$$

Az átviteli tényező: $\Gamma(s) = \Gamma_{kat} \left(p = \frac{1}{\delta} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right) \right)$ (1.26.)

Sávzáró szűrő:

Az eljárás hasonló a sáváteresztőhöz, az alkalmazott transzformáció:

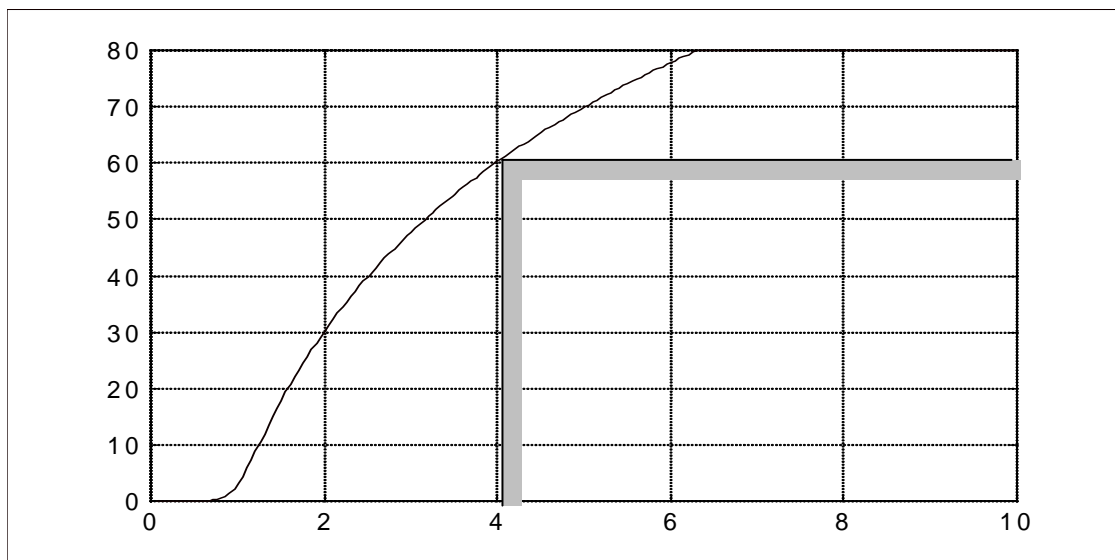
$$p = \frac{\delta}{\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s}} \quad (1.27.)$$

A zárótartományok közül itt is a szigorúbbat választjuk

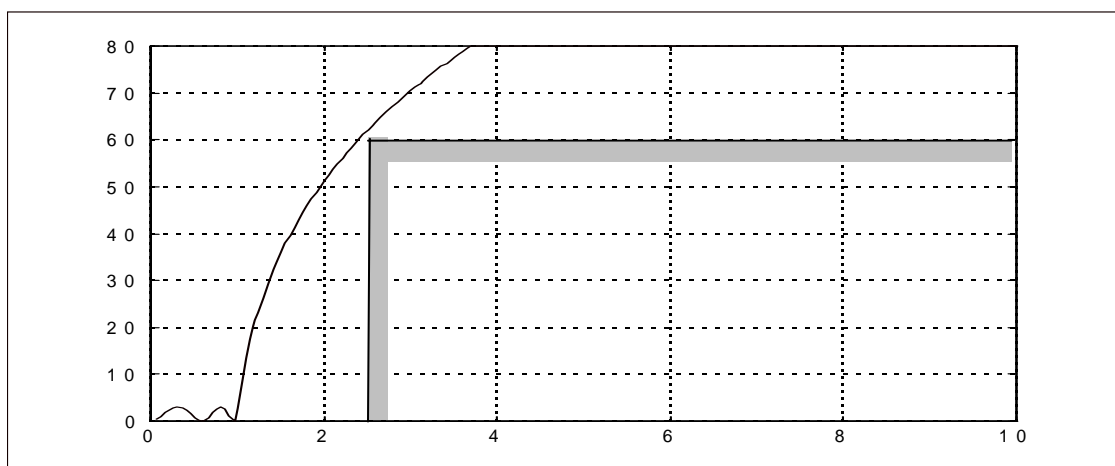
Az átviteli tényező: $\Gamma(s) = \Gamma_{kat} \left(p = \frac{\delta}{\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s}} \right)$ (1.28.)

Az alábbi ábrákon **aluláteresztő szűrők** esetére mutatjuk meg a különböző approximációs eljárásokkal kapott csillapítás karakterisztikákat a frekvencia függvényében. Az ábrákon szereplő szűrők fokszáma azonos (5-öd fokú), az áteresztő tartomány határa az egység és az áteresztő sávban megengedett ingadozás 3dB.

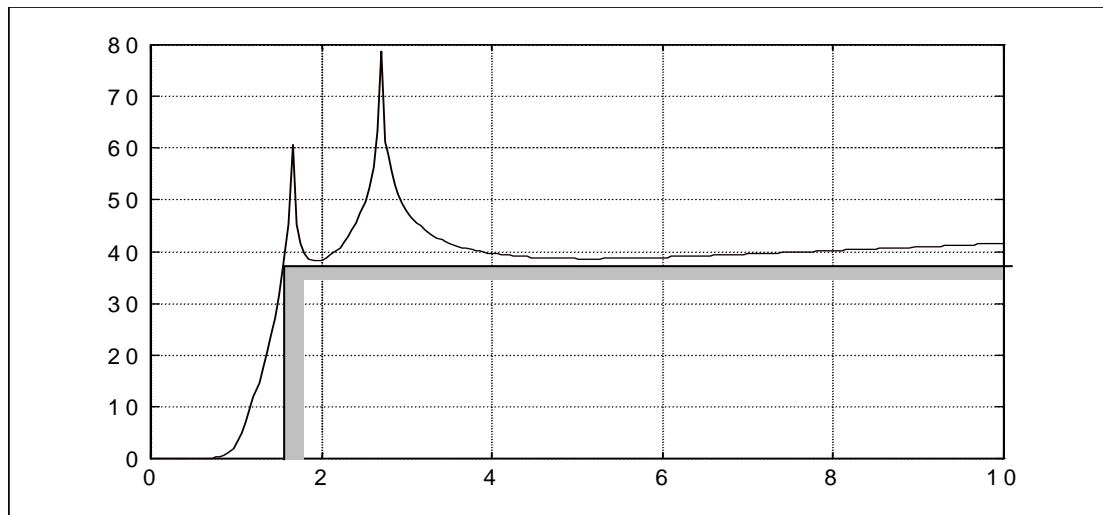
Hasonlítsuk össze a csillapítás karakterisztika záró tartománybeli viselkedését!



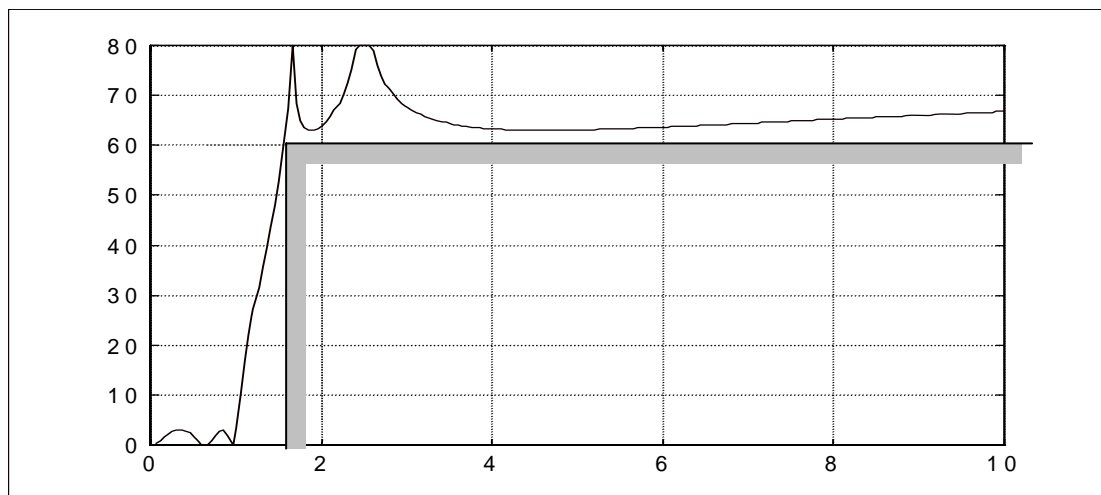
1.4.ábra Az áteresztő sáv maximális lapos közelítése
(Butterworth-típusú közelítés)



1.5. ábra Az áteresztő sáv egyenletes közelítése
(Csebisev-típusú közelítés)



1.6. ábra A záró sáv egyenletes közelítése
(Inverz Csebisev-típusú közelítés)



1.7. ábra Az áteresztő- és a záró sáv egyenletes közelítése(Elliptikus-típusú közelítés)