

## 2. Folytonos idejű szűrők approximációja

A célunk olyan zárt összefüggések levezetése, melyek segítségével meghatározhatjuk az adott specifikációt kielégítő, folytonos idejű szűrő  $I(s)$  **átviteli tényezőjét**. A módszereket aluláteresztő karakterisztikák approximálására fogjuk bemutatni. Feluláteresztő, sáváteresztő karakterisztikák approximációja mindig visszavezethető aluláteresztő szűrő tervezésére.

Adott tehát:

az aluláteresztő szűrő áteresztő tartománya:	$[0 - \omega_h]$
az áteresztő sávban megengedett ingadozás:	$a_a$ [dB]
a záró tartomány:	$[\omega_z - \infty]$
a záró tartományban a minimális csillapítás:	$a_z$ [dB].

Célszerű bevezetni a  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_h}$  normalizált frekvencia változót, mellyel az áteresztő sáv

a  $[0 - 1]$  tartomány, a zárósáv kezdete pedig a  $\Omega_z = \frac{\omega_z}{\omega_h}$  érték lesz.

A normalizált változóval kiszámított  $I(s)$  átviteli tényezőben az  $s \leftarrow \frac{s}{\omega_h}$  helyettesítést

elvégezve az eredeti frekvenciasávban fog teljesülni a specifikáció.

Itt jegyezzük meg, hogy a szűrőkatalógusok is a normalizált frekvencia változót használják, így a specifikáció normalizálását és a fenti helyettesítést a katalógusok használatakor is el kell végezni.

Módszerünk gondolatmenete a következő lesz: heurisztikus módon választunk egy karakterisztikus függvényt, majd a benne lévő paramétereket úgy választjuk meg, hogy a specifikáció kielégüljön. A karakterisztikus függvényből ezután kiszámítjuk az (1.12) egyenlet összes gyökét. A gyökök közül szeparálva a bal félsíkra esőket, megkapjuk a megengedett  $\Gamma(s)$  átviteli tényezőt.

Ezt a módszert két karakterisztikus függvény típusra fogjuk bemutatni. Az első módszerben (maximális lapos közelítés) a karakterisztikus függvény egy egyszerű hatvány függvény, a másodikban ún. Csebisev-polinom lesz. Ezen módszerekben elemi függvényekkel zárt formulák adhatók a gyökök elhelyezkedésére.

Egyéb módszerekben, (mikor egyenletesen kívánjuk közelíteni mind az áteresztő, mind a záró sávi követelményt) nem elemi (elliptikus) függvényekkel kell számolni és ez túlmutat célkitűzésünkön. Ezekben az esetekben ezért a katalógusok használatára hivatkozunk.

### 2.1. Maximális-lapos (Butterworth) közelítés:

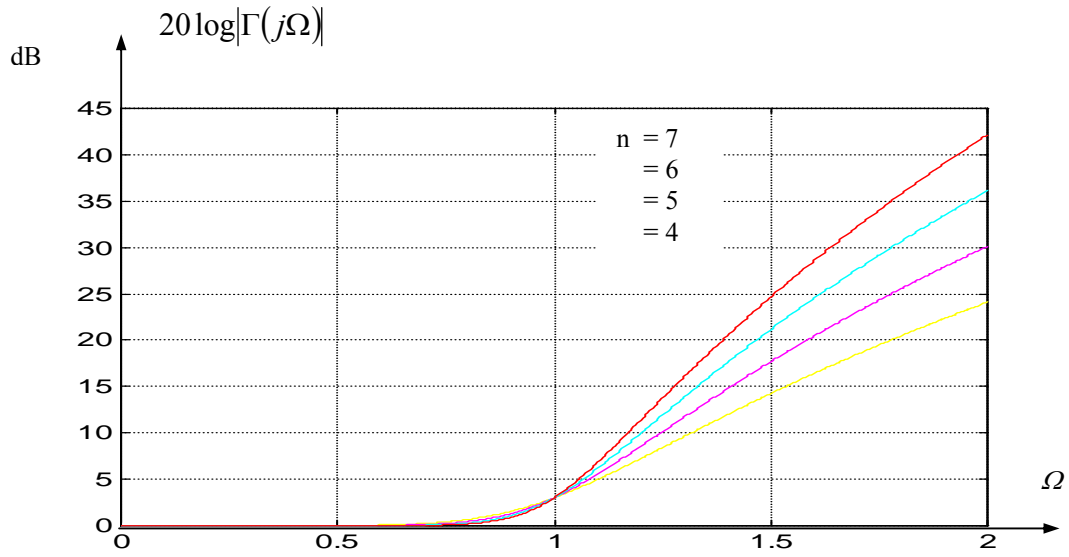
Az (1.9) egyenletben szereplő karakterisztikus függvényt válasszuk hatvány függvénynek! Az átviteli tényező így legyen az alábbi alakú:

$$|\Gamma(j\Omega)|^2 = 1 + e_0^2 \Omega^{2n} \quad (2.1.)$$

ahol  $n$  a szűrő fokszáma lesz.

Az  $e_0$  paraméter értékét a monoton növekvő csillapítás függvény áteresztő sáv szélén ( $\Omega = 1$ ) előírt, maximálisan megengedett értékéből számítjuk ki:

$$a_a^{dB} = 20 \lg |\Gamma(j1)| = 20 \lg \sqrt{1 + e_0^2} = 10 \lg(1 + e_0^2) \quad (2.2.)$$



2.1. ábra Az áteresztő sáv maximális lapos közelítése az  $e_0 = 1$  paraméter érték esetén (3 dB ingadozás).

A 2.2.-ből a paraméter értéke:

$$e_0 = \sqrt{10^{\frac{a_a}{10}} - 1} \quad (2.3.)$$

A szükséges fokszámot a zárótartomány szélén előírt minimális csillapításból határozzuk meg:

$$a_z^{dB} = 20 \lg |\Gamma(j\Omega_z)| = 20 \lg \sqrt{1 + e_0^2 \Omega_z^{2n}} = 10 \lg(1 + e_0^2 \Omega_z^{2n})$$

Amiből:

$$n \geq \frac{\ln \frac{\sqrt{10^{\frac{a_z^{dB}}{10}} - 1}}{e_0}}{\ln \Omega_z} \quad (2.4.)$$

Az  $s = j\Omega$  komplex frekvenciaváltozót bevezetve (1.xx) alapján írhatjuk:

$$\Gamma(s)\Gamma(-s) = 1 + e_0^2 \left(\frac{s}{j}\right)^{2n} \quad (2.5.)$$

A karakterisztikus függvény ezek után (2.5.)-ből kiolvasható:

$$\frac{h(s)}{N(s)} \frac{h(-s)}{N(-s)} = e_0^2 \left(\frac{s}{j}\right)^{2n} = (-1)^n e_0^2 s^{2n} = \begin{cases} e_0^2 s^{2n} & n: \text{páros} \\ -e_0^2 s^{2n} & n: \text{páratlan} \end{cases}$$

a nevező polinom  $N(s)$  zérus fokú:

$$N(s) = 1 \quad \text{és} \quad N(-s) = 1 \quad (2.6.)$$

a számláló polinom  $h(s)$   $n$ -ed fokú:

$$h(s) = e_0 s^n \quad \text{és} \quad h(-s) = \begin{cases} h(s) & n: \text{páros} \\ -h(s) & n: \text{páratlan} \end{cases} \quad (2.7.)$$

Az átviteli tényező zérusait a (2.5.) gyökeiből kapjuk meg:

$$1 + e_0^2 \left( \frac{s}{j} \right)^{2n} = 0 \quad (2.8.)$$

Átrendezés után:

$$\left( \frac{s_k}{j} \right)^{2n} = -\frac{1}{e_0^2} = \frac{e^{j(2k-1)\pi}}{e_0^2} = A^{2n} e^{j(2k-1)\pi} \quad (2.9.)$$

majd  $2n$ -ik gyököt vonva:

$$s_k = j A e^{j(2k-1)\frac{\pi}{2n}} = A e^{j\varphi_k} \quad k = 1, 2, \dots, 2n \quad (2.10.)$$

ahol:

$$A = \frac{1}{\sqrt[n]{e_0}} \quad (2.11.)$$

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2} + (2k-1) \frac{\pi}{2n} \quad (2.12.)$$

A gyökök tehát az  $A$  sugarú körön,  $\varphi_k$  fázis szög értékeken helyezkednek el. Az összes gyökből a  $k = 1, \dots, n$  indexhez tartozók esnek a bal félsíkra, míg a  $k = n+1, \dots, 2n$  indexhez tartozók a jobb félsíkon lesznek.

Az index határ megválasztásával a bal fél síkú gyökök szeparálása egyszerűen megoldható, így az átviteli tényező gyöktényezős alakja:

$$\Gamma(s) = H(s) = \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{s}{s_k} \right) \quad (2.13.)$$

Kihasználva, hogy a gyökök konjugált komplexek (  $n$  = páros ) esetben:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{s}{s_k} \right) = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left( 1 - \frac{s}{s_k} \right) \left( 1 - \frac{s}{s_k^*} \right) = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left( 1 - \frac{s(s_k + s_k^*)}{s_k s_k^*} + \frac{s^2}{s_k s_k^*} \right) = \\ &= \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left( 1 - 2 \frac{s}{A} \cos \varphi_k + \frac{s^2}{A^2} \right) \end{aligned} \quad (2.14.)$$

Ha  $n$  = páratlan

$$\Gamma(s) = \left( 1 + \frac{s}{A} \right) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left( 1 - 2 \frac{s}{A} \cos \varphi_k + \frac{s^2}{A^2} \right) \quad (2.15.)$$

**Példa:**

Határozzuk meg az átviteli tényezőt, az  $n=3$ ,  $e_0=1$  paraméter értékek esetén!

A (2.11.) és (2.12.) egyenletekből:

$$A = \frac{1}{\sqrt[n]{e_0}} = 1$$

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2} + (2k-1) \frac{\pi}{2n}$$

A gyökök elhelyezkedése a 2.2. ábrán látható

A bal félsíkra eső gyökök:

$$s_{1,3} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} \quad s_2 = -1$$

Mivel:

$$\cos \varphi_1 = -\frac{1}{2}$$

A (2.12.) alapján:

$$\Gamma(s) = (1+s)(1+s+s^2) = 1+2s+2s^2+s^3$$

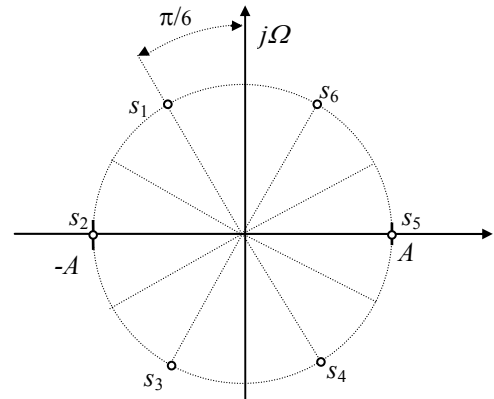
$$\Gamma(-s) = 1-2s+2s^2-s^3$$

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(-s) &= [(1+2s^2)+(2s+s^3)][(1+2s^2)-(2s+s^3)] = (1+2s^2)^2 - (2s+s^3)^2 = \\ &= 1+4s^2+4s^4-4s^2-4s^4-s^6 = 1-s^6 \end{aligned}$$

Ellenőrzés képpen:

$$|\Gamma(j\Omega)|^2 = \Gamma(s)\Gamma(-s)|_{s=j\Omega} = 1-s^6|_{s=j\Omega} = 1-\Omega^6$$

ahogy vártuk.



2.2. ábra Maxlap gyökök

## 2.2. Az áteresztő sáv egyenletes (Csebisev) közelítése:

Csebisev polinomok definíciója:

$$T_n(\Omega) = \cos(n \arccos(\Omega)) \quad (2.16.)$$

Ez a definíció polinomot definiál, amit az alábbi gondolat menettel bizonyíthatunk:

Legyen:

$$\Omega = \cos(x) \quad (2.17.)$$

Ezzel:

$$T_n = \cos(nx) \quad (2.18.)$$

Az  $(n+1)$ -ed és az  $(n-1)$ -ed fokú polinimokat a (2.18.) alakban felírva, majd az addíciós tételt alkalmazva írhatjuk:

$$T_{n+1} = \cos((n+1)x) = \cos(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x)$$

$$T_{n-1} = \cos((n-1)x) = \cos(nx)\cos(x) + \sin(nx)\sin(x)$$

Adjuk össze a fenti két polinomot!

$$T_{n+1} + T_{n-1} = 2\cos(nx)\cos(x) = 2\Omega T_n$$

amit átrendezve a Csebisev polinomoknak egy rekurzív előállítását lehetővé tevő alakot kapunk.

$$T_{n+1}(\Omega) = 2\Omega T_n(\Omega) - T_{n-1}(\Omega) \quad (2.19.)$$

Mivel a definícióból következően  $T_0(\Omega) = 1$  és  $T_1(\Omega) = \Omega$ , a magasabb indexű polinomok (2.19.)-ből származtathatók:

$$T_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1, \quad T_3(\Omega) = 4\Omega^3 - 3\Omega, \quad T_4(\Omega) = 8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1,$$

$$T_5(\Omega) = 16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega, \quad T_6(\Omega) = 32\Omega^6 - 48\Omega^4 + 18\Omega^2 - 1, \quad \text{stb.}$$

A Csebisev polinomok az áteresztő sáv egyenletes közelítését teszik lehetővé az alábbi tulajdonságuknál fogva:

$$-1 \leq T_n(\Omega) \leq 1 \quad \text{ha:} \quad -1 \leq \Omega \leq 1$$

$$\text{és} \quad (2.20.)$$

$$|T_n(\Omega)| > 1 \quad \text{ha:} \quad |\Omega| > 1$$

Ha a karakterisztikus függvényt  $e_0 T_n$  alakúnak vesszük fel, az átviteli tényező abszolútértéke az 1 és  $\sqrt{1+e_0^2}$  értékek között ingadozva, egyenletesen tölti ki a rendelkezésre álló áteresztő sávi toleranciát.

$$\text{A fentiek alapján tehát legyen:} \quad |\Gamma(j\Omega)|^2 = 1 + e_0^2 T_n^2(\Omega) \quad (2.21.)$$

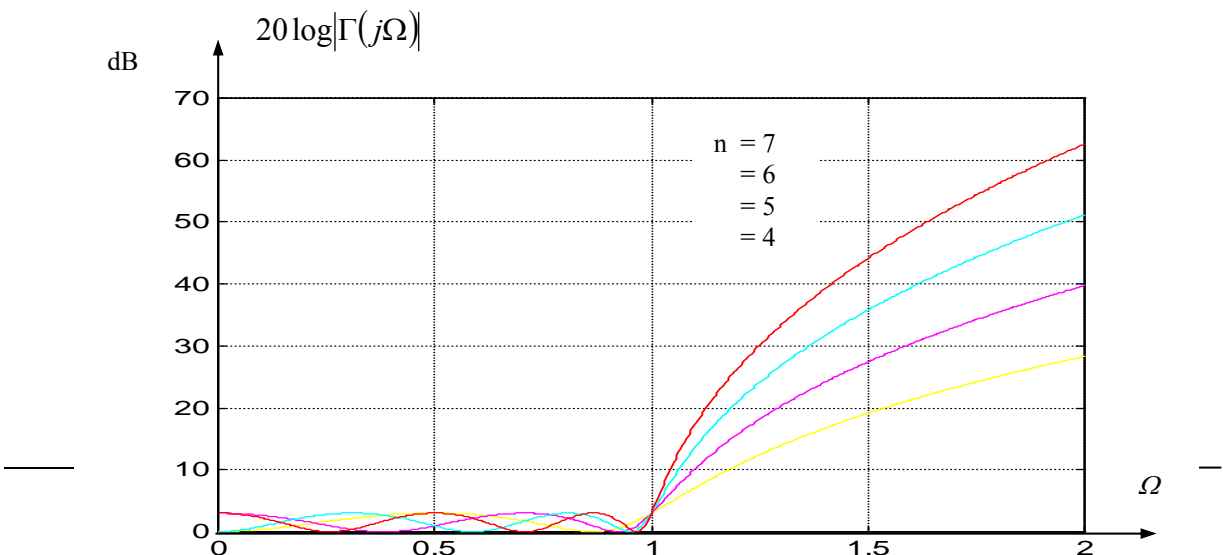
amiből:

$$1 \leq 1 + e_0^2 T_n^2(\Omega) \leq 1 + e_0^2 \quad \text{ha:} \quad |\Omega| \leq 1$$

$$\text{és} \quad (2.22.)$$

$$1 + e_0^2 \leq 1 + e_0^2 T_n^2(\Omega) \quad \text{ha:} \quad 1 \leq |\Omega|$$

A záró tartományban, az  $\Omega \gg 1$  értékekre a karakterisztikus függvény  $e_0 2^{n-1} \Omega^n$  típusú hatványfüggvényként viselkedik.



2.3. ábra Az áteresztő tartomány egyenletes közelítése Csebisev polinomokkal  
az  $e_0 = 1$  paraméter érték esetén (3 dB ingadozás).

Az  $e_0$  paraméter értékét az áteresztő sávi specifikációból számítjuk ki:

$$a_a^{dB} = 20 \lg \sqrt{1 + e_0^2} = 10 \lg(1 + e_0^2) \quad (2.23.)$$

amiből:

$$e_0 = \sqrt{10^{\frac{a_a^{dB}}{10}} - 1} \quad (2.24.)$$

A szükséges foksámot a zárósávi követelmény határozza meg:

$$a_z^{dB} \leq 20 \lg \sqrt{1 + e_0^2 \cos^2(jn \operatorname{arch}(\Omega_z))} = 20 \lg \sqrt{1 + e_0^2 \operatorname{ch}^2(n \operatorname{arch}(\Omega_z))} \quad (2.25.)$$

amiből a foksám:

$$n \geq \frac{\operatorname{arch} \frac{\sqrt{10^{\frac{a_z^{dB}}{10}} - 1}}{e_0}}{\operatorname{arch}(\Omega_z)} \quad (2.26.)$$

A karakterisztikus függvény polinomjai:

$$h(s) = h(-s) = e_0 T_n\left(\frac{s}{j}\right) \quad (2.27.)$$

$$N(s) = N(-s) = 1 \quad (2.28.)$$

Az átviteli függvény zérusait az alábbi egyenletről számítjuk ki:

$$1 + e_0^2 T_n^2\left(\frac{s}{j}\right) = 1 + e_0^2 \cos^2\left(n \arccos\left(\frac{s}{j}\right)\right) = 0 \quad (2.29.)$$

A 2.29. egyenlet csak úgy teljesülhet, ha a koszinusz függvény argumentuma komplex, amit válasszunk meg az alábbi módon:

$$\arccos\left(\frac{s_k}{j}\right) = a_k - jb \quad (2.30.)$$

Ezzel a 2.29. egyenlet:

$$\cos^2(na_k - jnb) = -\frac{1}{e_0^2}$$

Gyököt vonva, majd az addíciós tételt alkalmazva írhatjuk:

$$\cos(na_k) \cos(jnb) + \sin(na_k) \sin(jnb) = \pm j \frac{1}{e_0}$$

$$\cos(na_k) \operatorname{ch}(nb) + j \sin(na_k) \operatorname{sh}(nb) = \pm j \frac{1}{e_0} \quad (2.31.)$$

A 2.31. jobb oldala tisztán képzetes, ami csak úgy állhat elő, ha  $\cos(na_k) = 0$ , amiből:

$$na_k = (2k-1) \frac{\pi}{2} \quad (2.32.)$$

Igy  $a_k = (2k-1) \frac{\pi}{2n} \quad (2.33.)$

Ebből viszont következik a  $\sin(na_k) = \pm 1$  azonosság.

A 2.31.-ből ezek után :  $\operatorname{sh}(nb) = \frac{1}{e_0} \quad (2.34.)$

Amiből a b paraméter:

$$b = \frac{1}{n} \operatorname{arsh} \frac{1}{e_0} = \frac{1}{n} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + e_0^2}}{e_0} \quad (2.35.)$$

A 2.30. egyenletből:

$$\frac{s_k}{j} = \cos(a_k - jb) = \sin\left(a_k + \frac{\pi}{2} - jb\right) = \sin(\varphi_k - jb) \quad (2.36.)$$

ahol:  $\varphi_k = a_k + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + (2k-1) \frac{\pi}{2n} \quad (2.37.)$

Az addíciós tételt alkalmazva:

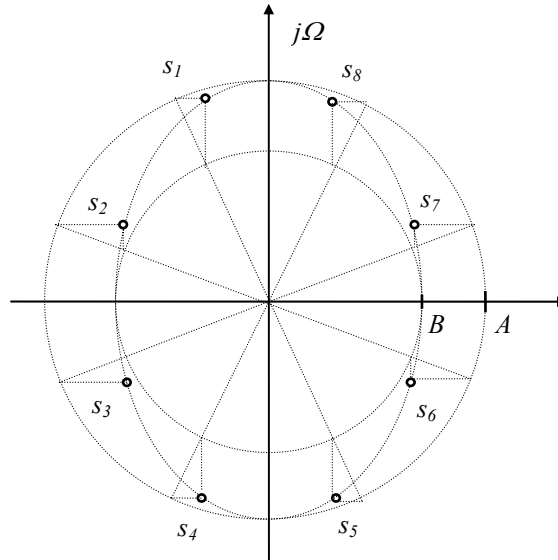
$$\frac{s_k}{j} = \sin(\varphi_k - jb) = \operatorname{ch}(b) \sin \varphi_k - j \operatorname{sh}(b) \cos \varphi_k \quad (2.38.)$$

Végül a k-ik gyök értékére az alábbi kifejezés adódik:

$$s_k = B \cos \varphi_k + jA \sin \varphi_k \quad k = 1, 2, \dots, 2n \quad (2.39.)$$

ahol :  $A = \operatorname{ch}(b)$  és  $B = \operatorname{sh}(b) \quad (2.40.)$

Vegyük észre, hogy a gyökök az A nagy- és a B kistengelyű ellipszisen helyezkednek el. A  $k = 1, \dots, n$  indexekhez tartozó gyökök lesznek a bal félsíkban ( az e felettiek pedig a jobb félsíkban).



2.4. ábra Csebisevi gyök-elrendeződés (n = 4 esetén)

A gyökök ismeretében a keresett átviteli tényező gyöktényezős alakja:

$$\Gamma_n(s) = H(s) = e_0 2^{n-1} \prod_{k=1}^n (s - s_k) \quad (2.41.)$$

Ezzel a kitűzött feladatot megoldottuk.

### 2.3. A zárótartomány egyenletes közelítése:

A Csebisev polinomok segítségével lehetőség van a zárótartomány egyenletes közelítésére is. A csillapítás függvény az áteresztő sávban monoton növekvő (max. lapos), a zárótartományban egyenletesen ingadozik 'a<sub>z</sub>' és a végtelen között.

Az átviteli tényezőt ebben az esetben az alábbi módon approximáljuk:

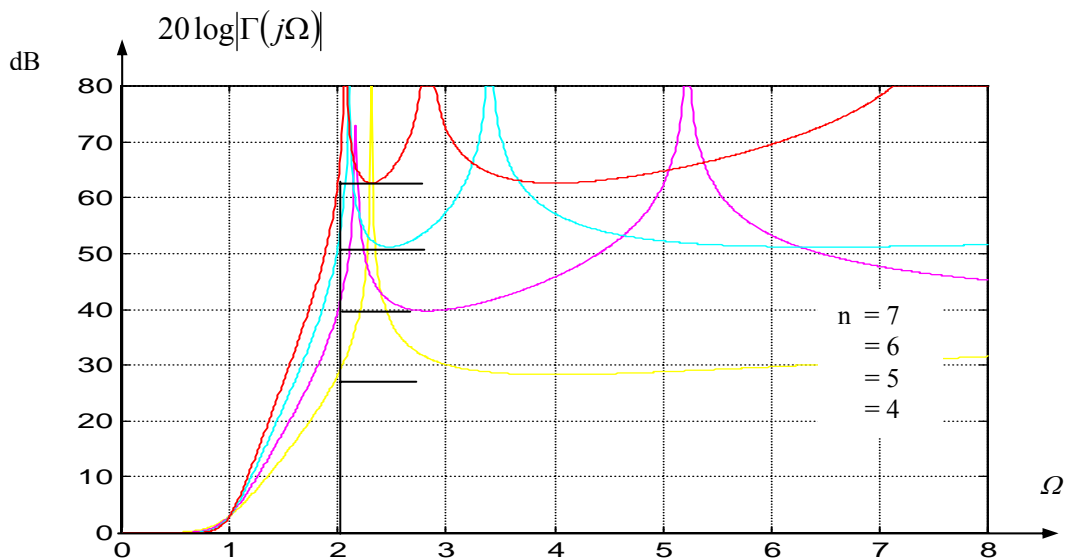
$$|\Gamma(j\Omega)|^2 = 1 + e_0^2 \frac{T_n^2(\Omega_z)}{T_n^2\left(\frac{\Omega_z}{\Omega}\right)} \quad (2.42.)$$

A részletek mellőzésével ekkor (pld ha n páratlan)

$$\Gamma(s) = C \frac{(s + \Omega_{00}) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (s^2 + 2\zeta_k s \Omega_{0k} + \Omega_{0k}^2)}{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (s^2 + \Omega_{pk}^2)} \quad (2.43.)$$

alakú lesz.

Eddigi eseteinkkel ellentétben a záró tartomány egyenletes közelítésekor véges frekvenciákon is vannak csillapítás pólusok. Ezt láthatjuk az alábbi ábrán:



2.5. ábra Inverz-Csebisev karakterisztikák  
( $\Omega_z = 2$ ,  $e_0 = 1$  paraméter értékek esetén)

## 2.4. Az áteresztő és a záró tartomány együttes közelítése

Az áteresztő- és a záró tartomány együttes egyenletes közelítésével kapott szűrőket **elliptikus (Cauer) szűrőknek** nevezik. Ez a módszer elliptikus függvényeket használ, innen az elnevezés. Az elliptikus függvényekkel mi itt most nem foglalkozunk, az ezzel a módszerrel tervezett szűrőket katalógusokból vehetjük át (pld.):

Géher Károly.: Lineáris hálózatok	Műszaki könyvkiadó
Rudolf Saal: Handbook of Filter Design	AEG Telefunken

Az alábbiakban egy olyan módszert mutatunk be, amellyel mind az áteresztő, mind a záró tartomány egyenletes közelítése valószínűsíthető meg. Az approximáló függvényt úgy választjuk meg, hogy az az áteresztő sávban garantálja az egyenletes ingadozású közelítést, míg a záró sávú követelményt a véges frekvenciákra helyezett csillapítás pólusok kellő megválasztásával elégítjük ki.

Az eljárásban egy transzformált frekvenciaváltozót ( $x$ ) használunk melynek kapcsolata az ( $s$ ) Laplace frekvenciaváltozóval:

$$x = 1 + \frac{\Omega_h^2}{s^2} \quad (2.44.)$$

ahol:  $\Omega_h$  az alul áteresztő szűrő áteresztő sávjának a széle.

Az  $s$ -sík  $s = j\Omega$  képzetes tengelye az:

$$x = 1 - \frac{\Omega_h^2}{\Omega^2} \quad (2.45.)$$

összefüggésnek megfelelően az  $x$ -sík valós tengelyére képződik le.

Ahol:  $0 \leq \Omega^2 \leq \Omega_h^2$  ott:  $-\infty \leq x \leq 0$  áteresztő sáv

Ahol:  $\Omega_h^2 < \Omega^2 \leq +\infty$  ott:  $0 < x \leq 1$  átmeneti és záró sáv

Ezek után válasszunk egy  $P(y)$  polinomot az alábbi módon:

$$P(y) = (1 + y) \prod_{i=1}^n (y + y_{pi})^2 \quad (2.46.)$$

$$\text{ahol: } 0 < y_{pi} < 1 \quad \text{valós} \quad (2.47.)$$

Az (2.46.) és (2.47.) alapján a  $P(y)$  Hurwitz polinom, mivel gyökei szigorúan a bal félsíkon helyezkednek el. A polinomot a  $P_2(y^2)$  páros és az  $yP_1(y^2)$  a páratlan részére felbontva:

$$P(y) = (1+y) \prod_{i=1}^n (y + y_{pi})^2 = P_2(y^2) + yP_1(y^2) \quad (2.48.)$$

Az (1.46.)-ban a független változó előjelének megváltoztatásával írhatjuk:

$$P(-y) = (1-y) \prod_{i=1}^n (y - y_{pi})^2 = P_2(y^2) - yP_1(y^2) \quad (2.49.)$$

Képezzük e két polinom szorzatát:

$$P(y)P(-y) = (1-y^2) \prod_{i=1}^n (y^2 - y_{pi}^2)^2 = P_2^2(y^2) - y^2 P_1^2(y^2) \quad (2.50.)$$

Majd az  $y^2 = x$  jelölés bevezetése után a csillapítás függvényt írjuk fel az alábbi alakban:

$$G^2(x) = 1 + \varepsilon_0^2 \frac{P_2^2(x)}{P_2^2(x) - xP_1^2(x)} \quad (2.51.)$$

Ez a függvény egyenletes ingadozása az áteresztő sávban (ahol  $x$  valós és  $x \leq 0$ )

$$1 \leq G^2(x) \leq 1 + \varepsilon_0^2 \quad (2.52.)$$

Ezt a tulajdonságot a Hurwitz polinomokra érvényes tételek segítségével láthatjuk be. A  $P(y)$  polinom páros és páratlan részének gyökeire, - melyeket a:

$$P_2(y_{2k}^2) = 0, \quad y_{1k} P_1(y_{1k}^2) = 0$$

egyenletek megoldásaival kereshetünk meg- igaz, hogy az  $y_{1k}$  és  $y_{2k}$  gyökök:

- a képzetes tengelyen helyezkednek el és
- felváltva követik egymást.

Az  $y^2 = x$  helyettesítésnek megfelelően az  $x$  változó szerint a gyökök a negatív valós tengelyen ( az áteresztő sávban) fognak elhelyezkedni.

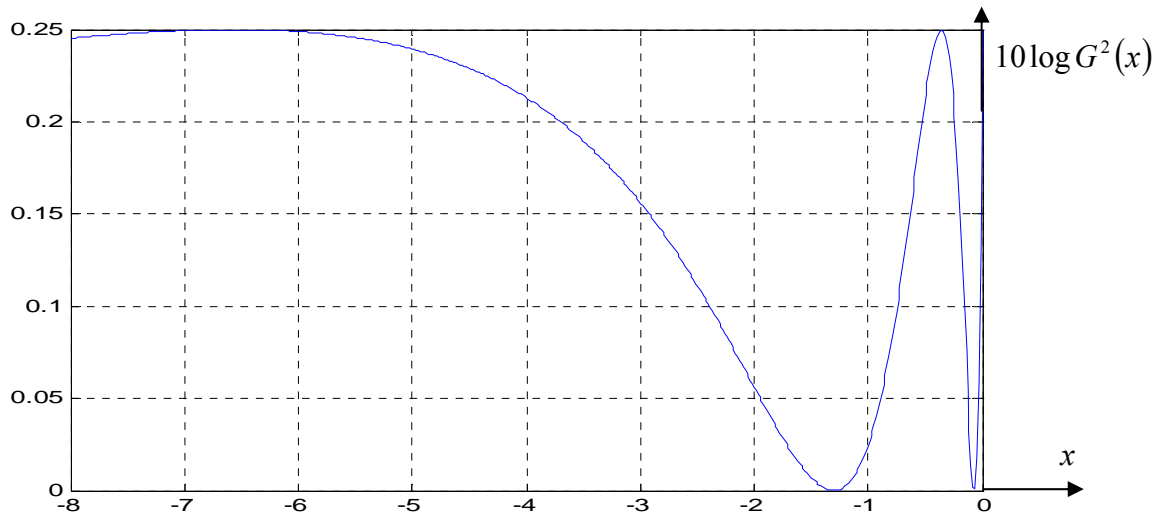
A csillapítás függvény kissé átrendezett alakjából látjuk:

$$G^2(x) = 1 + \varepsilon_0^2 \frac{P_2^2(x)}{P_2^2(x) - xP_1^2(x)} = 1 + \varepsilon_0^2 \frac{1}{1 - x \frac{P_1^2(x)}{P_2^2(x)}} \quad (2.53.)$$

hogyan:

$$\begin{array}{lll} G^2(x_{1k}) = 1 + \varepsilon_0^2 & \text{a páratlan rész gyökeinél:} & x_{1k} = y_{1k}^2 \leq 0 \text{ és} \\ G^2(x_{2k}) = 1 & \text{a páros rész gyökeinél:} & x_{2k} = y_{2k}^2 < 0 \end{array}$$

Ez a tulajdonság független a  $0 < y_{pi} < 1$  aktuális értékeitől.

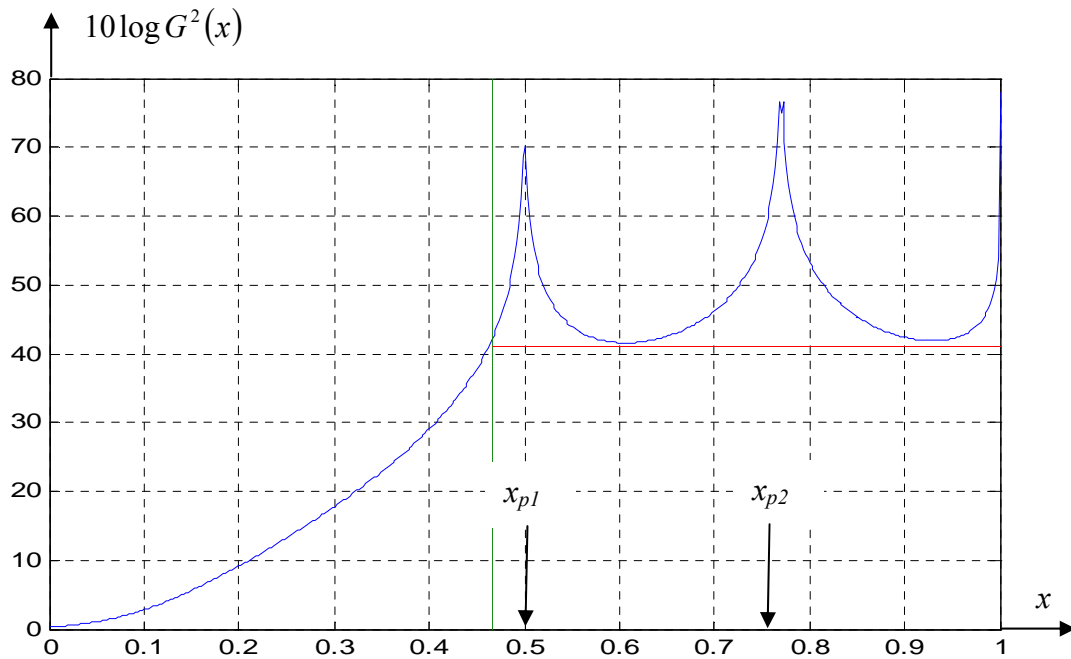


2.6. ábra Az áteresztő sávi csillapítás alakulása ( 0.25 dB ingadozás)

A zárótartományban (ahol  $x$  valós és  $0 \leq x \leq 1$ ) fognak elhelyezkedni az  $x_{pi}$  csillapítás pólusok, melyek megfelelő megválasztásával lehet kielégíteni a záró követelményt.

$$G^2(x) = 1 + \varepsilon_0^2 \frac{P_2^2(x)}{P_2^2(x) - xP_1^2(x)} = 1 + \varepsilon_0^2 \frac{P_2^2(x)}{(1-x) \prod_{i=1}^n (x - x_{pi})^2} \quad (2.54.)$$

$$0 < x_{pi} = y_{pi}^2 < 1$$



2.7. ábra Az ötödfokú szűrő zárótartománybeli csillapítása.

Egy, pld. MATLAB-ban írt program segítségével, akár többszöri próbálkozással állítjuk be, hogy a csillapítás a záró sávban a kívántnak megfelelő legyen. A programban változtatva  $x_{p1}$ ,  $x_{p2}$  stb. értékét, iterálva érjük el az eredményt. (Végül is a pólusok helyének szisztematikus változtatása a programban is megoldható, de ez a kérdés most túlmutat érdeklődésünkön.)

Ha a követelményt az a választott fokszámmal nem tudjuk kielégíteni, újabb pólus felvételével próbálkozunk.

Ezzel a módszerrel a záró tartomány tetszőleges követelményét (pld lépcsős tolerancia) is ki tudjuk elégíteni.

Keressük meg a (2.53.) zérus helyeit:

$$G^2(x) = 1 + \varepsilon_0^2 \frac{P_2^2(x)}{P_2^2(x) - xP_1^2(x)} = \frac{(1 + \varepsilon_0^2)P_2^2(x) - xP_1^2(x)}{P_2^2(x) - xP_1^2(x)} \quad (2.55.)$$

Ez a feladat az alábbi polinom gyökeinek kiszámítását jelenti:

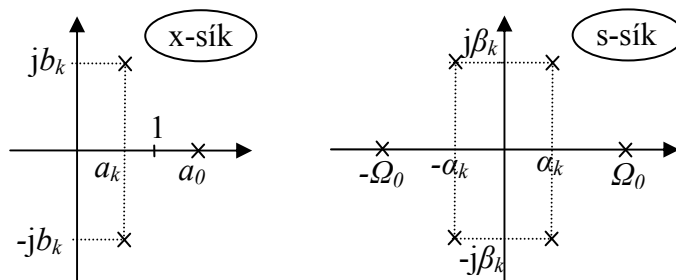
$$(1 + \varepsilon_0^2)P_2^2(x) - xP_1^2(x) = 0 \quad (2.56.)$$

A valós együtthatójú polinom gyökei valósak ill. konjugált komplexek lehetnek. A (2.56.) egyenletnek egy valós gyöke van:  $x_{00} > 1$ , a többi ( $2n$  db) komplex:  $x_{0k} = a_k + jb_k$ .

Az  $x$ -sík gyökeit a (2.44.) összefüggés inverzének használatával átszámítjuk az  $s$ -síkra:

$$s_{0k} = \frac{\Omega_h}{\sqrt{x_{0k} - 1}} = \alpha_k + j\beta_k \quad (2.57.)$$

A valós  $x_{00}$  gyökhöz két valós gyök ( $\pm a_0 = \pm \Omega_0$ ), az ( $a_k \pm jb_k$ ) komplex gyökpárokhoz komplex gyök-négyesek ( $\pm \alpha_k \pm j\beta_k$ ) tartoznak az  $s$ -síkon.



2.8. ábra A transzformáció által megvalósított leképezés a két sík között

A (2.57.)-ből a pozitív ( $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ) értékeket választva, felírhatjuk az  $s$ -síkon érvényes átviteli függvényt:

$$\Gamma(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{\Omega_{00}}\right) \prod_{k=1}^n \left(1 + D_k \frac{s}{\Omega_{0k}} + \frac{s^2}{\Omega_{0k}^2}\right)}{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{s^2}{\Omega_{pk}^2}\right)} \quad (2.58.)$$

Ahol:

$$\Omega_{0k}^2 = \alpha_k^2 + \beta_k^2, \quad D_k = \frac{2\alpha_k}{\Omega_{0k}} \quad \text{és} \quad \Omega_{pk}^2 = \frac{\Omega_h^2}{x_{pk} - 1} \quad (2.59.)$$

A (2.58.)-ből láthatjuk, hogy a szűrő fokszáma  $(2n+1)$  páratlanra adódott. Ha páros fokszámú szűrőt kívánunk tervezni, akkor elhagyjuk a végtelen frekvencián lévő pólust. Ekkor a  $P(y)$  polinomot az alábbiak szerint választjuk meg:

$$P(y) = \prod_{i=1}^n (y + y_{pi})^2 \quad (2.60.)$$

Ebben az esetben a (2.56.) gyökei csak konjugált komplexek lesznek (eltűnik a valós gyök). A páros fokszámhoz tartozó átviteli függvény:

$$\Gamma(s) = \sqrt{1 + \varepsilon_0^2} \frac{\prod_{k=1}^n \left( 1 + D_k \frac{s}{\Omega_{0k}} + \frac{s^2}{\Omega_{0k}^2} \right)}{\prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{s^2}{\Omega_{pk}^2} \right)} \quad (2.61.)$$

Ezzel a kitűzött feladatot megoldottuk.