

3. IIR szűrők tervezése

A szűrő tervezés feladata az, hogy keressük azt a megengedett, diszkrét-idejű hálózatfüggvényt, amelyhez tartozó amplitúdó karakterisztika eleget tesz az adott specifikációban szereplő toleranciáknak. Természetesen a végső cél a diszkrét-idejű hálózat meghatározása. A transzfer függvény ismeretében azonban annak algebrai átalakításával a kívánt struktúra paraméterei az átalakított függvényből már kiolvashatóak.

A végtelen impulzusválaszú digitális szűrők tervezésekor a leggyakrabban használt módszer a feladat visszavezetése folytonos idejű szűrő tervezésére.

Mivel a szűrő tervezésben a legnehezebb lépés az approximáció, ezért a diszkrét-idejű transzfer függvényt úgy fogjuk előállítani, hogy a folytonos idejű szűrő transzfer függvényét az alábbi módszerek szerint transzformáljuk. A folytonos idejű szűrőkre az approximáció részleteiben már jól kidolgozott eljárás, ezért az ottani módszereket egyszerűen átvesszük.

Két módszert fogunk tárgyalni, melyek elnevezése:

- Az impulzus invariáns transzformáció
- Bilineáris transzformáció.

3.1. Impulzus invariáns transzformáció

Ennél a módszernél az alapgondolat az, hogy a diszkrét-idejű hálózat $h(nT)$ impulzus választ a folytonos-idejű hálózat $\hat{h}(t)$ impulzus válaszának mintavételezésével állítjuk elő.

$$h(nT) = \hat{h}(t = nT) \quad (3.1.)$$

A frekvencia tartományban a kapcsolat a mintavételi tételnek megfelelően alakul, azaz a diszkrét-idejű hálózat $H(e^{j\omega T})$ frekvencia válasza a folytonos-idejű hálózat $\hat{H}(j\omega)$ frekvencia válaszának periodikus kiterjesztettje lesz:

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{H}(j\omega - jk\omega_s) \quad (3.2.)$$

Aluláteresztő típusú hálózatok esetében, amikor a folytonos-idejű hálózat csillapítása a mintavételi frekvencia felénél nagyobb frekvenciákon már megfelelően nagy ($\hat{H}(j\omega)$ megfelelően kicsi), az átlapolódásból adódó karakterisztika torzulás elhanyagolható:

$$H(e^{j\omega T}) \approx \frac{1}{T} \hat{H}(j\omega) \quad \text{ha} \quad -\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2} \quad (3.3.)$$

Ha $\hat{H}(j\omega)$ kielégíti a specifikációt, akkor $H(e^{j\omega T})$ is (többé-kevésbé) ki fogja elégíteni azt. Más szavakkal, az egzakt időtartományi egyezés nem vonja maga után az egzakt frekvencia tartománybeli megfelelést (különösen nem, ha a karakterisztika feluláteresztő jellegű). E módszer használata akkor indokolt, ha szűrő időtartománybeli viselkedésére van előírás.

Egy megjegyzés erejéig elkanyarodva a szűrőtervezéstől, hasonló problémával találkozunk a folytonos-idejű hálózatok számítógépes szimulációjánál. A szimuláció során “dt” diszkrét időléptéket használnak, ami “megfelelően” kicsi (azaz a mintavételi frekvencia megfelelően nagy). A “dt” beállítása úgy szokott történni, hogy fokozatosan csökkentik “dt” értékét, míg a szimuláció eredményében a konvergencia be nem következik (az eltérés már elhanyagolható). A mintavételi tétel értelmében azonban ez még kevés lehet. Gondoljunk arra, hogy nemlineáris analízis feladatokban a jel felharmonikusai nem biztosítják az átlapolódás mentességet!

Visszatérve az impulzus invariáns szűrő tervezéséhez, ha szűrő katalógusból vagy saját approximációs eljárásunk eredményeként megtaláltuk a specifikációt kielégítő $\hat{H}(s)$ transzfer függvényt, a következő gondolatmenettel juthatunk el a diszkrét-idejű $H(z)$ transzfer függvényhez :

$$\hat{H}(s) \Rightarrow \hat{h}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{H}(s)\} \Rightarrow h(nT) = \hat{h}(t = nT) \Rightarrow H(z) = \mathcal{Z}\{h(nT)\} \quad (3.4.)$$

A $H(z)$ transzfer függvényhez az időtartományba történő (esetenként hosszadalmas) oda-vissza transzformáció nélkül is eljuthatunk. Bontsuk fel ezért $\hat{H}(s)$ -t részlet törtekre:

$$\hat{H}(s) = \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{s - s_k} \quad (3.5.)$$

ahol N : a nevező fokszáma,

s_k : a nevező gyökei (a pólusok),

r_k : az s_k egyszeres pólusokhoz tartozó reziduumok.

Emlékeztetőül :

$$r_k = \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) \hat{H}(s) \quad k=1,2,\dots,N \quad (3.6.)$$

A (3.5) alakból a súlyfüggvény:

$$\hat{h}(t) = \sum_{k=1}^N r_k e^{s_k t} \quad t \geq 0 \quad (3.7.)$$

Ennek mintavételezettje:

$$h(nT) = \sum_{k=1}^N r_k e^{s_k nT} = \sum_{k=1}^N r_k z_k^n \quad n \geq 0 \quad (3.8.)$$

ahol:

$$z_k = e^{s_k T} \quad (3.9.)$$

a ‘z’ síkra transzformált pólus.

Ha s_k a bal félsíkban volt, akkor a transzformált pólus az egység sugarú körön belültre kerül, azaz stabil hálózatfüggvényt stabil hálózat függvénybe transzformálunk.

A diszkrét-idejű hálózat transzfer függvénye a (3.8.) ‘Z’ transzformáltja:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^N r_k (z_k z^{-1})^n = \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{1 - z_k z^{-1}} \quad (3.10.)$$

A végeredmény:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{r_k}{1 - z_k z^{-1}} \quad (3.11.)$$

Szavakban kifejezve, a (3.6.) és a (3.9.) felhasználásával kiszámított r_k reziduumok és a transformált s_k pólusok értékeinek ismeretében a diszkrét-idejű $H(z)$ transzfer függvény felírható az időtartományba történő átlépés nélkül.

3.2. Tervezés bilineáris transzformációval

A bilineáris transzformációval történő IIR szűrő tervezés a leggyakrabban használt módszer, mivel ennél az eljárásnál nem lép fel az átlapolódásból származó hiba.

Az 's' Laplace-változót és a 'z' diszkrét-idejű komplex frekvencia változót egymásba leképező kifejezés a bilineáris transzformáció:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (3.12.)$$

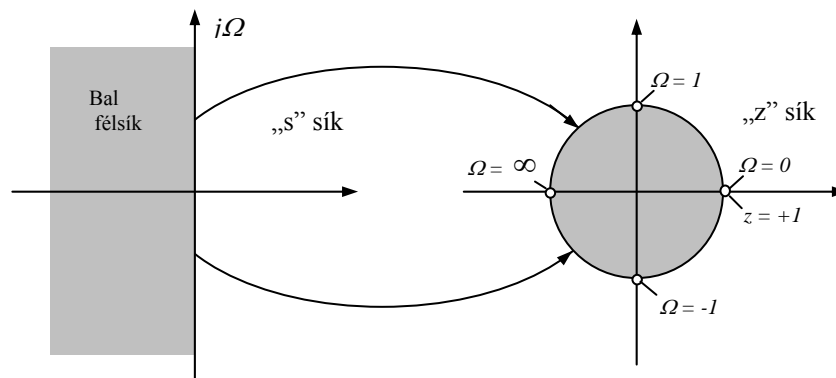
Ennek inverze:

$$z = \frac{1 + s}{1 - s} \quad (3.13.)$$

A fenti komplex transzformációk körtartóak, azaz köröket körökbe képeznek le. Így az 's'-sík $s = j\Omega$ képzetes tengelyének (mint végtelen sugarú körnek) a 'z' síkon az egység sugarú kör felel meg:

$$|z| = \left| \frac{1 + j\Omega}{1 - j\Omega} \right| = \frac{\sqrt{1 + \Omega^2}}{\sqrt{1 + \Omega^2}} = 1 \quad (3.14.)$$

Az 's' sík bal félsíkja az egységsugarú körön belülre, míg a jobb félsík azon kívülre képződik le.



3.1. ábra A bilineáris transzformáció mint konform leképezés

A diszkrét-idejű $H(z)$ transzfer függvényt a folytonos idejű hálózat $\hat{H}(s)$ transzfer függvényéből a (3.12.) szerinti helyettesítéssel állítjuk elő.

A diszkrét-idejű hálózatfüggvény tehát:

$$H(z) = \hat{H}(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (3.15.)$$

Ha $\hat{H}(s)$ megengedett függvény, $H(z)$ is az lesz, mivel a bilineáris transzformáció az 's'-ben stabil, racionális törtfüggvényből 'z'-ben stabil, racionális törtfüggvényt állít elő.

A kérdés persze az, hogy az így előállított $H(z)$ transzfer függvény $H(e^{j\omega T})$ frekvencia válasza mennyire hasonlít a folytonos-idejű hálózat $\hat{H}(j\Omega)$ frekvencia válaszához. Egyezést nem várhatunk, mivel a diszkrét-idejű hálózat $H(e^{j\omega T})$ -ja periodikus függvény, a $\hat{H}(j\Omega)$ pedig aperiodikus.

$$H(e^{j\omega T}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \hat{H}(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \Big|_{z=e^{j\omega T}} = \hat{H}(s) \Big|_{s=\frac{1-\exp(j\omega T)}{1+\exp(j\omega T)}} \quad (3.16.)$$

A függvénybe helyettesítendő érték:

$$s = \frac{1 - e^{j\omega T}}{1 + e^{j\omega T}} = j \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right) = j\Omega \quad (3.17.)$$

ahol:

$$\Omega = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right) \quad (3.18.)$$

Ezzel:

$$H(e^{j\omega T}) = \hat{H}(j\Omega) \Big|_{\Omega=\operatorname{tg}\left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right)} = \hat{H}\left(j \operatorname{tg}\left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right)\right) \quad (3.19.)$$

A (3.19)-ben egy közvetett függvényt látunk. Azt fejezi ki, hogy amíg a **fizikai frekvenciát** jelölő ω frekvencia változó a :

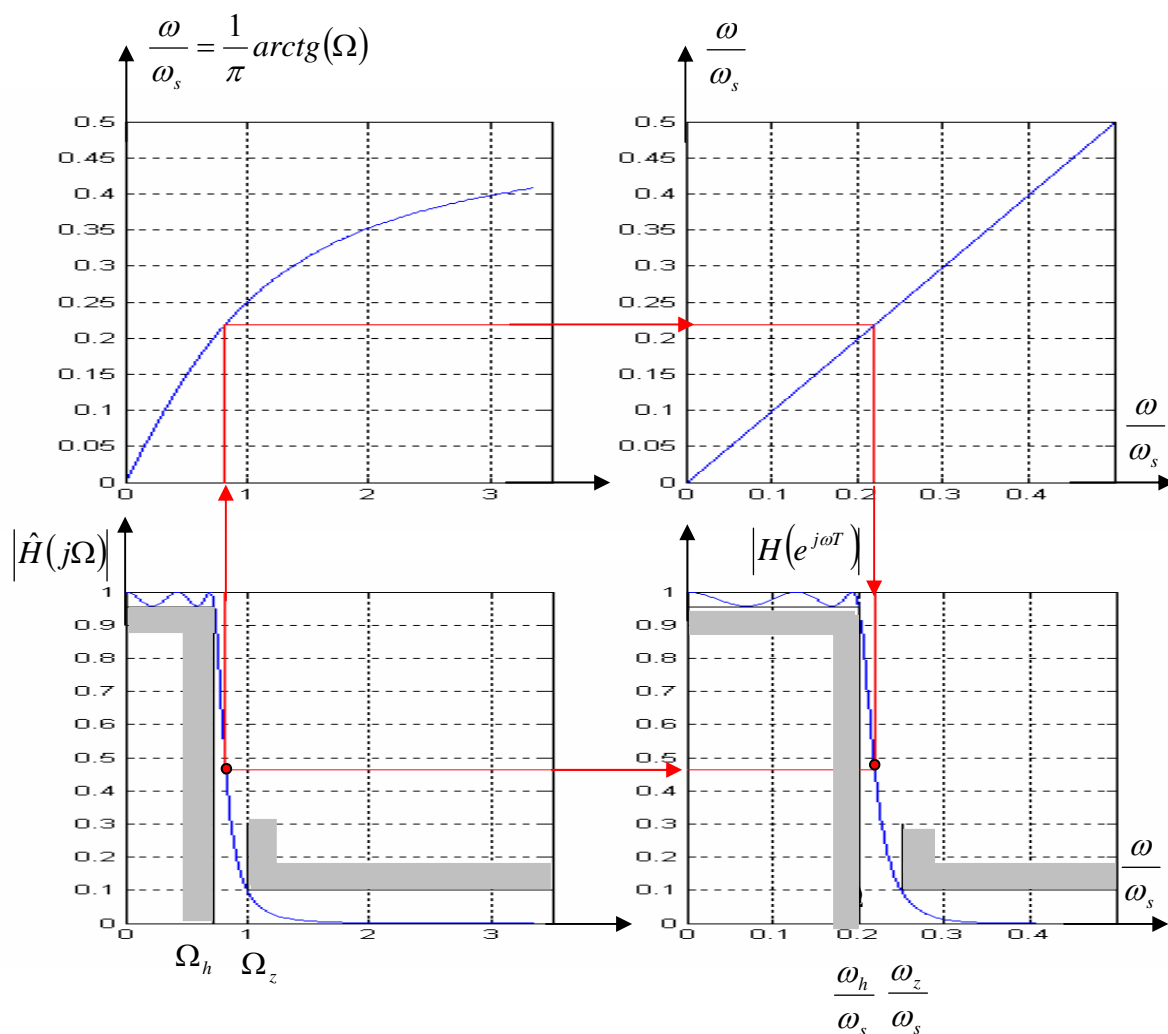
$$0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}$$

tartományban változik, a Ω **relatív frekvencia** változó a tangens összefüggésnek megfelelően a:

$$0 \leq \Omega \leq \infty$$

tartományban változik. Ez azt jelenti, hogy a $\hat{H}(j\Omega)$ függvény $[0, \infty]$ intervallumon felvett értékeit a leképezés a $H(e^{j\omega T})$ -nak a $[0, \omega_s/2]$ intervallumába "zsúfolja" össze.

A specifikáció akkor tudjuk a fellépő frekvencia torzítás ellenére kielégíteni, ha magát a követelményt is a (3.18.)-as összefüggésnek megfelelően "előtorzítjuk". A $\hat{H}(j\Omega)$ függvény így az előtorzított specifikációnak tesz eleget, majd ezen a bilineáris transzformációt végrehajtva, a frekvencia válasz mintegy "visszatorzul" és a követelmény így végül is kielégül.



3.2. ábra. A specifikáció előtorzítása és a karakterisztika egy pontjának megszerkesztése

Az eredeti specifikáció:

Az áteresztő sáv széle: $\omega_h = 0.2\omega_s$

A zárósáv kezdete: $\omega_z = 0.25\omega_s$

Az előtorzított értékek:

$$\Omega_h = \operatorname{tg}\left(\pi \frac{\omega_h}{\omega_s}\right) = \operatorname{tg}(0.2\pi) = 0.72654$$

$$\Omega_z = \operatorname{tg}\left(\pi \frac{\omega_z}{\omega_s}\right) = \operatorname{tg}(0.25\pi) = 1.000$$

Ezután foglaljuk össze a tervezési eljárás főbb lépéseit:

0. Kiindulás: Adott a specifikáció az ω tartományban.

1. Elsőnek kiszámítjuk milyen relatív frekvencián lesz a szűrő határfrekvenciája

$$\Omega_h = tg\left(\pi \frac{\omega_h}{\omega_s}\right) \quad (3.20.)$$

2. Elvégezzük a követelmény előtorzítását úgy, hogy egyben a határfrekvenciára normáljuk a frekvencia adatokat. Az amplitúdó előírást változatlanul hagyjuk. (A szűrő katalógusokban az áteresztő sáv széle mindig az egység)

$$\Omega_i = \frac{1}{\Omega_h} tg\left(\pi \frac{\omega_i}{\omega_s}\right) \quad (3.21.)$$

3. A Ω tartományban előállított követelményre megoldjuk az approximációs feladatot. Ez tipikusan azt jelenti, hogy szűrőkatalógusból kiválasztjuk az előtorzított követelményt kielégítő $\hat{H}(s)$ függvényt. A függvényt célszerűen első és másodfokú gyöktényezőket tartalmazó alakjában vesszük át.

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{C} \frac{1}{1 + \frac{s}{\Omega_{p0}}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1 + \frac{s^2}{\Omega_{0k}^2}}{1 + 2\zeta_k \frac{s}{\Omega_{pk}} + \frac{s^2}{\Omega_{pk}^2}} \quad (3.22.)$$

4. A 3.22. függvény határfrekvenciája még az egység, ezért az $s \leftarrow \frac{s}{\Omega_h}$

helyettesítéssel vissza kell állítani az eredeti előírásnak eleget tevő függvényt.

Ezután végezhetjük el $\hat{H}(s)$ bilineáris transzformációját.

Ez a két lépés összevonható az:

$$s = \frac{1}{\Omega_h} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (3.23.)$$

(3.22.)-be történő behelyettesítéssel.

$$H(z) = \hat{H}(s) \Big|_{s = \frac{1}{\Omega_h} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} \quad (3.24.)$$

5. A diszkrét időben érvényes másod- és elsőfokú gyöktényezők ismeretében foghatunk hozzá a szűrő realizálásához. A realizálás alapvető kérdése, hogy milyen struktúrában kívánjuk a szűrőt megvalósítani. A struktúra megválasztásakor mérlegelnünk kell az együtttható érzékenységet (a véges együtttható szóhosszúság hatását), a kivezérelhetőséget (túlcsordulás lehetőségét), valamint a szűrő működése közben (a folytonos kerekítés következtében) termelődő aritmetikai zaj hatását. A kérdések összetettsége miatt a realizálás ezen problémáival külön fejezetekben foglalkozunk.

Példa: Tervezzünk 3-ad fokú maximális lapos karakterisztikájú aluláteresztő szűrőt 1kHz határfrekvenciával (3db-es pont). A mintavételi frekvencia 10 kHz.

1. A határfrekvencia relatív egységben (3.20.) :

$$\Omega_h = \operatorname{tg}\left(\pi \frac{\omega_h}{\omega_s}\right) = \operatorname{tg}\left(\pi \frac{1}{10}\right) = 0.32492$$

2. A specifikációban a foksámot adtuk meg, így nincs más frekvencia előírás.
3. A specifikációt a 2.fejezet példájában kiszámított függvény kielégíti:

$$\hat{H}(s) = \frac{1}{(1+s)(1+s+s^2)}$$

4. A (3.24.) szerint elvégezve a bilineáris transzformációt:

$$\begin{aligned} H(z) &= \hat{H}\left(s = \frac{1}{\Omega_h} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) = \frac{\Omega_h(1+z^{-1})}{\Omega_h(1+z^{-1}) + (1-z^{-1})} \frac{\Omega_h^2(1+z^{-1})^2}{\Omega_h^2(1+z^{-1})^2 + \Omega_h(1-z^{-2}) + (1-z^{-1})^2} = \\ &= \frac{a_{01} + a_{11}z^{-1}}{1 + b_{11}z^{-1}} \frac{a_{02} + a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2}}{1 + b_{12}z^{-1} + b_{22}z^{-2}} \end{aligned}$$

Ahol:

$$a_{01} = a_{11} = \frac{\Omega_h}{\Omega_h + 1} = 0.245237$$

$$b_{11} = \frac{\Omega_h - 1}{\Omega_h + 1} = -0.509525$$

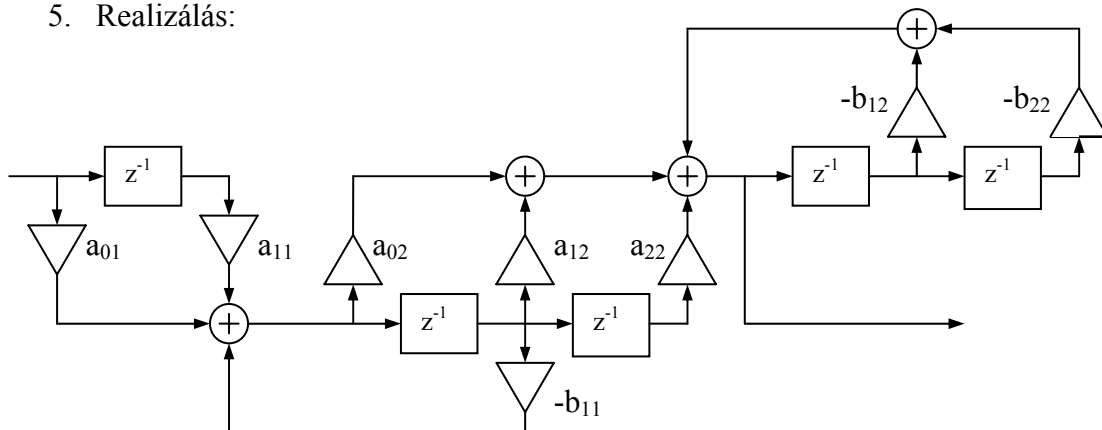
$$a_{02} = a_{22} = \frac{\Omega_h^2}{1 + \Omega_h + \Omega_h^2} = 0.073802$$

$$a_{12} = 2a_{02} = 0.147604$$

$$b_{12} = \frac{2(\Omega_h^2 - 1)}{1 + \Omega_h + \Omega_h^2} = -1.250516$$

$$b_{22} = \frac{1 - \Omega_h + \Omega_h^2}{1 + \Omega_h + \Omega_h^2} = 0.545723$$

5. Realizálás:



3.3. ábra A realizált szűrő
(első és másodfokú D0 struktúrájú alaptagok kaszkád kapcsolása)

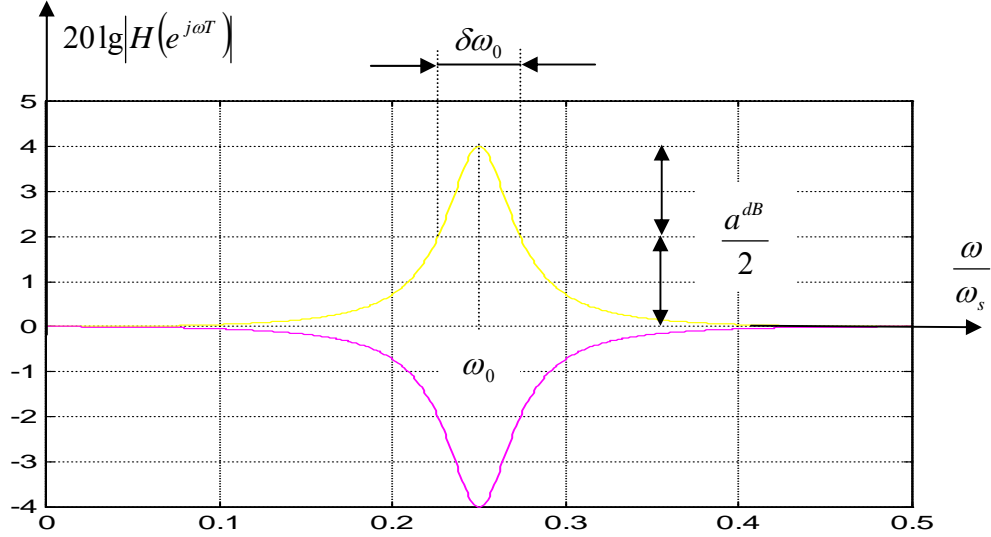
3.3. Amplitúdó korrektorok

Bilineáris transzformációval nem csak frekvencia szűrők, hanem más eszközök, pld amplitúdó korrektorok is tervezhetők. Az amplitúdó korrektorokkal szintén a jel spektrumát kívánjuk formálni az adott amplitúdó előírás szerint, de esetükben a zárósávi végtelen csillapítás általában nem követelmény.

A kívánt amplitúdó karakterisztika folytonos-idejű közelítése egyszerűbb feladat (Bode-diagramok segítségével) mint a diszkrét-idejű direkt approximáció. A szűrőtervezéshez hasonlóan: a követelményt előtorzítjuk, megkeressük a megfelelő $\hat{H}(s)$ -t, majd végrehajtjuk a bilineáris transzformációt.

A módszert egy példával szemléltetjük:

A példában legyen a feladat egy olyan amplitúdó korrektor tervezése, melynek az átvitele általában "1" (0 dB), kivéve az ω_0 frekvencia környezetét, ahol a^{dB} kiemelés (vagy elnyomást) kívánunk megvalósítani. A kiemelés/elnyomás relatív sávszélessége legyen δ (lásd 3.3. ábra)



3.4. ábra Az amplitúdó korrektor amplitúdó karakterisztikája

A (3.18.)-nak megfelelően, a kiemelés/elnyomás a relatív frekvencia tengelyen:

$$\Omega_0 = \operatorname{tg}\left(\pi \frac{\omega_0}{\omega_s}\right) \quad (3.25.)$$

Itt az átvitel értéke:

$$A = 10^{\frac{a}{20}} \quad (3.26.)$$

Az Ω_1, Ω_2 sávhatárokon az átvitel: \sqrt{A} (lásd az ábrát).

Ezekre a frekvenciákra előírjuk:

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_1 \Omega_2} \quad (3.27.)$$

$$\delta = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\Omega_0} \quad (3.28.)$$

A folytonos-idejű transzfer függvény legyen:

$$\hat{H}(s) = \frac{s^2 + D_1 s \Omega_0 + \Omega_0^2}{s^2 + D_2 s \Omega_0 + \Omega_0^2} \quad (3.29.)$$

Ez a függvény a 0 és a végtelen frekvencián 1 átvitelt ad, az Ω_0 -án:

$$\hat{H}(j\Omega_0) = \frac{-\Omega_0^2 + jD_1\Omega_0^2 + \Omega_0^2}{-\Omega_0^2 + jD_2\Omega_0^2 + \Omega_0^2} = \frac{D_1}{D_2} = A \quad (3.30.)$$

Az Ω_1, Ω_2 sávhatárokon:

$$\left| \hat{H}(j\Omega_2) \right|^2 = \left| \hat{H}(j\Omega_1) \right|^2 = \frac{\left(\frac{\Omega_0}{\Omega_2} - \frac{\Omega_2}{\Omega_0} \right)^2 + D_1^2}{\left(\frac{\Omega_0}{\Omega_2} - \frac{\Omega_2}{\Omega_0} \right)^2 + D_2^2} = \frac{\delta^2 + D_1^2}{\delta^2 + D_2^2} = A \quad (3.31.)$$

A 3.30. és 3.31. egyenleteket megoldva D_1, D_2 -re, a méretezési képletek:

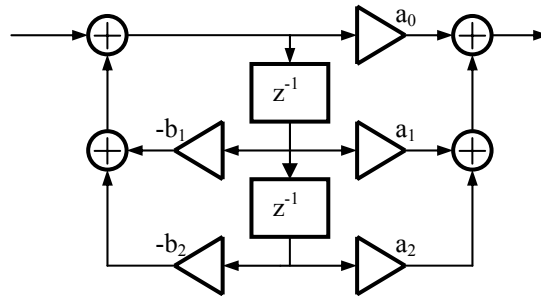
$$D_1 = \delta \sqrt{A} \quad \text{és} \quad D_2 = \frac{\delta}{\sqrt{A}} \quad (3.32.)$$

A paraméterek ismeretében végrehajthatjuk a bilineáris transzformációt:

$$\begin{aligned} H(z) &= \hat{H}(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{s^2 + D_1 s \Omega_0 + \Omega_0^2}{s^2 + D_2 s \Omega_0 + \Omega_0^2} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \dots = \\ &= \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \end{aligned} \quad (3.33.)$$

ahol:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1 + D_1 \Omega_0 + \Omega_0^2}{1 + D_2 \Omega_0 + \Omega_0^2} & a_1 &= \frac{2(\Omega_0^2 - 1)}{1 + D_2 \Omega_0 + \Omega_0^2} & a_2 &= \frac{1 - D_1 \Omega_0 + \Omega_0^2}{1 + D_2 \Omega_0 + \Omega_0^2} \\ b_1 &= \frac{2(\Omega_0^2 - 1)}{1 + D_2 \Omega_0 + \Omega_0^2} & b_2 &= \frac{1 - D_2 \Omega_0 + \Omega_0^2}{1 + D_2 \Omega_0 + \Omega_0^2} \end{aligned} \quad (3.34.)$$



3.5. ábra Az amplitúdó korrektor realizálása D1 struktúrában