

4.6. A Hilbert transzformált szűrő

Ismert tény, hogy egy **valós értékű** $x(n)$ sorozat $X(\omega)$ spektruma (**D**iszkrét **F**ourier **T**ranszformáltja) olyan, hogy mind a pozitív, mind a negatív frekvencia tengelyen rendelkezik spektrális összetevőkkel az $|\omega| \leq \omega_s / 2$ sávban. Sőt, valós jelekre érvényes az u.n. konjugált komplex szimmetria tétele, vagyis: $X(-\omega) = X^*(\omega)$, ahol:

$$X(e^{j\omega T}) = X(\omega) = DFT\{x(n)\} \quad (4.78.)$$

Ebből következően, ha olyan jelet keresünk amelyiknek **csak a pozitív tengely felett** vannak összetevői, annak szükségképpen **komplex értékű** sorozatnak kell lennie.

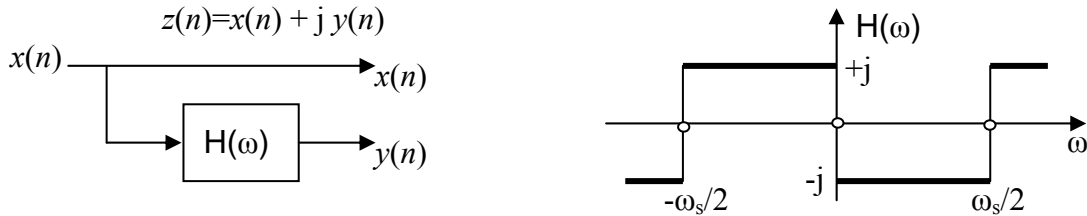
Keressünk ezért az $x(n)$ sorozat mellé egy szintén valós értékű $y(n)$ sorozatot úgy, hogy a:

$$z(n) = x(n) + j y(n) \quad (4.79.)$$

komplex értékű sorozat $Z(\omega)$ spektruma rendelkezzen a fentebb megkívánt tulajdonsággal! Ha találunk ilyen $y(n)$ sorozatot, akkor ezt nevezzük az $x(n)$ **Hilbert transzformált**-jának.

$$y(n) = \mathcal{HT}\{x(n)\} \quad (4.80.)$$

A Hilbert transzformátort egy lineáris időinvariáns szűrővel tudjuk megvalósítani, ahogy azt a 4.15. ábra mutatja:



4.15. ábra A Hilbert transzformátor mint lineáris szűrő

A szűrő átviteli karakterisztikája:

$$H(\omega) = -j \operatorname{sign}(\omega) = \begin{cases} -j & \text{ha } 0 < \omega < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & \text{ha } \omega = 0 \\ +j & \text{ha } -\frac{\omega_s}{2} < \omega < 0 \end{cases} \quad (4.81.)$$

Szavakban ez azt jelenti, hogy a szűrő amplitúdó karakterisztikája konstans, tehát mindentátereztő (leszámítva az $\omega=0$ és az $\omega=\omega_s/2$ pontokat), míg a fázisa pozitív frekvenciákon -90° és negatív frekvenciákon $+90^\circ$.

Első lépésben bizonyítsuk be, hogy ezzel a szűrővel a kitűzött feladatot oldjuk meg! Határozzuk meg ezért $z(n)$ spektrumát:

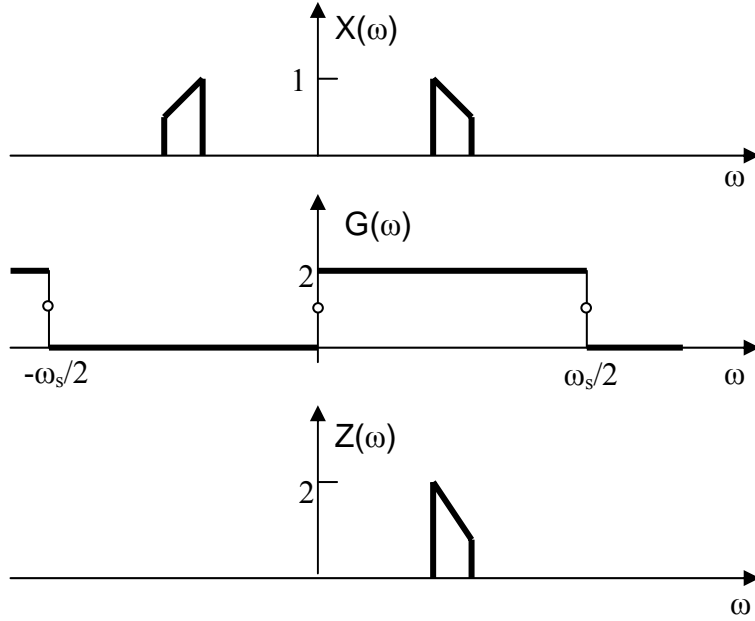
$$\begin{aligned} Z(\omega) &= DFT\{z(n)\} = DFT\{x(n) + jy(n)\} = DFT\{x(n)\} + jDFT\{y(n)\} = \\ &= X(\omega) + jY(\omega) = X(\omega) + jH(\omega)X(\omega) = [1 + \operatorname{sign}(\omega)]X(\omega) = \end{aligned}$$

$$= G(\omega)X(\omega) \quad (4.82.)$$

Ahol:

$$G(\omega) = 1 + \text{sign}(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{ha } 0 < \omega < \frac{\omega_s}{2} \\ 1 & \text{ha } \omega = 0 \\ 0 & \text{ha } -\frac{\omega_s}{2} < \omega < 0 \end{cases} \quad (4.83.)$$

A 4.83. alapján mondhatjuk, a szűrő megoldja a feladatot (lásd az alábbi ábrát).



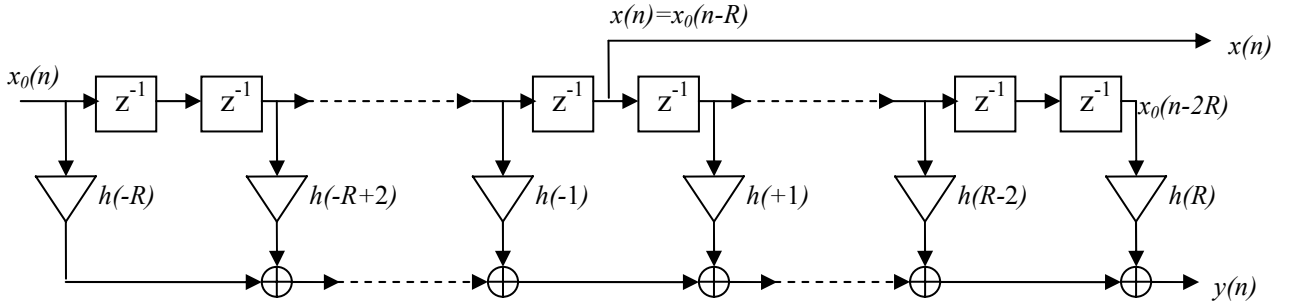
4.16. ábra. A komplex jel spektrumának származtatása

A következő lépés legyen a szűrő $h(n)$ súlyfüggvényének meghatározása!

$$\begin{aligned} h(n) &= \text{IDFT}\{H(\omega)\} = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} H(\omega) e^{j\omega n T} d\omega = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^0 0 \cdot e^{j\omega n T} d\omega + \frac{1}{\omega_s} \int_0^{\frac{\omega_s}{2}} 2 e^{j\omega n T} d\omega = \\ &= \frac{2}{\omega_s} \int_0^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\omega n T} d\omega = \frac{2}{\omega_s} \left[\frac{e^{j\omega n T}}{jnT} \right]_0^{\frac{\omega_s}{2}} = \frac{2}{\omega_s} \frac{e^{j\frac{\omega_s}{2} n T} - 1}{jnT} = \\ &= \frac{2}{\omega_s n T} \left[1 - \cos\left(\frac{\omega_s n T}{2}\right) \right] = \frac{1}{\pi n} [1 - \cos(n\pi)] = \begin{cases} 2/n\pi & \text{ha } n : \text{ptln} \\ 0 & \text{ha } n : \text{prs} \end{cases} \quad (4.84.) \end{aligned}$$

A 4.84.-ből látható, hogy a szűrő végtelen impulzus válaszu ($-\infty < n < \infty$), páratlan szimmetriájú ($h(-n) = h(n)$) és csak a páratlan sorszámúak különböznek a zérustól.

Szerencsére növekvő n -nel a sorozat $1/n$ sebességgel eltűnik, ezért bízhatunk abban, hogy elég nagy R páratlan szám után elhanyagolhatóan kicsivé válik (lásd a tervezés Fouriersor-ba fejtéssel c. fejezetet.)

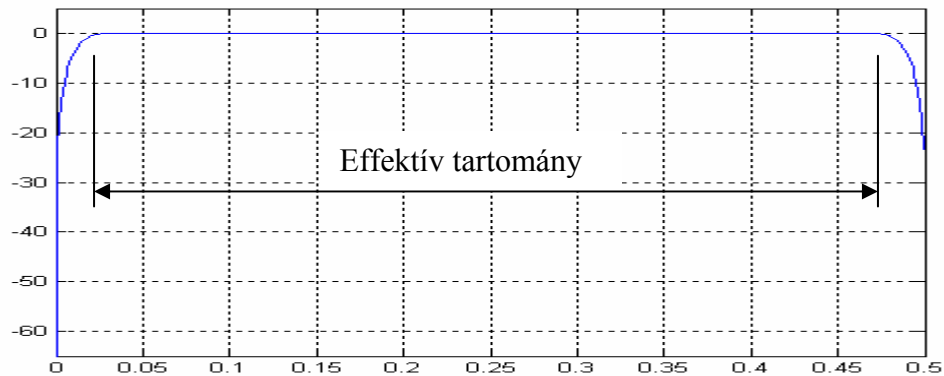


4.17. ábra. A Hilbert-transzformált párt előállító FIR szűrő

A nyilvánvalóan nem kauzális $H(\omega)$ átviteli karakterisztikájú szűrőt kauzálissá tehetjük a súlyfüggvény R értékű eltolásával (lásd 4.17.ábra). Ennek a szűrőnek azonban már RT késleltetése lesz. Ezt a késleltetést ha az $x_0(n)$ bemenő jelen is végrehajtjuk, akkor az $y(n)$ az ábra szerinti $x(n)$ jel Hilbert transzformáltja lesz: $y(n) = \mathcal{HT}\{x(n)\}$.

A véges Fourier sor, mint azt az előzőekben láttuk, Gibbs-oszcillációhoz vezet. Ezt kiküszöbölhetjük, ha most is élünk az ablakozási technikával. Például Hamming ablakot választva az átviteli függvény ingadozása jelentős mértékben lecsökken, ugyanakkor egy átmeneti sáv lép fel az $\omega=0$ és az $\omega=\omega_s/2$ pontok környezetében, ahol a $H(\omega)$ -nak eredetileg szakadása (ugrása) volt. Az átmeneti sáv szélessége Hamming ablaknál:

$$\omega_t = 4 \frac{\omega_s}{2R+1} \quad (4.85.)$$



4.18. ábra. A Hamming súlyozott Hilbert szűrő effektív amplitúdó karakterisztikája

A szűrő az $[\omega_t/2, \omega_s/2 - \omega_t/2]$ tartományban állítja elő a Hilbert transzformáltat. Ebből következően: csak olyan jelek transzformáltjait tudjuk előállítani, melyek spektrumi sáváteresztő karakterisztika jelegűek.

4.7. A Hilbert transzformált szűrőpár

Legyen egy nemkauzális aluláteresztő szűrő súlyfüggvénye a $g_0(k)$ valós, páros sorozat, ahol $-R \leq k \leq R$. A szűrő átviteli függvénye a valós, páros:

$$G_0(\omega) = \sum_{k=-R}^R g_0(k) e^{-jk\omega T} \quad (4.86.)$$

Képezzük ezek után az ω_0 frekvenciával modulált sorozatokat az alábbi módon:

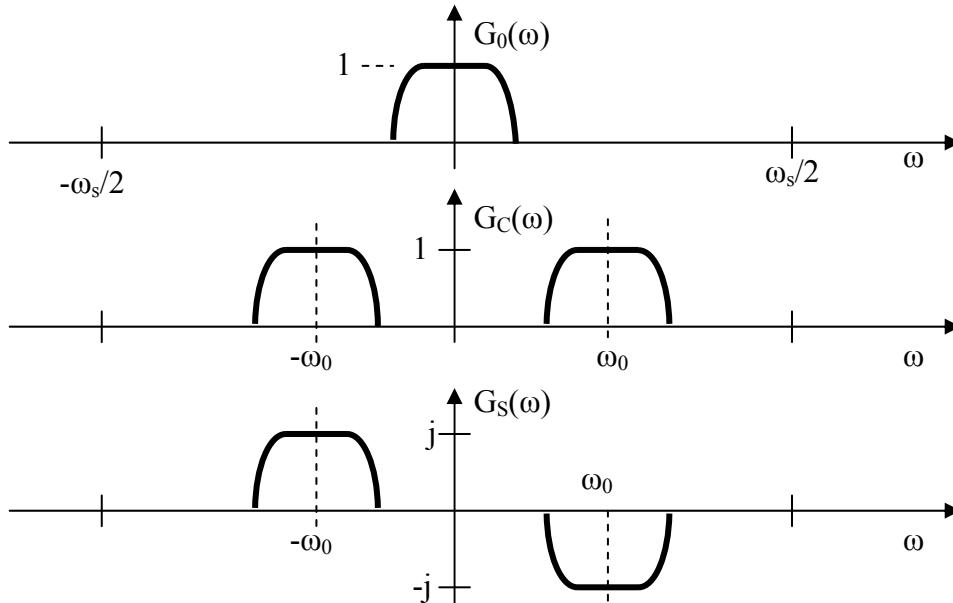
$$g_c(k) = 2g_0(k)\cos(k\omega_0 T) \quad g_s(k) = 2g_0(k)\sin(k\omega_0 T) \quad (4.87.)$$

Az ω_0 frekvencia legyen nagyobb az aluláteresztő határfrekvenciájánál, melynél a szűrő átvitele már elhanyagolhatóan kicsi. A koszinuszos modulációhoz tartozó átviteli függvény:

$$\begin{aligned} G_C(\omega) &= \sum_{k=-R}^R g_c(k) e^{-jk\omega T} = \sum_{k=-R}^R g_0(k) [e^{jk\omega_0 T} + e^{-jk\omega_0 T}] e^{-jk\omega T} = \\ &= \sum_{k=-R}^R g_0(k) e^{-j(\omega-\omega_0)kT} + \sum_{k=-R}^R g_0(k) e^{-j(\omega+\omega_0)kT} = \\ &= G_0(\omega - \omega_0) + G_0(\omega + \omega_0) \end{aligned} \quad (4.88.)$$

A szinuszos modulációhoz tartozó átviteli függvény:

$$\begin{aligned} G_S(\omega) &= \sum_{k=-R}^R g_s(k) e^{-jk\omega T} = -j \sum_{k=-R}^R g_0(k) [e^{jk\omega_0 T} - e^{-jk\omega_0 T}] e^{-jk\omega T} = \\ &= -j \sum_{k=-R}^R g_0(k) e^{-j(\omega-\omega_0)kT} + j \sum_{k=-R}^R g_0(k) e^{-j(\omega+\omega_0)kT} = \\ &= -jG_0(\omega - \omega_0) + jG_0(\omega + \omega_0) \end{aligned} \quad (4.89.)$$

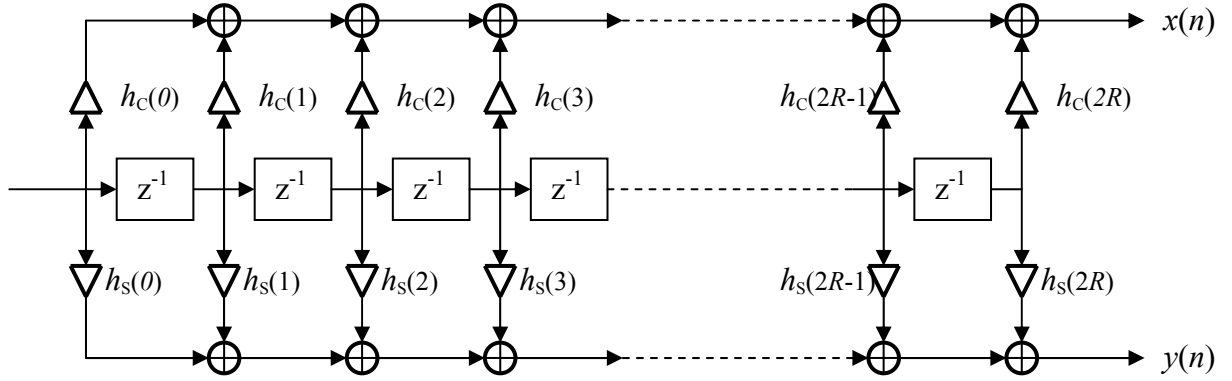


4.19. ábra. A $G_0(\omega)$, $G_c(\omega)$ és $G_s(\omega)$ átviteli karakterisztikája

A tervezett szűrőket a szokásos módon, az időtartományban történő eltolással tehetjük kauzálissá:

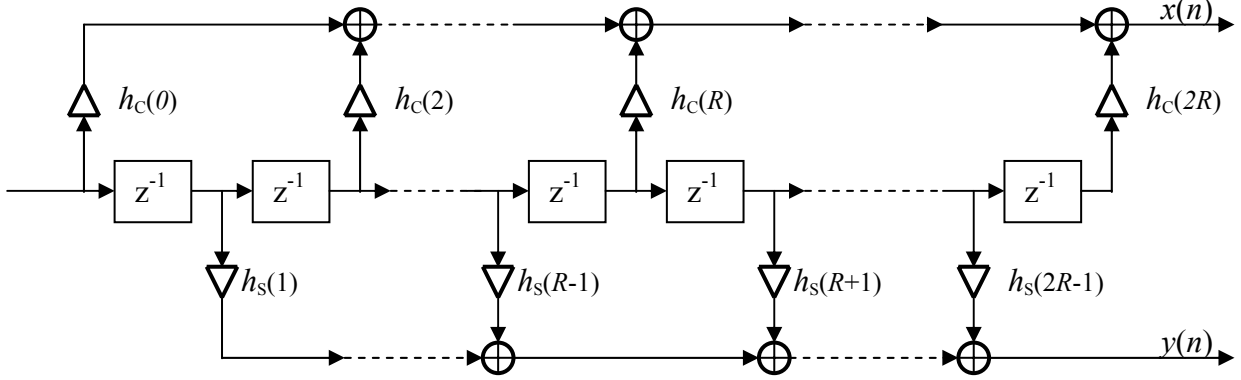
$$h_c(n) = g_c(n - R) \quad h_s(n) = g_s(n - R) \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2R \quad (4.90.)$$

Az így kapott kauzális szűrők fázisa lineáris oly módon, hogy a két kimenet között a 90° -os fázis különbség megmarad, míg amplitúdó karakterisztikájuk egyforma, sávszűrő jellegű.



4.20. ábra A Hilbert szűrőpár realizálása

Abban az esetben ha az $\omega_0 = \omega_s/4$, akkor a (4.87.)-ből következően $g_c(k)=0$, ha k : páratlan, illetve $g_s(k)=0$, ha: k : páros.



4.21. ábra A Hilbert szűrőpár az $\omega_0 = \omega_s/4$ esetében (R :páros)