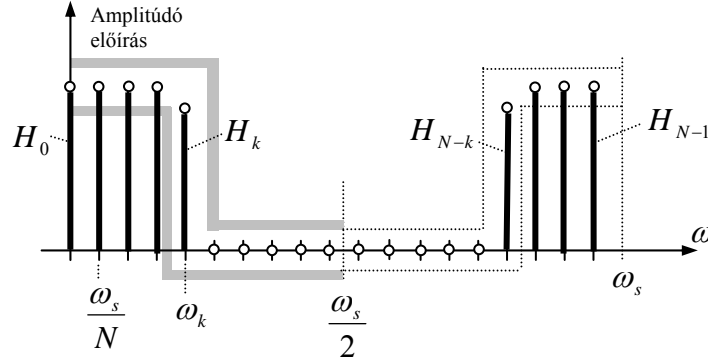


4.5. Frekvencia mintavételező szűrő

A frekvencia mintavételező tervezési eljárással olyan FIR szűrőt tudunk méretezni., melynél a diszkrét ω_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N-1$) frekvenciákon írjuk elő a szűrő H_k átvitelét (a specifikáció). Ennél az eljárásnál tehát a kívánt karakterisztikát a mintáival írjuk elő, innen a módszer neve. Az előírt pontokban az átvitel értéke egzaktul az előírt érték lesz, a köztes frekvenciákon viszont a módszer nem garantálja az amplitúdó karakterisztika kis ingadozását. Természetesen, ha az előírás pontjait sűrítjük, akkor várhatóan az eltérés is kisebb lesz. A módszer annyira fokú szűrőt eredményez, amennyi az előírások száma (N).



4.12. ábra Az amplitúdó követelmény megadása mintáival

A következőkben ismertetésre kerülő eljárásban a $[0 - \omega_s]$ tartományt N darab egyenlő közre osztjuk fel (ekvidisztáns felosztás). A specifikáció általában csak a $[0 - \omega_s/2]$ tartományban adott, ezért azt ki kell egészíteni a teljes sávra. Annak érdekében, hogy valós szűrő együtthatókat kapjunk, be kell tartani a szimmetria követelményeket, nevezetesen $H_{N-k} = H_k$ ha N páratlan, illetve $H_{N-k} = -H_k$ ha N páros (lásd később).

A frekvencia mintavételező eljárás lényege: az osztópontok felett u.n. **Lagrange-féle interpolációt** hajtunk végre olyan függvényekkel, amelyek FIR struktúrához vezetnek.

Elsőnek tekintsük az alábbi N -ed fokú egyenletet:

$$z^N = 1 = e^{jk2\pi} \quad (4.49.)$$

Ennek gyökei az u.n. egységgyökök:

$$z_k = e^{jk \frac{2\pi}{N}} \quad k=0..N-1 \quad (4.50.)$$

Az egységgyökök felhasználásával az interpoláló függvény:

$$F_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z_k z^{-1}} = \frac{1}{N} \frac{1 - z_k^N z^{-N}}{1 - z_k z^{-1}} \quad (4.51.)$$

A frekvenciatartományban az interpoláló függvények:

$$F_k(\omega) = F_k(e^{j\omega T}) = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{jk2\pi} e^{-jN\omega T}}{1 - e^{jk2\pi/N} e^{-j\omega T}} \quad (4.52.)$$

A (4.52.)-őt céljainknak megfelelően átalakítva:

$$F_k(\omega) = e^{-j(N-1)\omega T/2} e^{jk\pi(N-1)/N} \frac{1}{N} \frac{\sin(N(\omega - \omega_k)T/2)}{\sin((\omega - \omega_k)T/2)} \quad (4.53.)$$

ahol:

$$\omega_k = k \frac{\omega_s}{N} \quad (4.54.)$$

Ez a függvény kiválóan megfelel az interpoláció céljára, mert $F_k(\omega_k) = 1$, míg a többi osztáspontban $F_k(\omega_m) = 0$ (ha $\omega_m \neq \omega_k$).

A szűrő transzfer függvényét ezek után állítsuk elő a következő módon:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} H_k F_k(z) \quad (4.55.)$$

A függvény konstrukciójából következik, hogy:

$$H(\omega_m) = H(e^{j\omega_m T}) = \sum_{k=0}^{N-1} H_k F_k(\omega_m) = H_m \quad (4.56.)$$

amint azt vártuk.

A (4.55.)-be behelyettesítve (4.53.)-at, írhatjuk:

$$H(\omega) = e^{-j(N-1)\omega T/2} \sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{jk\pi(N-1)/N} \frac{1}{N} \frac{\sin(N(\omega - \omega_k)T/2)}{\sin((\omega - \omega_k)T/2)} \quad (4.57.)$$

Visszatérve a komplex frekvencia tartománybeli leíráshoz, arra törekszünk, hogy a szűrő együtthatóira a (méretezésre) összefüggéseket kapjunk. Ennek érdekében a (4.55.)-be helyettesítsük be (4.51.)-et:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} H_k F_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} H_k \frac{1}{N} \frac{1 - z_k^N z^{-N}}{1 - z_k z^{-1}} \quad (4.58.)$$

Itt felhasználtuk, hogy $z_k^N = 1$.

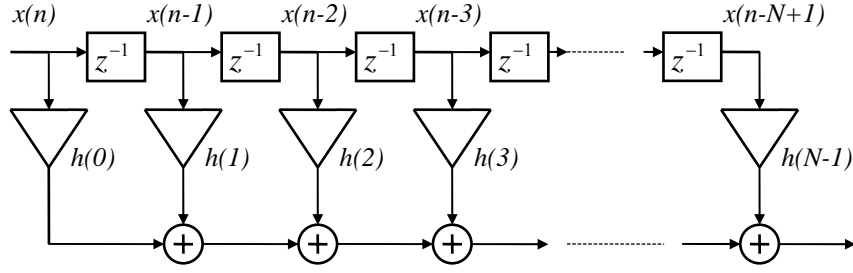
Az összegzésben szereplő kifejezés felfogható egy N tagból álló mértani sor összegének:

$$\frac{1 - z_k^N z^{-N}}{1 - z_k z^{-1}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{jk2\pi/n} z^{-1} \right)^n \quad (4.59.)$$

A fenti átalakítást (4.58.)-ba helyettesítve:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} H_k \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (4.60.)$$

aminek végső alakjában a **FIR szűrők megengedett transzfer függvényének** alakját ismerhetjük fel.



4.13. ábra A realizált FIR szűrő

A szűrő együtthatóira adódó összefüggés a (4.60.)-ből:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{j \frac{2\pi}{N} nk} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.61.)$$

Ez az összefüggés nem más, mint az inverz diszkrét idejű Fourier-transzformáció képlete.

$$h(n) = IDFT\{H_k\} \quad (4.62.)$$

vagyis a szűrő együtthatók vektorát a követelmény (vektorának) *IDTF*-jeként számíthatjuk ki.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett lesz

- a szűrő fáziskarakterisztikája lineáris és
- az együtthatók vektora valós.

A szűrő frekvencia válasza a (4.57.)-ből:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= e^{-j(N-1)\omega T/2} \sum_{k=0}^{N-1} H_k e^{jk\pi(N-1)/N} \frac{1}{N} \frac{\sin(N(\omega - \omega_k)T/2)}{\sin((\omega - \omega_k)T/2)} = \\ &= e^{-j(N-1)\omega T/2} \sum_{k=0}^{N-1} D_k \frac{1}{N} \frac{\sin(N(\omega - \omega_k)T/2)}{\sin((\omega - \omega_k)T/2)} \end{aligned} \quad (4.63.)$$

$$\text{ahol:} \quad D_k = H_k e^{jk\pi(N-1)/N} \quad (4.64.)$$

A (4.63.)-ből látható, hogy a szűrő fáziskarakterisztikája:

$$\varphi(\omega) = -\frac{N-1}{2} \omega T \quad (4.65.)$$

egzaktul lineáris, ha D_k valós. (A szumma alatti kifejezés így valós, fázisa zérus.)

Ez a feltétel úgy biztosítható, hogy a specifikációnak D_k **valós** értékeit tekintjük, és ezekből számítjuk ki a H_k értékeket:

$$H_k = D_k e^{-jk\pi(N-1)/N} \quad (4.66.)$$

A Fourier-transzformáció elméletéből ismert, hogy a (4.61.)-ben kiszámított $h(n)$ sorozat akkor lesz valós, ha a H_k sorozatban érvényesül a konjugált komplex szimmetria:

$$H_{N-k} = H_k^* \quad (4.67.)$$

(A “*” a konjugáltat jelenti.)

Ha a tervezésben D_k valós értékeket vesszük fel a $k \leq \frac{N}{2}$ pontokban ($\omega_k \leq \frac{\omega_s}{2}$), a (4.67.) szerinti megkötést kielégíthetjük D_{N-k} megfelelő megválasztásával ($\omega_{N-k} \geq \frac{\omega_s}{2}$).

A (4.64.)-ből, a (4.67.) felhasználásával írhatjuk:

$$D_{N-k} = H_{N-k} e^{j(N-k)\pi(N-1)/N} = H_k^* e^{j(N-k)\pi(N-1)/N} \quad (4.68.)$$

Mivel (4.66.)-ből:

$$H_k^* = D_k (e^{-jk\pi(N-1)/N})^* = D_k e^{jk\pi(N-1)/N} \quad (4.69.)$$

ezért:

$$D_{N-k} = D_k e^{jk\pi(N-1)/N} e^{j(N-k)\pi(N-1)/N} = D_k e^{j(N-1)\pi} \quad (4.70.)$$

Eredményünket egyszerűbben is felírhatjuk:

$$D_{N-k} = \begin{cases} D_k & N : \text{páratlan} \\ -D_k & N : \text{páros} \end{cases} \quad (4.71.)$$

Foglaljuk össze a tervezés lépéseit:

1. A $[0 \leq \omega_k \leq \frac{\omega_s}{2}]$ tartományban felvesszük D_k valós értékeket.
2. Az $[\frac{\omega_s}{2} \leq \omega_{N-k} < \omega_s]$ tartományban (4.71.) szerint választjuk meg D_{N-k} értékeit.
3. A (4.66.) szerint kiszámítjuk a H_k sorozatot (ezek már komplexek).
4. Elvégezzük a (4.62.) szerinti Fourier-transzformációt. Eredményül a $h(n)$ szűrő együtthatókat kapjuk.
5. Analízis program segítségével ellenőrizzük a szűrő átvitelét (Pld. a Matlab **freqz(.)** azonosítójú függvénye segítségével)
6. Ha a közbülső pontokban az átvitel kilép a specifikációból, akkor növeljük az osztópontok számát (N -et, a fokszámot).

A tervezés során, a specifikáció átmeneti tartományába eső, k -adik osztópontához tartozó D_k előírást célszerű paraméternek felvenni (lásd 4.8.ábra). Ezen előírás kis változtatásával ugyanis jelentősen befolyásolni lehet a karakterisztika alakulását az osztópontok közötti tartományokban. A megfelelő érték “bejátszásával” a foksám növelése nélkül is kielégítő eredményre juthatunk. (A kiindulási foksámra a korábbi módszerekkel adhatunk becslést.)

Egy érdekes struktúrához juthatunk el a $H(z)$ transzfer függvény (4.58.) alakjának algebrai átalakításával. (Most N páratlan, de lehetne páros is.)

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} H_k \frac{1}{N} \frac{1-z^{-N}}{1-z_k z^{-1}} = \frac{1}{N} (1-z^{-N}) \left[H_0 \frac{1}{1-z^{-1}} + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \left(\frac{H_k}{1-z_k z^{-1}} + \frac{H_{N-k}}{1-z_{N-k} z^{-1}} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{N} (1-z^{-N}) \left[P_0(z) + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} P_k(z) \right] \end{aligned} \quad (4.72.)$$

Ahol:

$$P_0(z) = \frac{H_0}{1-z^{-1}} \quad (4.73.)$$

$$P_k(z) = \frac{H_k}{1-z_k z^{-1}} + \frac{H_{N-k}}{1-z_{N-k} z^{-1}} = \frac{a_{0k} + a_{1k} z^{-1}}{1 + b_{1k} z^{-1} + z^{-2}} \quad (4.74.)$$

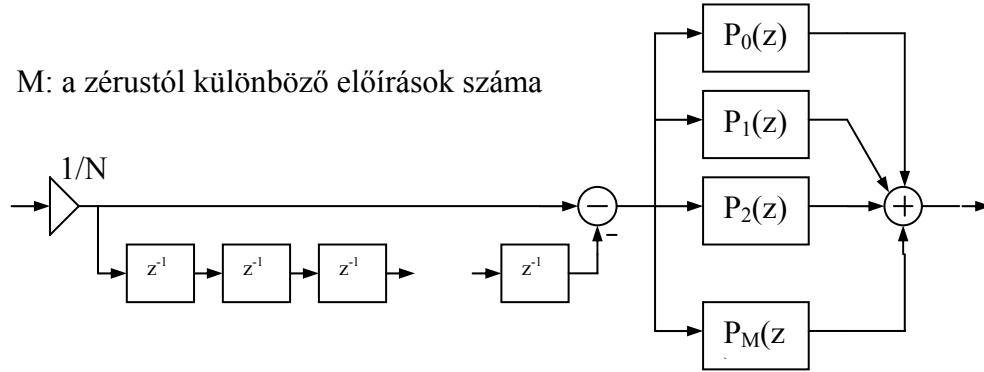
és:

$$a_{0k} = H_k + H_{N-k} = H_k + H_k^* = 2H_k^0 \cos\left(k\pi \frac{N-1}{N}\right) \quad (4.75.)$$

$$a_{1k} = -H_k z_{N-k} - H_{N-k} z_k = -(H_k z_k^* + H_k^* z_k) = -2H_k^0 \cos\left(k\pi \frac{N+1}{N}\right) \quad (4.76.)$$

$$b_{1k} = -(z_k + z_{N-k}) = -(z_k + z_k^*) = -2 \cos\left(k \frac{2\pi}{N}\right) \quad (4.77.)$$

A (4.75. – 77.) összefüggésekben kihasználtuk az előzőekben említett konjugált komplex szimmetriát. A (4.72.)-ből kiolvasható struktúra a 4.14. ábrán látható.



4.14. ábra Az u.n. “Frekvencia mintavételező” struktúra

Vegyük észre, hogy az ábrában szereplő P_0 , P_k első ill. másodfokú egységek rekurzív struktúrák (végtelen impulzus válasszal), miközben az egész hálózat véges impulzus válaszu. A rekurzív egységek a stabilitás határhelyzetében vannak, mivel pólusaik az egységkörön helyezkednek el (egység gyökök). Ezek a fokozatok vezérelt oszcillátoroknak tekinthetők, melyek frekvenciái a (pólusok) ideális esetben az előtte lévő (a késleltetőkből álló) fokozat zérusaival egyeznek meg (ui. ha b_{1k} egzaktul pontos: végtelen szóhosszúság).

Megjegyezzük, hogy a frekvencia mintavételező tervezési eljárás nem feltétlenül jelenti azt, hogy ezt a struktúrát kell választanunk (lásd 4.13. ábra).