

4.3. Tervezés ablakolással

A FIR szűrők ablakolással történő tervezését úgy fogjuk végezni, hogy a kívánt $D(\omega)$ karakterisztikát Fourier-sorba fejtjük, majd a $d(k)$ együtthatókat egy megfelelően választott $w(k)$ ablak függvénnyel súlyozzuk:

$$d(k) = \frac{1}{\omega_s} \int_0^{\omega_s} D(\omega) e^{jk\omega T} d\omega \quad (4.28.)$$

$$g(k) = w(k)d(k) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm R \quad (4.29.)$$

Az ablakolással a szűrő erősítés szintje megváltozik, ezért általában normalizálni kell az együtthatókat. Ha például az előírás zérus frekvencián 0 dB ($H(0) = 1$):

$$G(\omega = 0) = \sum_{k=-R}^R g(k) e^{-j\omega T} \Big|_{\omega=0} = \sum_{k=-R}^R g(k) = g_{sum} \quad (4.30.)$$

a kauzális szűrő $h(n)$ együtthatóit:

$$h(n) = \frac{1}{g_{sum}} g(n - R) \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (4.31.)$$

szerint kell megválasztani. Az eltolásnak megfelelően a tervezett szűrő lineáris fázisú lesz.

Az alábbiakban a leggyakrabban használatos ablakfüggvényeket tárgyaljuk.

1. Bartlett ablak

Legyen az ablak függvény Fourier transzformáltja a négyszögletes ablakfüggvényhez tartozó Fourier transzformált négyzetével arányos függvény:

$$W_B(\omega) = \frac{1}{M} [W_R(\omega)]^2 = \frac{1}{M} W_R(\omega) W_R(\omega) \quad (4.32..)$$

Ebben a függvényben a mellékurkok relatív súlya kisebb.

Ahol:

$$W_R(\omega) = \frac{\sin(M\omega T / 2)}{\sin(\omega T / 2)} \quad \text{és} \quad M = 2P + 1 \quad (4.33.)$$

A főhurok szélessége :

$$B = 2 \frac{\omega_s}{M} \quad (4.34.)$$

A (4.28)-nak megfelelően az időtartományban konvolúciót kell írunk:

$$w_B(k) = \frac{1}{M} w_R(k) * w_R(k) = \frac{1}{M} \sum_{m=-P}^P w_R(m) w_R(k - m) \quad (4.35.)$$

A konvolúció eredménye kifejezhető zárt alakban is. Az eredmény az u.n. **Bartlett** (háromszög) **ablak**:

$$w_B(k) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{M}, & |k| \leq M \\ 0, & |k| \geq M \end{cases} \quad (4.36.)$$

A Bartlett ablak hossza (a zérustól különböző súlyok száma) $N = 2M - 1$, amiből:

$$B = 2 \frac{\omega_s}{M} = 4 \frac{\omega_s}{N - 1} \quad (4.37.)$$

így a szükséges fókuszám :

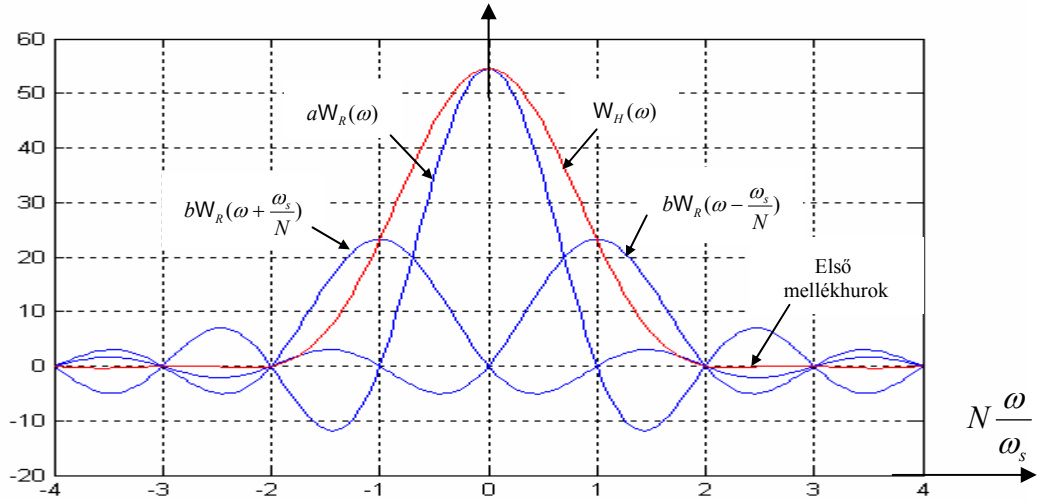
$$N_B \geq 4 \frac{\omega_s}{\omega_t} + 1 \approx 2N_R \quad (4.38.)$$

közel kétszerese a négyszögletes ablaknál kiszámítottak. Az elérhető első mellékátviteli hurok elnyomás kb. -40 dB.

2. Hamming (Hanning) ablak:

Az alkalmazott ötlet legyen most az, hogy $W_R(\omega)$ -t súlyozott eltoljaival kioltjuk (amennyire azt a függvény alakja megengedi) az első (legnagyobb) mellékburkokat. Ezért:

$$W_H(\omega) = aW_R(\omega) + bW_R(\omega - \frac{\omega_s}{N}) + bW_R(\omega + \frac{\omega_s}{N}) \quad (4.39.)$$



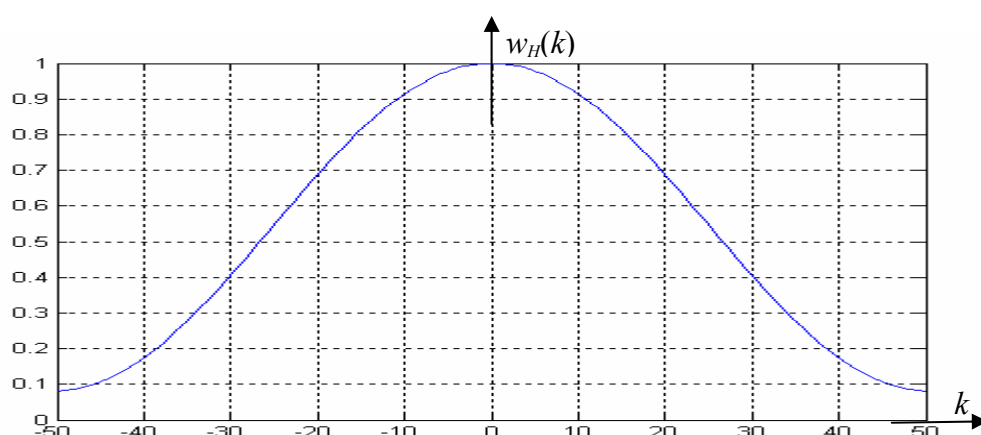
4.6.ábra A mellékburkok elnyomás a Hamming ablaknál

Az időtartományban (lásd: az eltolás-modulációs tételt):

$$w_H(k) = aw_R(k) + bw_R(k)e^{jk\omega_s T/N} + bw_R(k)e^{-jk\omega_s T/N} \quad (4.40.)$$

Az összevonásokat elvégezve kapjuk a **Hamming** (Hanning) **ablakot**:

$$w_H(k) = \left(a + 2b \cos \frac{2\pi k}{2R+1} \right) w_R(k) \quad \text{ha} \quad |k| \leq R \quad (4.41.)$$



4.7. ábra A Hamming ablakoló sorozat

A konstansok: Hamming ablaknál : **a=0.54 2b=0.46**
 Hanning ablaknál : **a=0.5 2b=0.5**

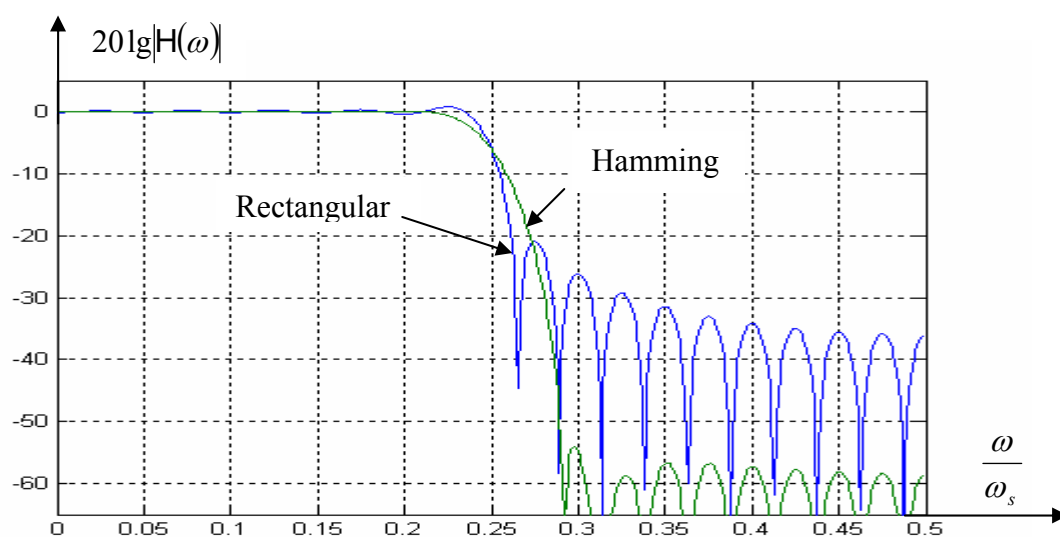
A főhurok szélessége: $B = 4 \frac{\omega_s}{N}$ (4.42.)

amiből a szükséges foksám:

$$N_H \geq N = 4 \frac{\omega_s}{\omega_t} \quad (4.43)$$

Összehasonlítva N_H -t a négyszögletes ablaknál kapott eredménnyel (4.27.) megállapítható, hogy ugyanakkora átmeneti tartomány (levágási meredekség) eléréséhez a

fokszámnak közel kétszeresnek kell lennie. A 4.8. ábrán egy azonos foksámú négyszögletes ablakkal ($N_R=101$) és egy Hamming ablakkal ($N_H=101$) tervezett szűrő átviteli karakterisztikáját látjuk:



4.8.ábra Az ablakfüggvény hatása az átviteli karakterisztikára

Hasonlítsuk össze a két görbe alakját! Láthatjuk, hogy azonos fókuszszám mellett az átviteli függvény ingadozása lényegesen lecsökkent, ugyanakkor az átmeneti tartomány kiszélesedett. Hamming ablakkal az elérhető mellékhangok elnyomás kb. -60 dB.

3. Blackman ablak:

A módszer hasonló az előbbi eljáráshoz: $W_R(\omega)$ további súlyozott eltoltaival jobb mellékhangok kioltást lehet elérni a frekvenciatartományban.

$$W_{Bl}(\omega) = aW_R(\omega) + bW_R(\omega - \frac{\omega_s}{N}) + bW_R(\omega + \frac{\omega_s}{N}) + cW_R(\omega - 2\frac{\omega_s}{N}) + cW_R(\omega + 2\frac{\omega_s}{N})$$

Az időtartományban az eltolás-moduláció tétel alkalmazásával írhatjuk:

$$w_{Bl}(k) = \begin{cases} a + 2b \cos \frac{2\pi k}{2R+1} + 2c \cos \frac{4\pi k}{2R+1} & \text{ha } |k| \leq R \\ w_H(k) = 0 & \text{ha } |k| > R \end{cases} \quad (4.45.)$$

A legjobb frekvenciatartománybeli kioltás (kb -80 dB) az

$$a=0.42 \quad 2b=0.5 \quad 2c=0.08$$

értékek mellett biztosítható.

A főhurok szélessége: $B = 6 \frac{\omega_s}{N}$

amiből a szükséges fókuszszám: $N_{Bl} \geq N = 6 \frac{\omega_s}{\omega_t}$ (4.46.)

4. Kaiser ablak:

Az alkalmazott ablak függvény:

$$w_K(k) = \frac{I_0 \left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{k}{R} \right)^2} \right)}{I_0(\beta)} w_R(k) \quad (4.47.)$$

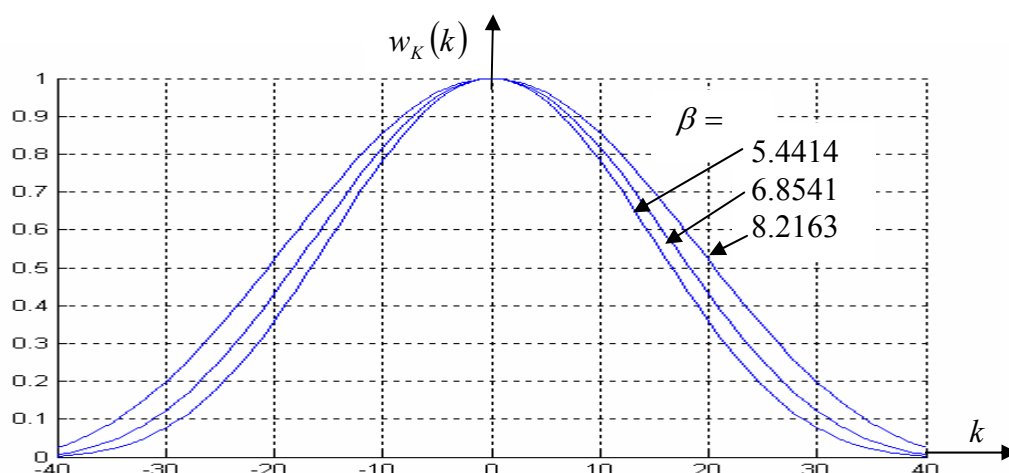
ahol $I_0(.)$ az elsőfajú, zérus rendű, módosított Bessel függvény. A β paraméter értékét a:

$$\beta = \pi \sqrt{\left(R \frac{\omega_t}{\omega_s} \right)^2 - 1} \quad (4.48.)$$

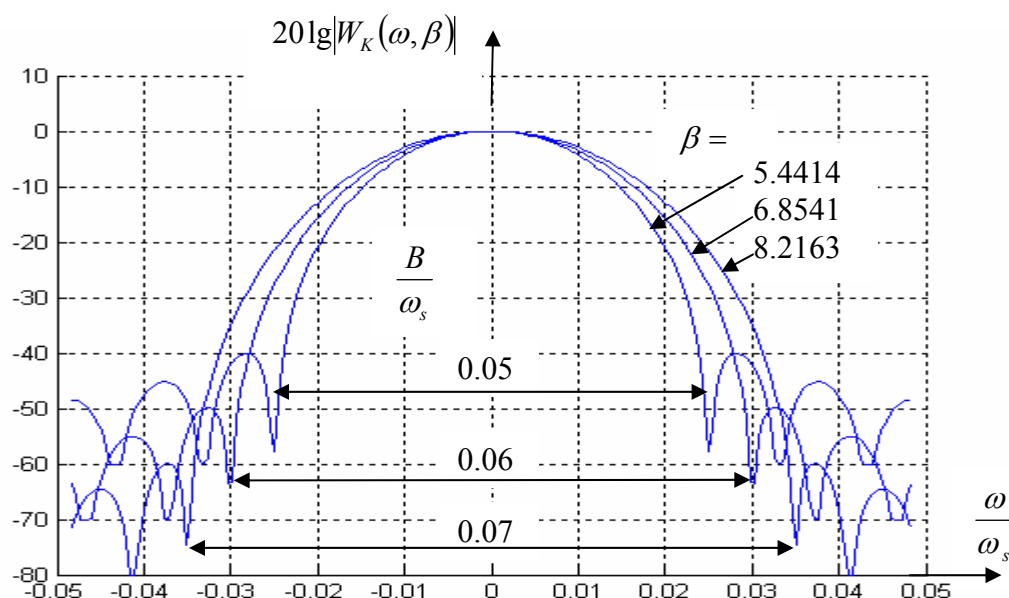
összefüggés szerint választjuk meg.

Hasonlítsuk össze az azonos fókuszszámú Hamming- és Kaiser ablakot. Az átmeneti tartomány szélessége is legyen azonos. Hamming ablaknál az átmeneti sáv relatív szélessége az $N=2R+1$ fókuszszám esetén (lásd 4.43.-at):

$$\frac{\omega_t}{\omega_s} = \frac{4}{2R+1} \quad \text{és így:} \quad \beta = \pi \sqrt{\left(\frac{4R}{2R+1} \right)^2 - 1} \approx \pi \sqrt{3} = 5.44$$



4.9.ábra A Kaiser ablak $N=81$ esetén, különböző β értékekre



4.10. ábra. A fenti ablakfüggvényekhez tartozó $W_K(\omega)$ függvények

4.4. Optimális FIR szűrő tervezése (Parks-McClellan algoritmus)

Ez a **számítógépes algoritmus** lehetővé teszi az egyenletes amplitúdó ingadozású, lineáris fázisú átviteli karakterisztikák approximációját. Annyiban optimális az eljárás, hogy az adott specifikációt a legkisebb fokszámmal, vagy adott foksám esetén a legkisebb amplitúdó ingadozással keresi meg a FIR szűrő együtthatóit.

Az algoritmus ez utóbbi esetben:

1. A kiindulásként felvett szűrő együtthatókkal megkeresi azt a frekvenciát amelynél a súlyozott hiba maximális, majd

2. ezt a hibát minimalizálja az együtthatók megváltoztatásával.
Ez a módszer (Remez féle kicserélési algoritmus) tipikus minmax tervezési eljárás.

$$\min_{g(k)} \left\{ \max_{\omega} [Q(\omega) |D(\omega) - G(\omega)|] \right\}$$

A $Q(\omega)$ a hiba súlyozó függvénye, frekvencia tartományonként konstans érték. Segítségével az egyes tartományokban megengedett ingadozás értékek aránya állítható be. Az algoritmus számos implementációja megtalálható bizonyos program rendszerekben (pld MATLAB).

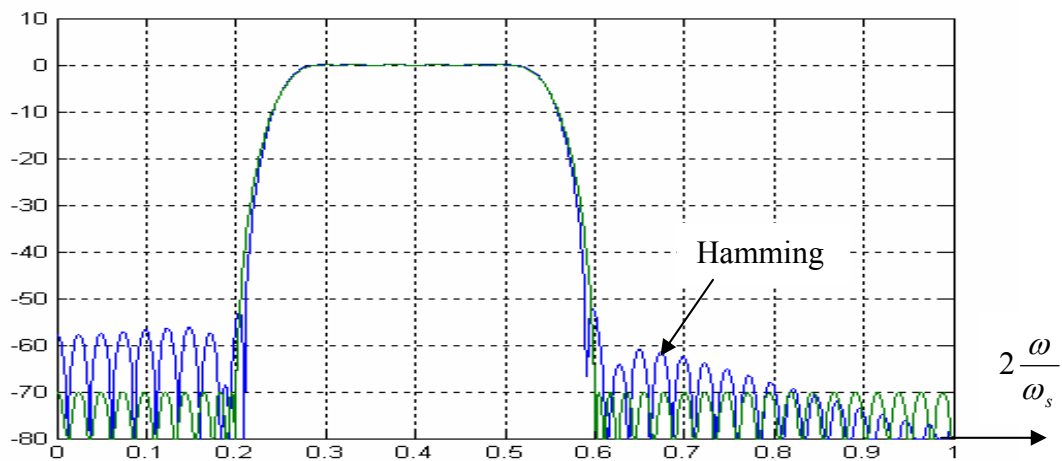
MATLAB -ban a hívandó eljárás:

$\mathbf{h} = \text{remez}(N-1, \mathbf{F}, \mathbf{D});$ vagy $\mathbf{h} = \text{remez}(N-1, \mathbf{F}, \mathbf{D}, \mathbf{Q});$

ahol:

\mathbf{h}	Az együtthatók N dimenziós vektora	$\dim(\mathbf{h}) = N$
\mathbf{F}	A frekvencia tartományokat leíró vektor (Nyquist sáv: 0-1)	
\mathbf{D}	Az előírást leíró vektor	$\dim(\mathbf{D}) = \dim(\mathbf{F})$
\mathbf{Q}	Súlyozó vektor	$\dim(\mathbf{Q}) = \dim(\mathbf{F})/2$

Például: $\mathbf{h} = \text{remez}(83, [0, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6, 1.0], [0, 0, 1, 1, 0, 0])$



4.11. ábra Az optimális szűrő átviteli karakterisztikája, összehasonlítva a Hamming ablakkal tervezett szűrő átvitelével ($N=83$)