

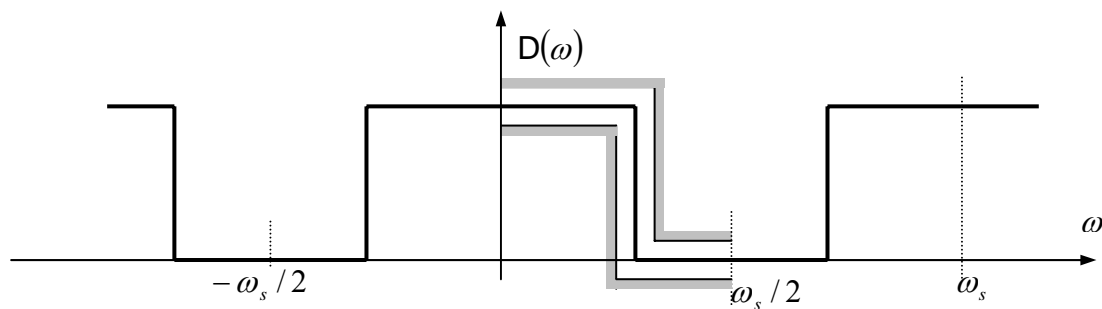
4. Lineáris fázisú FIR szűrők tervezése

4.1. Tervezés Fourier sorfejtéssel

A FIR szűrők impulzusválasza véges, a folytonos-idejű szűrőké végtelen idő kiterjedésű, ezért a két szűrő osztály között nem teremthető analógia. FIR szűrők tervezésére ezért alapvetően más módszereket fogunk használni.

A véges impulzusválasz ugyanakkor lehetővé teszi, hogy ideálisan **lineáris fázisú** (konstans csoportfutási idejű) szűrőket tervezzünk.

Legyen az **amplitúdó követelményt** leíró függvény $D(\omega)$. Ez egy általunk (a tolerancia séma közepében felvett) valós, tipikusan szakaszonként konstans értékű, a mintavételi frekvencia szerint periódikus függvény:



4.1. ábra A kívánt amplitúdó karakterisztika

Ez a függvény előállítható Fourier-sorával:

$$D(\omega) = D(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d(n) e^{-jn\omega T} \quad (4.1.)$$

ahol a Fourier-sor együtthatóit a:

$$d(n) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} D(e^{j\omega T}) e^{jn\omega T} d\omega \quad (4.2.)$$

összefüggéssel számíthatjuk ki. Mivel $D(\omega)$ valós, páros függvény, ezért a $d(n)$ sorozat is valós, páros sorozat ($d(-n)=d(n)$).

Az N -ed fokú, kauzális FIR szűrő megengedett transzfer függvénye:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (4.3)$$

A frekvenciatartományban az átviteli függvény:

$$H(\omega) = H(e^{j\omega T}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-jn\omega T} \quad (4.4.)$$

Vegyük észre, hogy a (4.1.) alak hasonlít a FIR szűrők (4.4.) alakú átviteli függvényére, eltekintve a végtelen fokszámtól és a negatív indexektől (kauzalitás)!

Ez a hasonlóság lesz a tervezés alapgondolata.

Első lépésben az átviteli függvényt a $D(\omega)$ véges Fourier-sorával fogjuk közelíteni. Az így kapott véges, nem-kauzális sorozatot ezután az időtartományban eltoljuk annyival, hogy a sorozat kauzális (realizálható) legyen.

Mivel $D(\omega)$ -át valós függvénynek vettük fel, annak fázisa azonosan zérus volt. Az időtartományban eltoltsorozathoz tartozó átviteli függvény fáziskarakterisztikája az eltolási tételnek megfelelően, egzaktul lineáris lesz. A fáziskarakterisztika meredeksége (a csoport futási idő) az eltolás nagyságával egyezik meg. A szűrő által okozott jel késleltetés jelentős lesz, melynek nagysága csak a tervezés során alakul ki (ugyanis a választott fokszámtól függ).

A fenti gondolatmenetet követve válasszuk a szűrő foksámát páratlanra!

$$N - 1 = 2R \quad (4.5.)$$

A megengedett kauzális $H(z)$ átviteli függvényt írjuk fel egy nem-kauzális $G(z)$ függvény segítségével:

$$H(z) = z^{-R} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-(n-R)} = z^{-R} G(z) \quad (4.6.)$$

melyben:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-(n-R)} = \sum_{k=-R}^R h(k+R) z^{-k} = \sum_{k=-R}^R g(k) z^{-k} \quad (4.7.)$$

ahol:

$$g(k) = h(k+R) \quad \text{és: } k = -R, \dots, +R \quad (4.8.)$$

A (4.7.)-ben a $n = k + R$ indexcserét alkalmaztuk, így a $g(k)$ nem-kauzális sorozatot a kauzális $h(n)$ sorozat R -el történő "eltolásával" állítottuk elő (eltolási tétel).

A (4.6.) a frekvencia tartományban:

$$H(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega RT} G(e^{j\omega T}) \quad (4.9.)$$

Amennyiben a $G(e^{j\omega T})$ fázisa zérus, a szűrő $\varphi(\omega)$ fáziskarakterisztikája:

$$\varphi(\omega) = -\omega RT \quad (4.10.)$$

egzaktul lineáris.

A (4.7.) alapján:

$$G(\omega) = G(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-R}^R g(k) e^{-jk\omega T} \quad (4.11.)$$

Most már érvényesíthetjük a (4.1.) és a (4.11.) között észrevett hasonlóságot!

A (4.2.) szerinti sorfejtést megfelelően nagy indexhatárig (R) elvégezve, azt várjuk, hogy:

$$G(e^{j\omega T}) \approx D(e^{j\omega T}) \quad (4.12.)$$

ha

$$g(k) = \begin{cases} d(k), & |k| \leq R \\ 0, & |k| > R \end{cases} \quad (4.13.)$$

A méretezési lépések tehát:

1. A tolerancia sémába megrajzoljuk $D(\omega)$ -át (a teljes periódusra!).
2. A (4.2.) felhasználásával kiszámítjuk $d(k)$ -t, $k=0,1,2,\dots,R$ -re ($d(-k) = d(k)$).
3. A (4.13.) szerint: $g(k) = d(k)$
és így (4.8.) felhasználásával:

$$h(n) = g(n-R) \quad \text{ahol} \quad n = 0,1,\dots,2R \quad (4.14.)$$

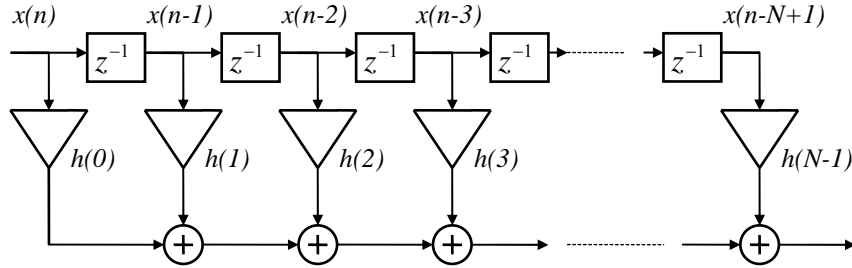
4. A véges Fourier-sor miatt ellenőrzés képpen kiszámítjuk a

$$|H(e^{j\omega T})| = |e^{-jR\omega T} G(e^{j\omega T})| = |G(e^{j\omega T})| \quad (4.15.)$$

transzfer függvényt (lásd 4.11.) (Analízis feladat).

Ha az eredmény nem tesz eleget a toleranciáknak, növeljük R -et és 2.-től kezdve ismétljük az eljárást.

5. A $h(n)$ ismeretében a realizálandó szűrő:



4.2. ábra FIR szűrő realizálása

Felmerül a kérdés, a (4.13.)-ban tett $g(k) = d(k)$ választás optimális-e? Ha igen, milyen értelemben? Az analízis kapcsán ugyanis azt tapasztaljuk, hogy a véges Fourier-sorral való közelítés miatt mind az áteresztő, mind a záró tartományban meglehetősen nagy ingadozást kapunk, és a foks szám növelése nem feltétlenül csökkenti annak mértékét (**Gibbs oszcilláció**).

A véges Fourier-sorral történő közelítés a négyzetes hibát minimalizálja, és ebben az értelemben véve optimális. Ezt az állítást a Parseval-tétel segítségével bizonyíthatjuk.

A frekvencia karakterisztika hibája:

$$E(\omega) = D(e^{j\omega T}) - G(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d(k)e^{-jk\omega T} - \sum_{k=-R}^R g(k)e^{-jk\omega T} \quad (4.16)$$

Az index szerint átcsoportosítva:

$$E(\omega) = \sum_{|k| \leq R} (d(k) - g(k))e^{-jk\omega T} + \sum_{|k| > R} d(k)e^{-jk\omega T} \quad (4.17.)$$

A közelítés jóságát az $E(\omega)$ hibafüggvény abszolútérték négyzetének egy periódusra vett integráljaként definiált, ε^2 nagysága szerint értékeljük.

A Parseval-tétel értelmében ε^2 a Fourier-sorával is kifejezhető:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\omega_s} \int_{\omega=0}^{\omega_s} |E^*(\omega)|^2 d\omega = \sum_{|k| \leq R} |d(k) - g(k)|^2 + \sum_{|k| > R} |d(k)|^2 \quad (4.18.)$$

Rögzített R esetén a $g(k) = d(k)$ választás az ε^2 értékét minimalizálja (mivel a (4.18.)-ban az első összeg így zérus, a második pedig csak a specifikációtól függ, a választott $g(k)$ szűrő együtthatóktól pedig nem). A Fourier-sor tehát a négyzetes hiba integrálját minimalizálja és így, ebben az értelemben optimális.

4.2. A Gibbs oszcilláció

A véges Fourier-sorral történő közelítés hibáját szemléltessük egy numerikus példával!

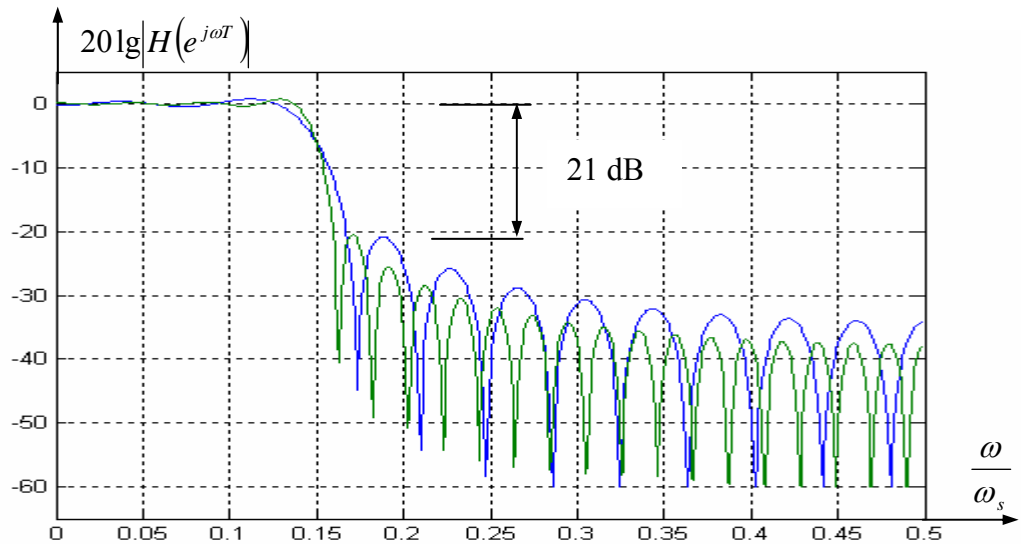
Legyen a tervezendő szűrő aluláteresztő, a kívánt $D(\omega)$ karakterisztika:

a $[0 - \omega_h]$ tartományban legyen 1, az $[\omega_h - \frac{\omega_s}{2}]$ tartományban pedig 0.

A (4.2.) alapján:

$$d(n) = \frac{1}{\omega_s} \int_0^{\omega_s} D(\omega) e^{jn\omega T} d\omega = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_h}^{\omega_h} e^{jn\omega T} d\omega = 2 \frac{\omega_h}{\omega_s} \frac{\sin 2\pi n \frac{\omega_h}{\omega_s}}{2\pi n \frac{\omega_h}{\omega_s}} = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \quad (4.19.)$$

Az így megtervezett szűrő amplitúdó karakterisztikáját látjuk a 4.3. ábrán, az $\omega_h = 0.15\omega_s$ paraméter választással, $N=21$ illetve $N=41$ értékek mellett.



4.3. ábra A véges Fourier-sorral nyert amplitúdó karakterisztika

Mint az ábrából látható, az N növelésével (közel kétszeres érték!) a karakterisztika meredeksége változik az átmeneti tartományban, az ingadozás mértéke azonban állandó marad.

A záró tartomány szélén elért 21 dB-es csillapítás általában kevés, ugyanakkor a sáv másik szélén esetleg erősen túlteljesítjük az előírást. Ez azt mutatja, hogy a módszerben van tartalék, de az optimumot másként kell megfogalmazni.

A Gibbs oszcilláció okát keresve, az eddig követett módszert tárgyaljuk egy kissé más formalizmussal. A véges sorozatra való áttérést hajtsuk végre úgy, hogy a végtelen $d(k)$ sorozatot szorozzuk meg egy véges tartójú ablak (window) függvénnyel, $w_R(k)$ -val.

$$g(k) = w_R(k) d(k) \quad k = -\infty \dots +\infty \quad (4.20.)$$

ahol $w_R(k)$ az u.n. négyszögletes (rectangular) ablak sorozat:

$$w_R(k) = \begin{cases} 1 & |k| \leq R \\ 0 & |k| > R \end{cases} \quad (4.21.)$$

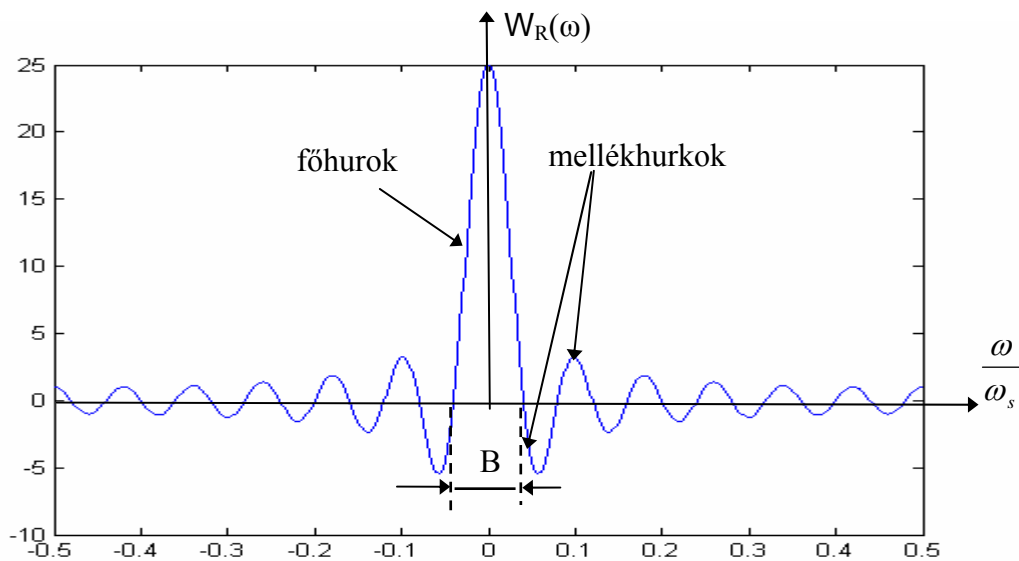
Az időtartományban történő szorzás (4.20.), a frekvenciatartományban konvolúciónak felel meg:

$$G(\omega) = G(e^{j\omega T}) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} W_R(\nu - \omega) D(\nu) d\nu \quad (4.22.)$$

Az ablak sorozat Fourier-transzformáltja:

$$\begin{aligned} W_R(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_R(k) e^{-jk\omega T} = \sum_{k=-R}^R e^{-jk\omega T} = e^{jR\omega T} \frac{1 - e^{-j(2R+1)\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = \\ &= e^{jR\omega T} \frac{e^{-j(2R+1)\omega T/2}}{e^{-j\omega T/2}} \frac{e^{j(2R+1)\omega T/2} - e^{-j(2R+1)\omega T/2}}{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}} \end{aligned} \quad (4.23.)$$

$$W_R(\omega) = \frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} \quad \text{ahol} \quad N = 2R + 1 \quad (4.24.)$$



4.4.ábra A $W_R(\omega)$ függvény egy periódusa $N=25$ esetén

A 4.22.-ben felírt konvolúció megadja az összefüggést az előírt (ideális) és a tényleges karakterisztika között. A konvolúció következtében a karakterisztika torzulni fog. A torzulás mértéke és jellege a konvolúcióban szereplő másik függvénytől függ alapvetően.

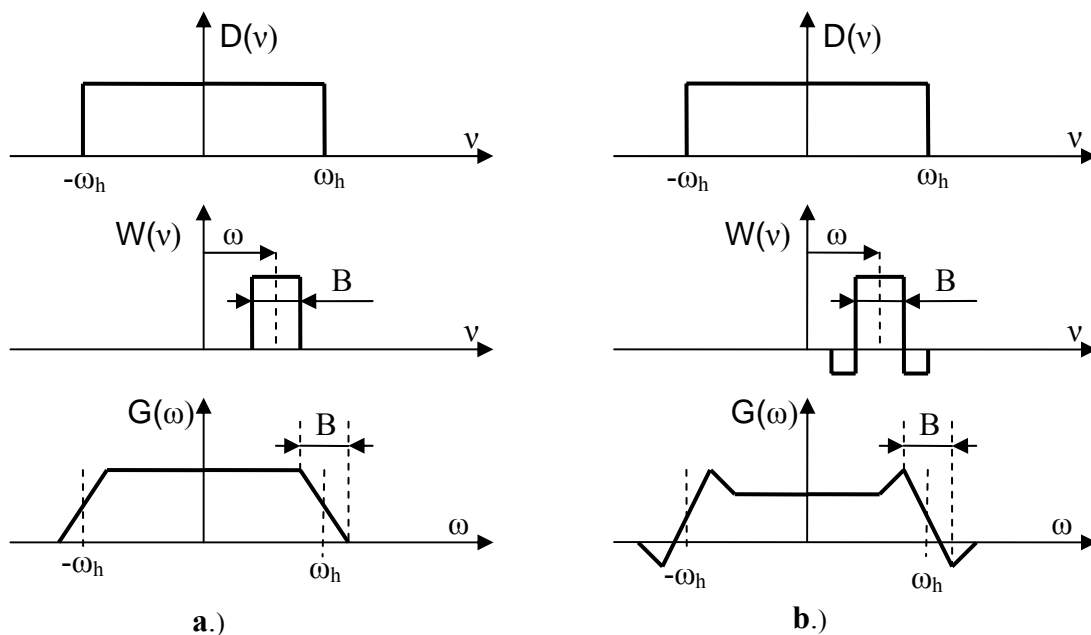
Torzulás akkor nem következne be, ha a konvolúció másik függvénye Dirac-delta típusú függvény lenne. (Ez a megoldás végtelen tartójú négyszögletes ablakot jelentene az időtartományban.) A Gibbs-oszcilláció oka az, hogy a $W_R(\omega)$ függvény eltér a Dirac-delta függvénytől.

Annak érdekében, hogy megértsük a Gibbs-oszcilláció okát, egyszerűsítsük le a $W_R(\omega)$ függvény alakját azért, hogy a:

$$G(\omega) = \frac{1}{\omega_s} \int_{\omega_s}^{\omega_s} W_R(\nu - \omega) D(\nu) d\nu$$

integrált grafikusan is el tudjuk végezni.

A 4.5.a. ábrán a $W_R(\omega)$ függvényt a főhurokot reprezentáló egyetlen négyszög-impulzussal közelítjük. A 4.5.b. ábrán az első mellékharokokat is figyelembe vettük.



4.5. ábra A konvolúció grafikus módszerrel történő elvégzése

Vegyük észre, hogy ha nem négyszögletes függvényeket használnánk $W_R(\omega)$ közelítésére, akkor az eredmény csak annyiban lenne más, hogy az eredmény-függvényben a ferde szakaszok nem egyenesek, hanem görbék lennének. A töréspontok helye, és az eredmény jellege azonban nem változna.

A $W_R(\omega)$ függvény a Dirac-delta függvénytől alapvetően két paraméterében különbözik:

1. A főhurok véges B sávszélessége:

$W_R(\omega)$ egy periódusra eső zérus helyei:

$$\omega_m = m \frac{\omega_s}{N} \quad \text{ahol:} \quad m = 1 \dots (N-1). \quad (4.25.)$$

Amiből a főhurok szélessége:

$$\omega_t = B = 2 \frac{\omega_s}{N} \quad (4.26.)$$

A konvolúció következtében a végtelen meredekségű szakaszok véges meredekségűvé válnak. A zérus szélességű éles átmenet B szélességűvé “kenődik” szét. Így alakul ki az a karakterisztika ω_t átmeneti tartománya.

Mivel az átmeneti tartomány specifikációs adat, ezt felhasználhatjuk a szűrő fokszámanak kiszámítására:

$$N_R \geq N = 2 \frac{\omega_s}{\omega_t} \quad (4.27.)$$

2. A mellékfurkok alatti véges terület:

A konvolúciós integrálban a **mellékfurkok** (az alattuk lévő területtel arányos) **hullámosságot okoznak**. A főhurokhoz legközelebb lévő mellékfurkok alatti terület a legnagyobb, ezért az átviteli függvényben a határfrekvenciához legközelebb eső áteresztő- és záró tartománybeli hullám amplitúdója a legnagyobb (lásd a 4.3. ábrát).

Ha a négyszögletes ablakkal kapott átviteli függvény nem kielégítő, akkor más ablakot kell használnunk. A korábban kiszáított négyzetes hiba (azonos foksám mellett) igaz ilyenkor nagyobb lesz, de a függvény toleranciáinak elosztása az átviteli karakterisztika szempontjából kedvezőbben alakul.

A fenti analízis azért volt hasznos, mert kijelöli a követendő utat:

Olyan **véges hosszúságú** ablakoló sorozatokat keresünk, melyek Fourier-transzformáltjában a **mellékfurkok** alatti területek a főhurok területéhez viszonyítva **kicsik**.