

5. Hullámdigitális szűrők

A folytonos-idejű **passzív LC szűrők kedvező érzékenység tulajdonságai** felvetik azt a kérdést, hogy lehetséges-e az ezen tulajdonságokat megtartó, az eredetivel ekvivalens diszkrét-idejű megvalósítás?

Az ötlet lehetne az, hogy készítsük el a hálózat valós idejű emulációját, azaz számítsuk ki a teljes hálózatban a feszültség- és áram értékeket minden mintavételi időpontban. Ez az elképzelés azonban sajnos megdől azon, hogy az ezzel a módszerrel késleltetés mentes hurkok alakulnak ki, és így a hálózatot leíró differencia egyenletrendszer “nem-kiszámítható” lesz.

Azonban, ha a hálózat leírására a **reflexiós paramétereket** használjuk, a feladat kiszámíthatóvá válik. A hullámdigitális szűrőknél tehát, egy a specifikációt kielégítő folytonos-idejű RLC hálózatból (az u.n. referens szűrőből) indulunk ki, és a **hálózat** (a struktúra) **transzformációjával** állítjuk elő a diszkrét-idejű hullámdigitális szűrőt.

Az impedancia elemek diszkrét-idejű reflexiós paramétereinek meghatározásakor a bilineáris transzformációt fogjuk használni, ezért a referens szűrőnek az előtorzított specifikációt kell kielégítenie (lásd 3.fejezet).

5.1. Reflexiós paraméterek

Elsőnek az impedancia elemek reflexiós paramétereit határozzuk meg. Ha az impedancia elemen a feszültség és az áram U és I (passzív mérőirány, lásd 5.1. ábra), akkor a reflexiós paraméterek:

$$\begin{aligned} A &= U + IR \\ B &= U - IR \end{aligned} \quad (5.1.)$$

Az A -t a beeső hullámnak, míg a B -t a reflektált hullámnak nevezzük. Az (5.1.) szerinti definícióban R az impedancia elem normalizáló ellenállása (a hullámimpedancia), értékét később fogjuk meghatározni.

Az inverz formulák:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(A + B) \\ I &= \frac{1}{2R}(A - B) \end{aligned} \quad (5.2.)$$

Tekintsük az $S = B/A$ hányadost (a reflexiós tényezőt) transzfer függvénynek!

$$S = \frac{B}{A} = \frac{U - IR}{U + IR} = \frac{IZ - IR}{IZ + IR} = \frac{Z - R}{Z + R} \quad (5.3.)$$

ahol kihasználtuk, hogy a Z impedancián a feszültség: $U = I Z$.

Vizsgáljuk meg, hogyan alakul ez a transzfer függvény az L , C , R impedancia elemek esetében. Első lépésként helyettesítsük (5.3.)-ba az operátoros impedanciát, majd válasszuk meg a normalizáló ellenállást R -et, végül az s Laplace-féle komplex frekvencia változót helyettesítsük a bilineáris transzformációnak megfelelően:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (5.4.)$$

1. **Induktivitás** esetén $Z = sL$, amivel a transzfer függvény:

$$S = \frac{Z - R}{Z + R} = \frac{sL - R}{sL + R} \Big|_{R=L} = \frac{s - 1}{s + 1} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = -z^{-1} \quad (5.5.)$$

Az $R=L$ választással egyszerű eredményt kaptunk, mely szerint a folytonos idejű induktivitásnak diszkrét-időben egy invertáló késleltető elem felel meg.

2. **Kapacitás** esetén $Z = 1/sC$, amivel a transzfer függvény:

$$S = \frac{Z - R}{Z + R} = \frac{\frac{1}{sC} - R}{\frac{1}{sC} + R} \Big|_{R=\frac{1}{C}} = \frac{1 - s}{1 + s} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = z^{-1} \quad (5.6.)$$

Az $R = \frac{1}{C}$ választással a transzfer függvény egy késleltető.

3. **Ellenállás** esetén (pld a lezárás) $Z = R_2$

$$S = \frac{Z - R}{Z + R} = \frac{R_2 - R}{R_2 + R} \Big|_{R=R_2} = \frac{R_2 - R_2}{R_2 + R_2} = 0 \quad (5.7.)$$

Az $R = R_2$ választással a transzfer függvény zérus, amit úgy értelmezünk, hogy az A beeső hullámtól függetlenül, a B reflektált hullám azonosan zérus. Ha az R_2 ellenálláson a feszültség U_2 , a beeső hullám (5.1.) alapján:

$$A = U + IR = U + \frac{U}{R_2} R = U \left(1 + \frac{R}{R_2} \right) \Big|_{R=R_2} = 2U_2 \quad (5.8.)$$

az ellenálláson (az esetleges kimeneten) lévő feszültség kétszerese.

4. **Feszültség generátor** (Thevenin helyettesítő kép)

Ebben az esetben nem tudunk transzfer függvényt értelmezni. A generátor kapcsain most is passzív mérőirányt veszünk fel (lásd 5.1. ábra). A generátor U_g forrás feszültsége és az U kapocsfeszültség közötti kapcsolat:

$$U = U_g + IR_1 \quad (5.9.)$$

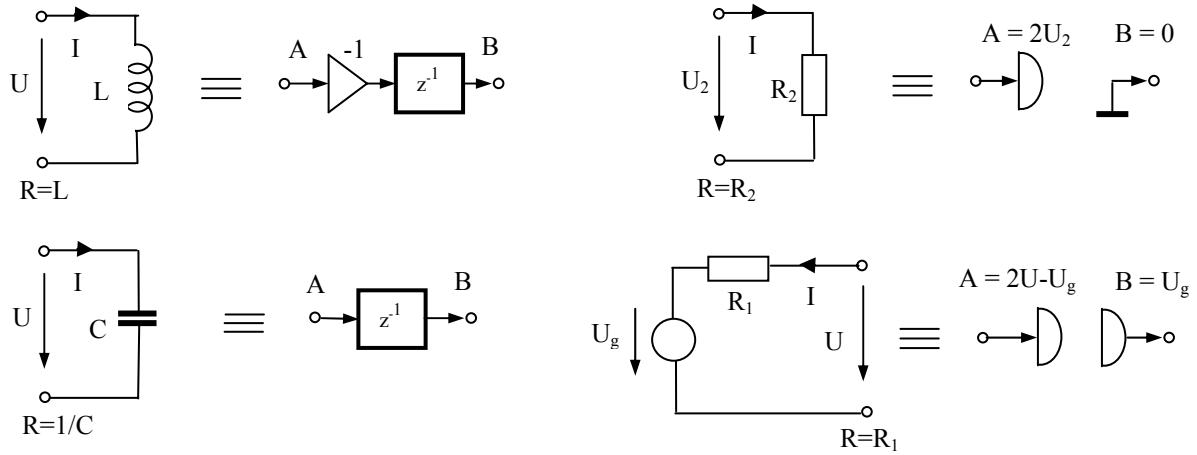
aminek felhasználásával a reflektált hullám (a generátor kimenete):

$$B = U - IR = U_g + I(R_1 - R) \Big|_{R=R_1} = U_g \quad (5.10.)$$

az $R = R_1$ választás után a generátor forrás feszültségével egyezik meg. A generátor által elnyelt (beeső) hullám:

$$A = U + IR = U + \frac{U - U_g}{R_1} R \Big|_{R=R_1} = 2U - U_g \quad (5.11.)$$

A reflexiós paraméteres leírás egyéb áramköri elemek esetére is értelmezhetőek (ideális transzformátor, girátor, nemlinearitások, stb), de ezek pillanatnyilag a szűrő tervezés szempontjából kevésbé érdekesek. Az 5.1. ábrában a számunkra fontos elemek leképzését foglaltuk össze.



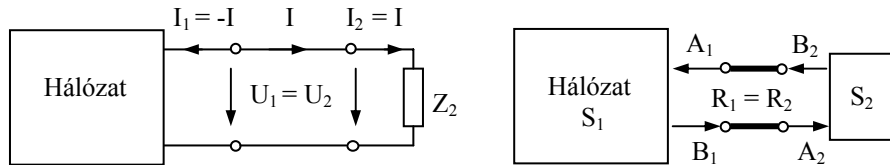
5.1. ábra A szűrők áramköri elemeinek transzformációja

A diszkrét áramköri elemek transzformációja után nézzük meg az összekapcsolás szabályait. Az 5.2. ábra szerint, ha egy hálózat egy kapocspárjára (kapocs jellemzők: U_1, I_1) rákapcsolunk egy Z_2 impedancia elemet (kapocs jellemzők: U_2, I_2), a rákapcsolás azt jelenti, hogy:

$$U_1 = U_2 = U \quad (5.12.)$$

illetve (a passzív mérőirányok miatt):

$$-I_1 = I_2 = I \quad (5.13.)$$



5.2. ábra Az összekapcsolás szabálya

A két összekapcsolni kívánt kapura a reflexiós paraméterek:

$$\begin{aligned} A_1 &= U_1 + I_1 R_1 = U - I R_1 & A_2 &= U_2 + I_2 R_2 = U + I R_2 \\ B_1 &= U_1 - I_1 R_1 = U + I R_1 & B_2 &= U_2 - I_2 R_2 = U - I R_2 \end{aligned} \quad (5.14.)$$

Ha a két kapu normalizáló ellenállása azonos:

$$R_1 = R_2 = R \quad (5.15.)$$

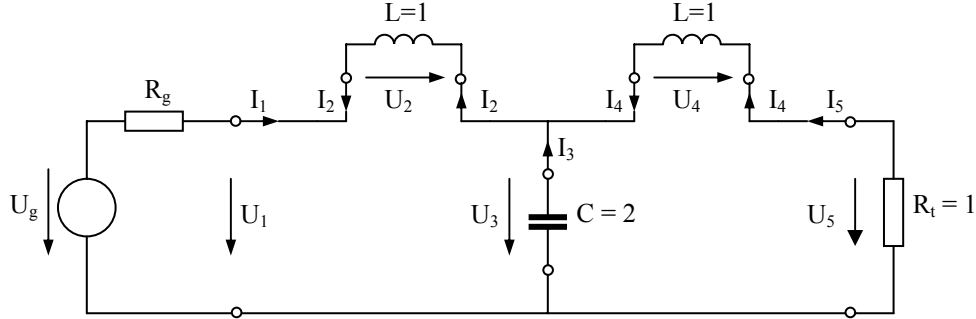
akkor és csak akkor érvényes:

$$A_1 = U - I R = B_2 \quad \text{illetve} \quad B_1 = U + I R = A_2 \quad (5.16.)$$

Szavakban ez azt jelenti, hogy a reflexiós paraméterek esetén a természetes összekötés (az egyik fokozat kimenete automatikusan a másik fokozat bemenete) csak abban az esetben tehető meg, **ha a normalizáló ellenállások (a hullámimpedanciák) azonosak.**

5.2. A hálózat reflexiós mátrixa

A hullámdigitális szűrő tervezését egy példán fogjuk szemléltetni. Legyen az előtorzított specifikációt kielégítő referens szűrő az 5.3. ábrán látható hálózat. Az elemértékek relatív egységekben adottak.



5.3. ábra A referens szűrő

Gondolatban távolítsuk el a hálózathoz az impedancia elemeket (csak az összekötő vezetékek maradnak meg). Az impedanciák helyén megmaradó kapukon vegyük fel passzív mérőirány szerint a feszültség és áram irányokat. Írjuk fel ezen mérőirányok szerint a hálózat struktúráját rögzítő Kirchhoff-egyenleteket. Példánkban ezek a következők:

$$\begin{aligned}
 U_1 - U_2 - U_3 &= 0 \\
 U_3 - U_4 - U_5 &= 0 \\
 I_1 + I_2 &= 0 \\
 -I_2 + I_3 + I_4 &= 0 \\
 -I_4 + I_5 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.17.}$$

Térjünk át ezek után a reflexiós paraméterekre! Ezt úgy tesszük, hogy az (5.17.)-be behelyettesítjük az (5.2.) szerinti kifejezéseket:

$$\begin{aligned}
 U_k &= \frac{1}{2}(A_k + B_k) \quad k=1,2,\dots,5 \\
 I_k &= \frac{1}{2R_k}(A_k - B_k) = \frac{G_k}{2}(A_k - B_k)
 \end{aligned} \tag{5.18.}$$

A kapuk normalizáló ellenállás értékeit az egyszerű összekapcsolás érdekében az impedancia elemeknek megfelelően választjuk meg:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{1}{G_1} = R_g = 1 & R_2 &= \frac{1}{G_2} = L = 1 & R_3 &= \frac{1}{G_3} = \frac{1}{C} = \frac{1}{2} \\
 R_4 &= \frac{1}{G_4} = L = 1 & R_5 &= \frac{1}{G_5} = R_t = 1
 \end{aligned} \tag{5.19.}$$

Az egyenletrendszert rendezzük olyan alakba, hogy különböző oldalon legyenek az A_k és B_k értékek.

$$\begin{aligned}
A_1 - A_2 - A_3 &= -B_1 + B_2 + B_3 \\
A_3 - A_4 - A_5 &= -B_3 + B_4 + B_5 \\
G_1 A_1 + G_2 A_2 &= G_1 B_1 + G_2 B_2 \\
-G_2 A_2 + G_3 A_3 + G_4 A_4 &= -G_2 B_2 + G_3 B_3 + G_4 B_4 \\
-G_4 A_4 + G_5 A_5 &= -G_4 B_4 + G_5 B_5
\end{aligned} \tag{5.20.}$$

Ezt az összefüggést mátrix-vektor formában is felírhatjuk:

$$\mathbf{M}_A \mathbf{A} = \mathbf{M}_B \mathbf{B} \tag{5.21.}$$

Ahol:

$$\mathbf{A}' = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5] \quad \text{és} \quad \mathbf{B}' = [B_1, B_2, B_3, B_4, B_5]$$

(t a transzponáltat jelöli)

$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ G_1 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_3 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_4 & G_5 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ G_1 & G_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 & G_3 & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_4 & G_5 \end{bmatrix}$$

Az (5.20.) mindét oldalát megszorozva balról az \mathbf{M}_B inverzével, megkapjuk a reflektált hullámot (a \mathbf{B} vektort) a beeső hullám (az \mathbf{A} vektor) függvényeként:

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}_B^{-1} \mathbf{M}_A \mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{A} \tag{5.22.}$$

ahol \mathbf{S} a reflexiós mátrix:

$$\mathbf{S} = \mathbf{M}_B^{-1} \mathbf{M}_A \tag{5.23.}$$

Példánkban a numerikus eredmény:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -4 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & +4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Az (5.20.) szerinti Kirchhoff-egyenletekben U_k I_k a stacioner hálózatban érvényes komplex feszültség és áram amplitúdókat jelenti, így az A_k B_k mennyiségek a stacioner állapothoz tartozó beeső és reflektált hullámok komplex amplitúdóinak felelnek meg.

Ha a Kirchhoff-egyenleteket az időtartományban írjuk fel, akkor az időtartományban a reflektált hullám időmintáit az (5.22.)-vel azonos alakú összefüggés szerint számíthatjuk a beeső hullám időmintáinak függvényeként:

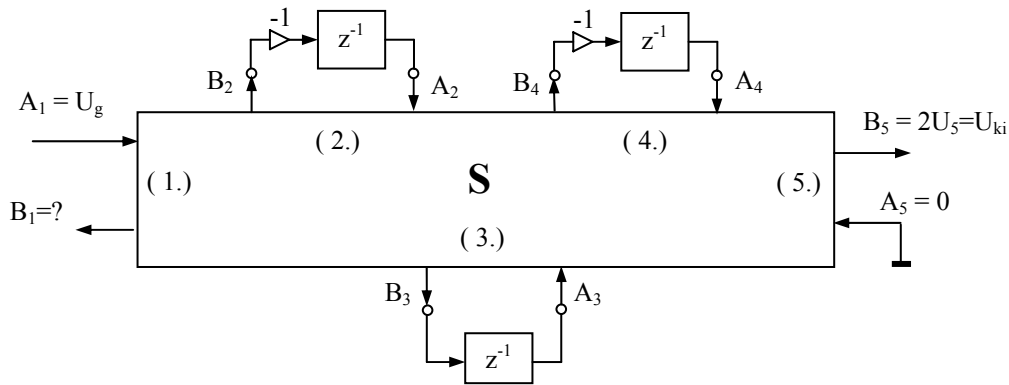
$$\mathbf{a}(n) = \mathbf{S} * \mathbf{b}(n) \tag{5.24.}$$

5.3. A hullámdigitális szűrő direkt megvalósítása

Az N kaput tartalmazó hálózat reflexiós mátrixának ismeretében a szűrő realizálása igen egyszerű. A kapukra csatlakoztatnunk kell az impedancia elemeknek megfelelő diszkrét idejű ekvivalenseket. A kapuk normalizáló ellenállásait úgy választottuk meg, hogy az összekapcsolás direkt módon elvégezhető legyen.

Vegyük észre, hogy a diszkrét idejű ekvivalensek nem tartalmazzák az adott impedancia elem (induktivitás vagy kapacitás) értékét. Az elemértékek a reflexiós mátrixban jelennek meg a kapu normalizáló ellenállások megválasztásán keresztül.

A realizált hullámdigitális szűrő:



5.4. ábra A hullámdigitális szűrő direkt megvalósítása

Az 5.4. ábrán látható hálózatban a bemenet (1.kapu) és a tároló elemek kimeneti mintáinak $[a_1(n), a_2(n), \dots, a_5(n)]$ lineár-kombinációjaként számítható ki a kimenet (5. kapu) és a tárolók következő ütemben érvényes tartalmait $[b_1(n), b_2(n), \dots, b_5(n)]$.

Némi egyszerűsítésre ad lehetőséget az, hogy az (5.) kapu bemenete azonosan zérus, valamint az, hogy általában nem szükséges kiszámítani az (1.) kapu kimenetét ($b_1(n)$ -t). Ez azt jelenti, hogy az S reflexiós mátrix első sora és utolsó oszlopa elhagyható. Példánkban:

$$\begin{bmatrix} b_2(n) \\ b_3(n) \\ b_4(n) \\ b_5(n) \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -4 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1(n) \\ a_2(n) \\ a_3(n) \\ a_4(n) \end{bmatrix} \quad (5.25.)$$

A kiszámítás algoritmus:

1. Feltöltjük az \mathbf{a} vektort:

$$\begin{aligned} a_1(n) &= u_g(n) ; & a_2(n) &= -b_2(n-1) ; \\ a_3(n) &= b_3(n-1) ; & a_4(n) &= -b_4(n-1) . \end{aligned} \quad (5.26.)$$

2. Kiszámítjuk (5.25.) szerint a \mathbf{b} vektort.

3. A szűrő kimenete:

$$u_{ki}(n) = 2u_5(n) = b_5(n) . \quad (5.27.)$$