

7.2. A karakterisztikus függvény

A kvantálandó ξ jel és az $y = Q(x)$ kvantálási karakterisztika egyértelműen meghatározza a kvantált η jelet és az ε kvantálási hibát. Ugyan ez mondható η és ε statisztikáira is, a ξ statisztikáiból a kvantálási hiba és a kvantált jel statisztikai egyaránt kiszámíthatóak. A kapcsolatot a kvantálandó jel u.n. karakterisztikus függvényével tudjuk a legegyszerűbben kifejezni. A karakterisztikus függvényt használva, az amplitúdó diszkretizálásának matematikai apparátusa igen hasonló lesz a mintavételezésnél alkalmazott apparátushoz, így az ott elmondott tételekre hivatkozni fogunk.

A ξ valószínűségi változó $\Phi_\xi(u)$ karakterisztikus függvényén az $f_\xi(x)$ amplitúdó sűrűségfüggvényének Fourier-transzformáltját értjük.

$$\Phi_\xi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) e^{j2\pi ux} dx \quad (7.23.)$$

A $\Phi_\xi(u)$ mindig létezik, mivel $f_\xi(x)$ abszolút integrálható függvény:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_\xi(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) dx = 1 \quad (7.24.)$$

$$0 \leq f_\xi(x) \quad (7.25.)$$

A konkrét eloszlástól függetlenül minden karakterisztikus függvény a zérus helyen:

$$\Phi_\xi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) dx = 1 \quad (7.26.)$$

A karakterisztikus függvény deriválásával az eloszlás momentumai egyszerűen meghatározhatóak:

$$\Phi'_\xi(u) = \frac{d\Phi_\xi(u)}{du} = j2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) e^{j2\pi ux} dx \quad (7.27.)$$

A deriváltat a zérus helyen véve:

$$\Phi'_\xi(0) = j2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx = j2\pi E\{\xi\} \quad (7.28.)$$

Amiből:

$$E\{\xi\} = \frac{1}{2\pi j} \Phi'_\xi(0) \quad (7.29.)$$

A másodrendű momentum:

$$\Phi''_\xi(u) = \frac{d^2\Phi_\xi(u)}{du^2} = (j2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x) e^{j2\pi ux} dx \quad (7.30.)$$

$$E\{\xi^2\} = \frac{1}{(2\pi j)^2} \Phi''_\xi(0) \quad (7.31.)$$

Nézzünk néhány példát!

1. Az egyenletes eloszlás

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A} & \text{ha } |x| \leq A \\ 0 & \text{ha } |x| > A \end{cases} \quad \Phi_{\xi}(u) = \frac{\sin(2\pi Au)}{2\pi Au} \quad (7.32.)$$

2. A "háromszög" eloszlás:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{A} \left(1 - \frac{|x|}{A}\right) & \text{ha } |x| \leq A \\ 0 & \text{ha } |x| > A \end{cases} \quad \Phi_{\xi}(u) = \left(\frac{\sin(\pi Au)}{\pi Au} \right)^2 \quad (7.33.)$$

3. Normális eloszlás (zérus várható értékkel):

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \Phi_{\xi}(u) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}(2\pi u)^2} \quad (7.34.)$$

4. A $\xi = A \sin(\omega t + \varphi)$ transzformált valószínűségi változó, ahol a φ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[-\pi, +\pi]$ intervallumon:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{A\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}} & \text{ha } |x| \leq A \\ 0 & \text{ha } |x| > A \end{cases} \quad \Phi_{\xi}(u) = J_0(Au) \quad (7.35.)$$

($J_0(\cdot)$: az első fajú, zérus rendű Bessel függvény)

4. Diszkrét eloszlások

$$f_{\xi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \delta(x - kq) \quad \Phi_{\xi}(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{j2\pi kq} \quad (7.36.)$$

5. Érvényes az eltolási tétel:

$$f_{\xi_2}(x) = f_{\xi_1}(x - m) \quad \Phi_{\xi_2}(u) = e^{j2\pi um} \Phi_{\xi_1}(u) \quad (7.37.)$$

6. Két független valószínűségi változó összegének $\xi_3 = \xi_1 + \xi_2$ eloszlása és karakterisztikus függvénye:

$$f_{\xi_3}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(y) f_{\xi_2}(x - y) dy \quad \Phi_{\xi_3}(u) = \Phi_{\xi_1}(u) \Phi_{\xi_2}(u) \quad (7.38.)$$

7. Ha $f_{\xi}(x)$ páros függvény, akkor $\Phi_{\xi}(u)$ is valós, páros függvény:

$$f_{\xi}(-x) = f_{\xi}(x) \quad \Phi_{\xi}(-u) = \Phi_{\xi}(u) \quad (7.39.)$$

A korrelációs függvények számításához szükségünk lesz két (esetleg nem független) valószínűségi változó szorzatának várható értékére. Ezt a várható értéket az együttes sűrűség függvény segítségével tudjuk kiszámítani:

$$E\{\xi_1 \xi_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (7.40.)$$

A kétváltozós együttes sűrűségfüggvény kétváltozós Fourier-transzformáltja az együttes karakterisztikus függvény:

$$\Phi_{\xi_1, \xi_2}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) e^{j2\pi(u_1 x_1 + u_2 x_2)} dx_1 dx_2 \quad (7.41.)$$

Deriváljuk kétszer a fenti függvényt az u_1 majd az u_2 változók szerint

$$\Phi_{\xi_1, \xi_2}^{(1,2)}(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 \Phi_{\xi_1, \xi_2}}{\partial u_1 \partial u_2} = (j2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) e^{j2\pi(u_1 x_1 + u_2 x_2)} dx_1 dx_2 \quad (7.42.)$$

amiből a keresett várható érték:

$$E\{\xi_1 \xi_2\} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \Phi_{\xi_1, \xi_2}^{(1,2)}(0,0) \quad (7.43.)$$

Például a kétdimenziós normális eloszlás együttes sűrűségfüggvénye (zérus várható értékekkel és azonos szórással) :

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{x_1^2 - 2rx_1x_2 + x_2^2}{2\sigma^2(1-r^2)}} \quad (7.44.)$$

A kétdimenziós karakterisztikus függvény:

$$\Phi_{\xi_1, \xi_2}(u_1, u_2) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}(2\pi)^2(u_1^2 + 2ru_1u_2 + u_2^2)} \quad (7.45.)$$

amiből, a részletek mellőzésével:

$$E\{\xi_1 \xi_2\} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \Phi_{\xi_1, \xi_2}^{(1,2)}(0,0) = r\sigma^2 \quad (7.46.)$$

Mivel $E\{\xi_1^2\} = E\{\xi_2^2\} = \sigma^2$, az

$$r = \frac{E\{\xi_1 \xi_2\}}{E\{\xi_1^2\}} = \frac{E\{\xi_1 \xi_2\}}{E\{\xi_2^2\}} \quad (7.47.)$$

a relatív korrelációs együttható. Ha ξ_l és ξ_2 ugyanazon folyamat két, egymástól mT (idő) távolságra lévő mintája, akkor:

$$r(m) = \frac{E\{\xi(n+m)\xi(n)\}}{\sigma^2} = \frac{R_{\xi\xi}(m)}{R_{\xi\xi}(0)} \quad (7.48.)$$

Ezen kis matematikai összefoglaló után látunk hozzá a kvantáló statisztikai tárgyalásához.

7.3. A kvantálási hiba statisztikái

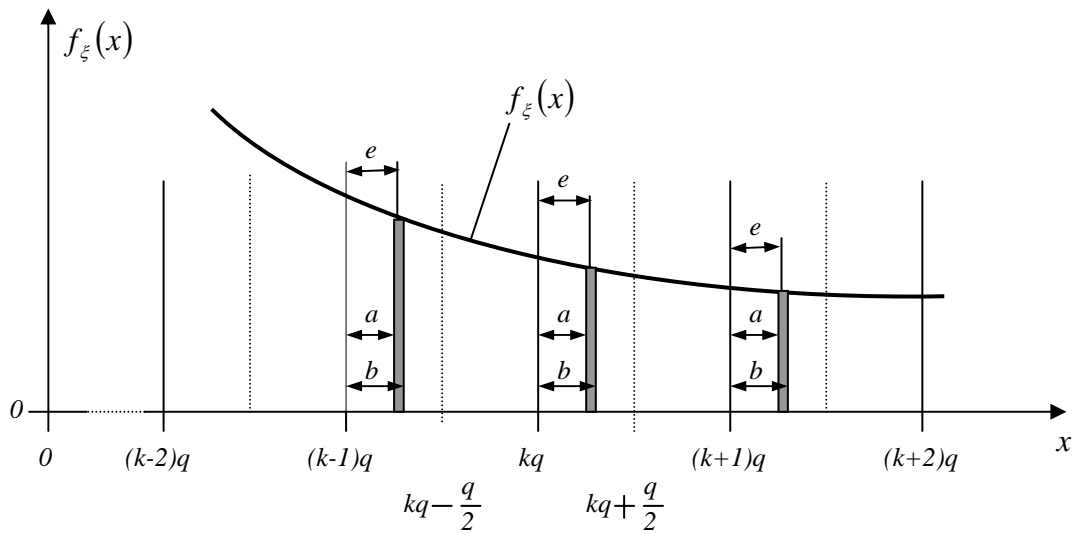
Elsőnek a kvantálási hiba sűrűségfüggvényét fogjuk meghatározni. Annak a valószínűsége, hogy a kvantálási hiba az $[a, b)$ intervallumba esik, felírható azon valószínűségek összegeként, amikor is a kvantálandó jel a $[kq+a, kq+b)$ intervallumokban tartózkodik, ahol k az összes lehetséges kvantálási lépcső közül a k -ik (lásd 7.5. ábrát).

$$P\{a \leq \varepsilon < b\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\{kq+a \leq \xi < kq+b\} \quad (7.49.)$$

Ahol az a és b számok kielégítik a

$$-\frac{q}{2} \leq a < b < \frac{q}{2} \quad (7.50.)$$

feltételeket, értékük egyébként tetszőleges.



7.5. ábra A kvantálási hiba sűrűségfüggvényének származtatása

A valószínűségeket a sűrűségfüggvényekkel kifejezve, írhatjuk:

$$\int_a^b f_\varepsilon(e)de = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kq+a}^{kq+b} f_\xi(x)dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_a^b f_\xi(kq+e)de \quad (7.51.)$$

A (7.51.)-ben az $x = kq+e$ helyettesítést hajtottuk végre. Az egyenlet jobb oldalán az integrálás és az összegzés sorrendjét felcserélve:

$$\int_a^b f_\varepsilon(e)de = \int_a^b \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_\xi(kq+e)de \quad (7.52.)$$

Tekintetbe véve, hogy az a, b számok tetszőlegesek, eredményünk:

$$f_\varepsilon(e) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_\xi(kq+e) & \text{ha } |e| \leq \frac{q}{2} \\ 0 & \text{ha } |e| > \frac{q}{2} \end{cases} \quad (7.53.)$$

Célunk legyen az, hogy a karakterisztikus függvény segítségével fejezzük ki a sűrűségfüggvényt. Ennek érdekében írjuk fel az eloszlás függvényt a Fourier-sorával!

$$f_{\varepsilon}(e) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-j2\pi n \frac{e}{q}} \quad \text{ahol} \quad -\frac{q}{2} \leq e < \frac{q}{2}. \quad (7.54.)$$

A Fourier-sor együtthatóit az alábbi képletből számíthatjuk ki:

$$C_n = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} f_{\varepsilon}(e) e^{j2\pi n \frac{e}{q}} de = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon}(kq + e) e^{j2\pi n \frac{e}{q}} de \quad (7.55.)$$

Az integrálás és az összegzés sorrendjét felcserélve, valamint az $x = kq + e$ helyettesítést végrehajtva:

$$C_n = \frac{1}{q} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi kn} \int_{kq-\frac{q}{2}}^{kq+\frac{q}{2}} f_{\varepsilon}(x) e^{j2\pi n \frac{x}{q}} dx = \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon}(x) e^{j2\pi n \frac{x}{q}} dx = \frac{1}{q} \Phi_{\varepsilon}\left(\frac{n}{q}\right) \quad (7.56.)$$

Igy (7.54.) alapján:

$$f_{\varepsilon}(e) = \frac{1}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_{\varepsilon}\left(\frac{n}{q}\right) e^{-j2\pi n \frac{e}{q}} \quad \text{ahol} \quad -\frac{q}{2} \leq e < \frac{q}{2}. \quad (7.57.)$$

Ha $f_{\varepsilon}(x)$ páros függvény, akkor $\Phi_{\varepsilon}(u)$ is valós, páros függvény: $\Phi_{\varepsilon}\left(-\frac{n}{q}\right) = \Phi_{\varepsilon}\left(\frac{n}{q}\right)$

$$f_{\varepsilon}(e) = \frac{1}{q} + \frac{2}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{\varepsilon}\left(\frac{n}{q}\right) \cos(2\pi n \frac{e}{q}) \quad -\frac{q}{2} \leq e < \frac{q}{2}. \quad (7.57.)$$

A (7.57.)-ben már felhasználtuk a $\Phi_{\varepsilon}(0) = 1$ azonosságot.

A kvantálási hiba karakterisztikus függvénye a definíció szerint:

$$\Phi_{\varepsilon}(u) = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} f_{\varepsilon}(e) e^{j2\pi ue} de = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_{\varepsilon}\left(\frac{n}{q}\right) \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \frac{1}{q} e^{j2\pi(u-\frac{n}{q})e} de \quad (7.58.)$$

$$\Phi_{\varepsilon}(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_{\varepsilon}\left(\frac{n}{q}\right) K\left(u - \frac{n}{q}\right) \quad (7.59.)$$

Ahol:

$$K(u) = \frac{1}{q} \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^{j2\pi ue} de = \frac{\sin(\pi qu)}{\pi qu} \quad (7.60.)$$

A kvantálási hiba teljeítményét (négyzetes várható értéket) a karakterisztikus függvény második deriváltjának zérus helyen felvett értékéből számítjuk ki:

$$\Phi''_{\varepsilon}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_{\varepsilon}\left(\frac{n}{q}\right) K''\left(-\frac{n}{q}\right) = -(2\pi)^2 E\{\varepsilon^2\} \quad (7.61.)$$

Amiből:

$$E\{\varepsilon^2\} = \frac{q^2}{12} \left[1 + \frac{6}{\pi^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Phi_{\varepsilon}\left(\frac{n}{q}\right) \right] \quad (7.62.)$$

Az eredmény (7.62.) szerinti alakjában felhasználtuk a:

$$K''\left(\frac{n}{q}\right) = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3} q^2 & \text{ha } n = 0 \\ -2 \frac{(-1)^n}{n^2} q^2 & \text{ha } n \neq 0 \end{cases} \quad (7.63.)$$

valamint a $\Phi_{\varepsilon}(0) = 1$ azonosságokat.

7.4. A kvantált jel statisztikái

A kvantált jel karakterisztikus függvényének meghatározását kezdjük azzal, hogy meghatározzuk: milyen valószínűséggel esik a kvantálandó jel az $y - q/2 \leq \xi < y + q/2$ tartományba (ahol y egyenlőre tetszőleges).

$$p(y) = P\left\{y - \frac{q}{2} \leq \xi < y + \frac{q}{2}\right\} = \int_{y-\frac{q}{2}}^{y+\frac{q}{2}} f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) k(x-y) dx \quad (7.64.)$$

és a $k(x)$ "kapu" függvény:

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } |x| \leq \frac{q}{2} \\ 0 & \text{ha } |x| > \frac{q}{2} \end{cases} \quad (7.65.)$$

Mivel $k(x)$ páros:

$$p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) k(y-x) dx = f_{\xi}(y) * k(y) \quad (7.66.)$$

A (7.66.) szerinti konvolúció a Fourier-transzformáltak szorzataként fejezhető ki:

$$\Phi_p(u) = \Phi_{\xi}(u) q K(u) \quad (7.67.)$$

ahol:

$$q K(u) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x) dx = q \frac{\sin(\pi q u)}{\pi q u} \quad (7.68.)$$

Ha az $y = kq$ választással élünk (diszkrétizáljuk y -t), a $p(kq)$ érték annak valószínűségét fejezi ki, hogy a kvantált jel a kq -ik kvantálási lépcsőre esik. A diszkrét eloszlás sűrűségfüggvénye felírható ezen valószínűségekkel:

$$f_\eta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(kq) \delta(x - kq) \quad (7.69.)$$

A (7.69.) felfogható úgy, mintha a $p(x)$ függvényt q periódussal mintavételeztük volna. A mintavételi tétel szerint, a mintavételezés a $\Phi_p(u)$ Fourier-transzformált $1/q$ szerinti periódikus kiterjesztéseként is felírható.

$$\Phi_\eta(u) = \frac{1}{q} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_p\left(u + \frac{n}{q}\right) \quad (7.70.)$$

A (7.70.)-be behelyettesítve (7.67.)-t, a kvantált jel karakterisztikus függvénye:

$$\Phi_\eta(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_\xi\left(u + \frac{n}{q}\right) K\left(u + \frac{n}{q}\right) \quad (7.71.)$$

Deriváljuk (7.71.)-et u szerint kétszer:

$$\Phi'_\eta(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi'_\xi\left(u + \frac{n}{q}\right) K\left(u + \frac{n}{q}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_\xi\left(u + \frac{n}{q}\right) K'\left(u + \frac{n}{q}\right) \quad (7.72.)$$

$$\begin{aligned} \Phi''_\eta(u) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi''_\xi\left(u + \frac{n}{q}\right) K\left(u + \frac{n}{q}\right) + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi'_\xi\left(u + \frac{n}{q}\right) K'\left(u + \frac{n}{q}\right) + \\ & + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_\xi\left(u + \frac{n}{q}\right) K''\left(u + \frac{n}{q}\right) \end{aligned} \quad (7.73.)$$

A deriváltat a zérus helyen véve:

$$\Phi''_\eta(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi''_\xi\left(\frac{n}{q}\right) K\left(\frac{n}{q}\right) + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi'_\xi\left(\frac{n}{q}\right) K'\left(\frac{n}{q}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_\xi\left(\frac{n}{q}\right) K''\left(\frac{n}{q}\right) \quad (7.74.)$$

Mivel

$$K\left(\frac{n}{q}\right) = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 0 \\ 0 & \text{ha } n \neq 0 \end{cases} \quad (7.75.)$$

valamint a (7.71.) utolsó összegében a (7.61.)-et ismerve fel, írhatjuk:

$$\Phi''_\eta(0) = \Phi''_\xi(0) + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi'_\xi\left(\frac{n}{q}\right) K'\left(\frac{n}{q}\right) + \Phi''_\xi(0) \quad (7.76.)$$

A négyzetes várható érték (7.31.) szerinti kifejezését behelyettesítve (7.76.)-ba

$$E\{\eta^2\} = E\{\xi^2\} - \frac{2}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi'_\xi\left(\frac{n}{q}\right) K'\left(\frac{n}{q}\right) + E\{\varepsilon^2\} \quad (7.77.)$$

Másrésről a kvantált jel négyzetes várható értéke:

$$E\{\eta^2\} = E\{(\xi - \varepsilon)^2\} = E\{\xi^2\} - 2E\{\xi\varepsilon\} + E\{\varepsilon^2\} \quad (7.78.)$$

A (7.77.) és a (7.78.) összevetéséből adódik:

$$E\{\xi\mathcal{E}\} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi'_{\xi}\left(\frac{n}{q}\right) K'\left(\frac{n}{q}\right) = \frac{q}{(2\pi)^2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Phi'_{\xi}\left(\frac{n}{q}\right) \quad (7.79.)$$

Ahol felhasználtuk a

$$K'\left(\frac{n}{q}\right) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 0 \\ -\frac{(-1)^n}{n} q & \text{ha } n \neq 0 \end{cases} \quad (7.80.)$$

azonosságot.

A numerikus viszonyok szemléltetése végett tekintsük azt az esetet, amikor a kvantálandó jel normális eloszlású, zérus várható értékű és σ szórású véletlen változó jel.

A (7.34.) alapján ekkor:

$$\Phi_{\xi}\left(\frac{n}{q}\right) = e^{-2\pi^2\left(\frac{\sigma}{q}\right)^2 n^2} \quad \text{és} \quad \Phi'_{\xi}\left(\frac{n}{q}\right) = -(2\pi)^2 \sigma^2 \frac{n}{q} e^{-2\pi^2\left(\frac{\sigma}{q}\right)^2 n^2} \quad (7.81.)$$

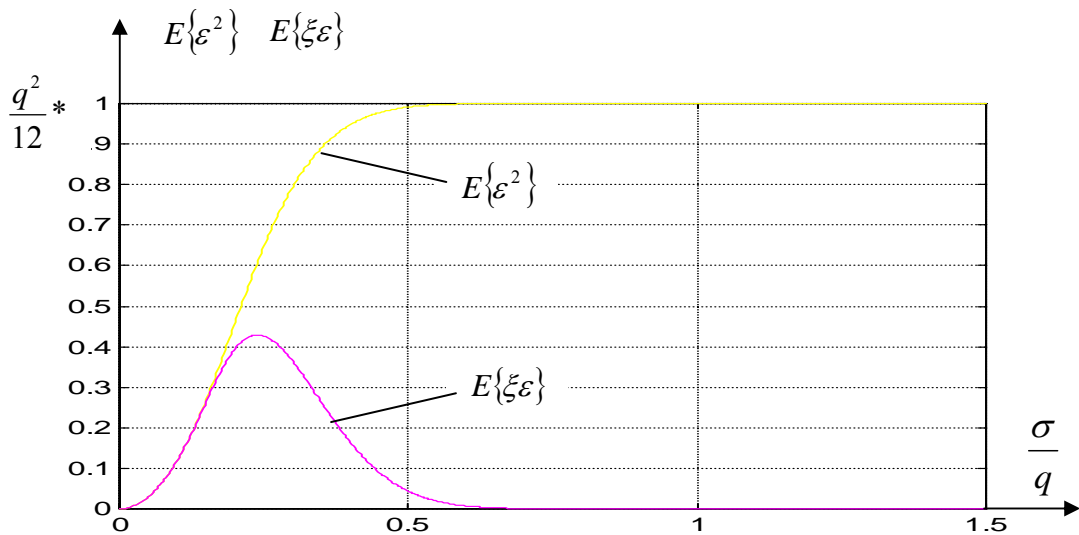
Ezeket az értékeket behelyettesítve (7.62.)-be és (7.79.)-be:

$$E\{\mathcal{E}^2\} = \frac{q^2}{12} \left[1 + \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-2\pi^2\left(\frac{\sigma}{q}\right)^2 n^2} \right] \quad (7.82.)$$

és

$$E\{\xi\mathcal{E}\} = -2q^2 \left(\frac{\sigma}{q}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2\pi^2\left(\frac{\sigma}{q}\right)^2 n^2} \quad (7.83.)$$

adódik.



7.6. ábra Normális eloszlás esetén $E\{\mathcal{E}^2\}$ és $E\{\xi\mathcal{E}\}$ a szórás függvényében

Az ábrából látható, hogy extrém kis jelek esetén is, (mikor $\sigma \approx q$) a bevezetőben tett közelítések igen jónak mondhatóak.

7.5. A korrelációs függvények meghatározása

A korrelációs függvények meghatározását az előző fejezetben leírtakhoz hasonlóan végezhetjük, azzal a különbséggel, hogy most a kétdimenziós sűrűség-, ill. a kétdimenziós karakterisztikus függvényekkel kell dolgozni. Mivel az eljárás nagyon hasonló, a levezetéseket nem ismételjük meg, hanem csak a végeredményt adjuk meg.

A kvantált jel kétdimenziós karakterisztikus függvénye (hasonlóan 7.71.-hez):

$$\Phi_{\eta_1, \eta_2}(u_1, u_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_{\xi_1, \xi_2} \left(u_1 + \frac{n}{q}, u_2 + \frac{m}{q} \right) K \left(u_1 + \frac{n}{q} \right) K \left(u_2 + \frac{m}{q} \right) \quad (7.84.)$$

ahol

$$\Phi_{\xi_1, \xi_2}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) e^{j2\pi(u_1 x_1 + u_2 x_2)} dx_1 dx_2 \quad (7.85.)$$

A kvantált jel korrelációs függvényét a (7.43.) alapján számítjuk ki:

$$E\{\eta_1 \eta_2\} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \Phi_{\eta_1, \eta_2}^{(1,2)}(0,0) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\partial^2 \Phi_{\eta_1, \eta_2}(0,0)}{\partial u_1 \partial u_2} \quad (7.86.)$$

Ha $\eta_1 = \eta(n+k)$ és $\eta_2 = \eta(n)$, vagyis ugyan annak a folyamatnak két (egymástól k távolságra levő) mintája, akkor (7.12.) alapján:

$$E\{\eta_1 \eta_2\} = R_{\eta\eta}(k) = R_{\xi\xi}(k) - R_{\xi\varepsilon}(k) - R_{\varepsilon\xi}(k) + R_{\varepsilon\varepsilon}(k) \quad (7.87.)$$

A (7.86.) szerinti deriválásokat elvégezve, majd a függvényeket a zérus helyen véve adódik:

$$R_{\xi\xi}(k) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \Phi_{\xi_1, \xi_2}^{(1,2)}(0,0) \quad (7.88.)$$

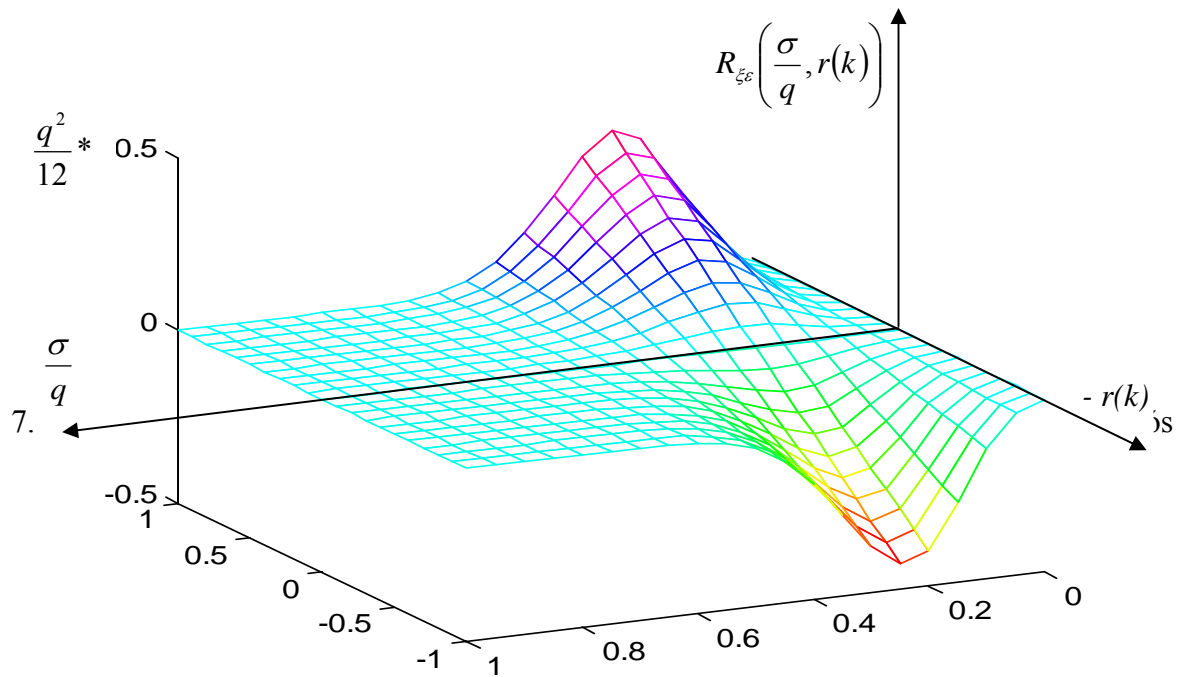
$$R_{\xi\varepsilon}(k) = \frac{q}{(2\pi)^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \Phi_{\xi_1, \xi_2}^{(1)} \left(0, \frac{m}{q} \right) \quad (7.89.)$$

$$R_{\varepsilon\xi}(k) = \frac{q}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Phi_{\xi_1, \xi_2}^{(2)} \left(\frac{n}{q}, 0 \right) \quad (7.90.)$$

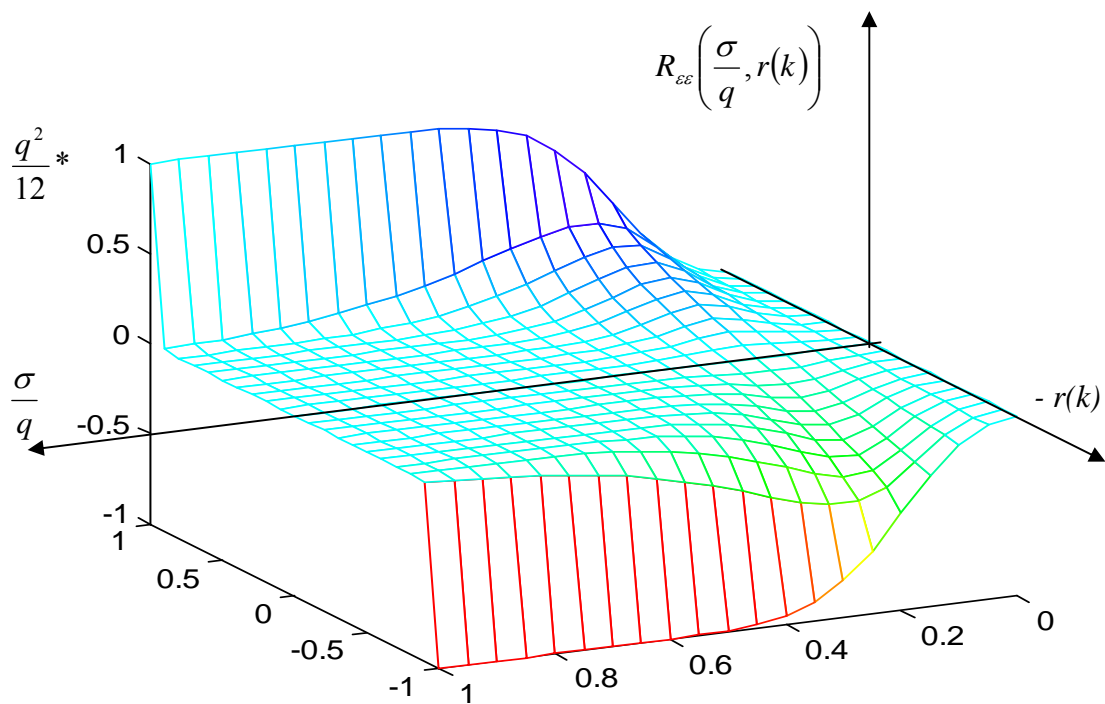
$$R_{\varepsilon\varepsilon}(k) = -\frac{q^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{nm} \Phi_{\xi_1, \xi_2} \left(\frac{n}{q}, \frac{m}{q} \right) \quad (7.91.)$$

A fenti összefüggések kiszámításánál felhasználtuk a $K(n/q)$ -nak és $K'(n/q)$ -nak a (7.75.) és a (7.80.)-ban adott alakját.

Végezetül nézzük meg a (7.44.) szerinti normális eloszlás esetére a kvantálandó jel és a kvantálási hiba keresztkorrelációs- és a kvantálási hiba autokorrelációs függvényének alakulását. Az alábbi két ábrán a (7.89.) és a (7.91.) összefüggések eredményeit ábrázoltuk.



7.7. ábra A keresztkorrelációs függvény a kvantálandó jel szórásának és relatív korrelációs együtthatójának függvényeként



7.8. ábra A kvantálási hiba autokorrelációs függvénye a kvantálandó jel szórásának és relatív korrelációs együtthatójának függvényeként