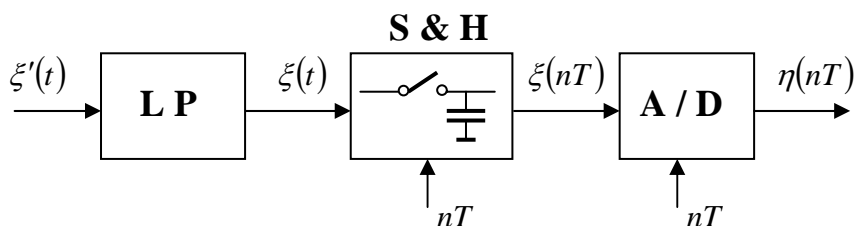


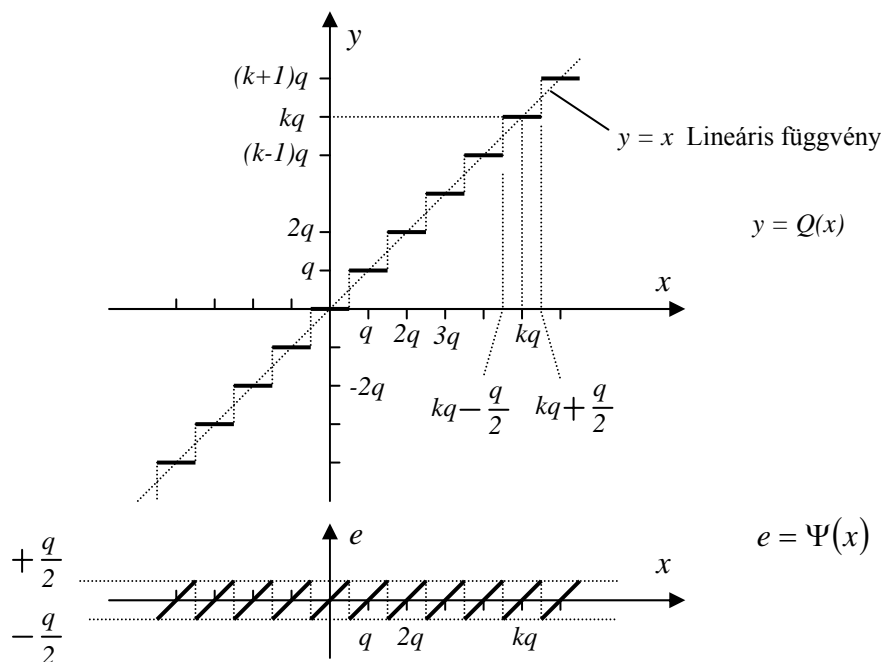
7. Az egyenletes kvantáló

A digitális jelfeldolgozás diszkrét jelek feldolgozását jelenti. Az analóg jelek digitális jellé történő átalakítása során kétféle diszkrétizálás is történik: egyrészt a folytonos idejű és folytonos amplitúdó eloszlású $\xi(t)$ jelet a mintavevő-tartó (sampling & hold) diszkrét-idejű és folytonos amplitúdó eloszlású $\xi(nT)$ sorozattá alakítja, majd a véges szóhosszúságú analóg-digitális konverter ezt az idő sorozatot diszkrét amplitúdó eloszlású $\eta(nT)$ sorozattá alakítja át. Ennek folyamatát látjuk a 7.1. ábrán.



7.1. ábra Az analóg-digitál átalakítás folyamata

Korábban a mintavételezésnek a jelre gyakorolt hatásaival foglalkoztunk, ebben a fejezetben az amplitúdó diszkrétizálásának kérdéseit tárgyaljuk. Az A/D átalakítót memória mentes kvantálónak tekintjük, ami azt jelenti, hogy az y kimeneti érték csak az x bemeneti minta pillanatnyi értékétől függ. Az egyenletes kvantáló esetén az y és az x kapcsolatát a 7.2. ábra mutatja.



7.2. ábra Az egyenletes kvantáló karakterisztikája

A kvantálási karakterisztikát a bemenő jel felbontásával tudjuk leírni. Az x bemenő jelet felbontjuk az y kimenő jelre és az e kvantálási hibára:

$$x = y + e \quad (7.1.)$$

Az egyértelmű felbontást az $y = kq$ (k : egész) és a

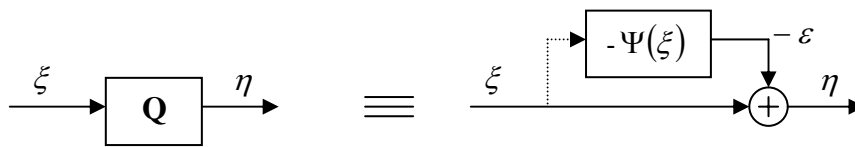
$$-\frac{q}{2} \leq e < \frac{q}{2} \quad (7.2.)$$

megkötések biztosítják.

A q az u.n. kvantálási lépcső (az A/D konverter LSB bitjének helyiértéke).

Az $y = Q(x)$ alapvetően nemlineáris kapcsolat a jelben torzítást okoz. A fenti felbontás azonban lehetőséget ad egy másfajta értelmezésre. Ha (7.1.)-et átrendezzük, az η kimenetet felfoghatjuk mint a ξ kvantálandó bemenő jel és a $(-\varepsilon)$ hibajel összegét.

$$\eta = \xi - \varepsilon = \xi + (-\varepsilon) \quad (7.3.)$$



7.3. ábra A kvantáló additív zajmodelljének értelmezése

7.1. Az additív zajmodell

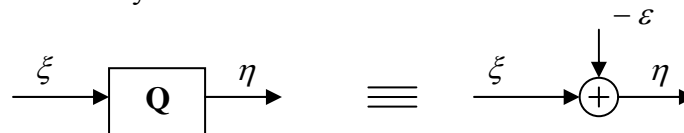
Az ε kvantási hibát természetesen a ξ jel egyértelműen meghatározza, azonban a kvantálandó jelek széles osztályára **érvényes az a közelítés**, melyben a hibajelet:

- zérus várható értékű,
- egyenletes eloszlású,
- korrelálatlan,
- és a bemenő jellel is korrelálatlan

valószínűségi változónak tekintjük.

Ha a fenti feltételek fennállnak, akkor a kvantáló **lineáris** (additív) **zajmodelljéhez** jutunk. A (7.3.) összefüggés azt fejezi ki, hogy a kvantáló kimenőjele a bemenő jel és egy tőle független fehér zaj folyamat összege.

A következőkben ezzel a modellel fogunk foglalkozni, majd megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett érvényes a modell.



7.4. ábra A kvantáló additív zajmodellje

A zérus várható értékű, egyenletes eloszlású hibajel amplitúdó sűrűség függvénye:

$$f_{\varepsilon}(e) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{ha } |e| \leq \frac{q}{2} \\ 0 & \text{ha } |e| > \frac{q}{2} \end{cases} \quad (7.4.)$$

A kvantálási zaj teljesítménye:

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = E\{\varepsilon^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^2 f_{\varepsilon}(e) de = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} e^2 \frac{1}{q} de = \frac{q^2}{12} \quad (7.5.)$$

A kvantálás jel-zaj viszonyának kiszámításához a kvantálandó jel legyen véletlen változó jel, melynek $f_{\xi}(x)$ amplitúdó sűrűség függvényét is egyenletes eloszlásúnak válaszjuk meg a $[-1 \leq x \leq 1]$ tartományban.

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{ha } |x| > 1 \end{cases} \quad (7.6.)$$

Ezzel a kvantálandó jel teljesítménye:

$$\sigma_{\xi}^2 = E\{\xi^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{3} \quad (7.7.)$$

A jel-zaj viszony dB-ben:

$$SNR^{dB} = 10 \log_{10} \frac{\sigma_{\xi}^2}{\sigma_{\varepsilon}^2} = 10 \log_{10} \frac{12}{3q^2} = 10 \log_{10} (2q^{-1})^2 \quad (7.8.)$$

Ha az A/D konverter kód formátumában az LSB bit helyiértéke $q = 2^{-Q}$ (Q a tört rész bitjeinek a száma, és $N=Q+1$ a teljes szóhossz, (+1: az előjel bit)), akkor a maximális jel-zaj viszony:

$$SNR^{dB} = 10 \log_{10} (2q^{-1})^2 = 20 \log_{10} 2^{Q+1} = N 20 \log_{10} 2 \cong N 6 \text{ dB} \quad (7.9.)$$

Szavakban: egyenletes eloszlású bemenő jelet feltételezve, az analóg-digitális átalakítás során a maximálisan elérhető jel-zaj viszony annyiszor 6 dB, ahány bites az A/D átalakító. 12 bites átalakítónál ez 72 dB-nek, 16 bites esetben pedig 96 dB-nek felel meg.

Ha a jel szintjét csökkentjük a jel-zaj viszony azzal arányosan fog csökkenni, mivel a jel teljesítmény csökken, a kvantálási zaj viszont állandó marad. Extrém kis jel-zaj viszony közelében (~ 0 dB) az összefüggés már nem érvényes, mert kiindulási feltételeink nem teljesülnek (a kvantálási hiba erősen függ a bemenő jeltől).

A kvantáló kimenő jelének **spekrális jellemzését** az autokorrelációs függvényének analízisével fogjuk elvégezni.

Legyen a bemenő jel (legalább) gyengén stacionárius, melynek autokorrelációs függvénye:

$$R_{\xi\xi}(m) = E\{\xi(n+m)\xi(n)\} \quad (7.10.)$$

A kimenő jel autokorrelációs függvénye (7.3.) felhasználásával:

$$\begin{aligned} R_{\eta\eta}(m) &= E\{\eta(n+m)\eta(n)\} = E\{[\xi(n+m) - \varepsilon(n+m)][\xi(n) - \varepsilon(n)]\} = \\ &= E\{\xi(n+m)\xi(n)\} - E\{\xi(n+m)\varepsilon(n)\} - E\{\varepsilon(n+m)\xi(n)\} + E\{\varepsilon(n+m)\varepsilon(n)\} \end{aligned} \quad (7.11.)$$

A (7.11.)-ben a jelek auto- és keresztkorrelációs függvényeit ismerjük fel:

$$R_{\eta\eta}(m) = R_{\xi\xi}(m) - R_{\varepsilon\xi}(m) - R_{\xi\varepsilon}(m) + R_{\varepsilon\varepsilon}(m) \quad (7.12.)$$

Ahol:

$$R_{\varepsilon\xi}(m) = E\{\varepsilon(n+m)\xi(n)\} \quad (7.13.)$$

$$R_{\xi\varepsilon}(m) = E\{\xi(n+m)\varepsilon(n)\} \quad (7.14.)$$

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(m) = E\{\varepsilon(n+m)\varepsilon(n)\} \quad (7.15.)$$

A Winer-Hincsin tétel értelmében a spektrális teljesítménysűrűség függvények a korrelációs függvények diszkrét idejű Fourier-transzformáltjai:

$$S_{\eta\eta}(\omega) = S_{\xi\xi}(\omega) - S_{\varepsilon\xi}(\omega) - S_{\xi\varepsilon}(\omega) + S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) \quad (7.16.)$$

Ha az additív zajmodell felállításánál tett feltételeinket érvényesítjük, akkor a kvantálási hiba autokorrelációs függvénye:

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(m) = E\{\varepsilon(n+m)\varepsilon(n)\} = \begin{cases} \frac{q^2}{12} & \text{ha } m = 0 \\ 0 & \text{ha } m \neq 0 \end{cases} \quad (7.17.)$$

Az $m = 0$ esetben ugyanis:

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(0) = E\{\varepsilon(n)\varepsilon(n)\} = \sigma_\varepsilon^2 = \frac{q^2}{12} \quad (7.18.)$$

Ha a kvantálási hiba korrelálatlan a bemenő jellel, akkor:

$$R_{\varepsilon\xi}(m) = E\{\varepsilon(n+m)\xi(n)\} = 0 \quad m = -\infty \dots + \infty \quad (7.19.)$$

és

$$R_{\xi\varepsilon}(m) = E\{\xi(n+m)\varepsilon(n)\} = 0 \quad m = -\infty \dots + \infty \quad (7.20.)$$

A kvantált jel spektrális teljesítmény sűrűség függvénye additív zajmodell esetében tehát:

$$S_{\eta\eta}(\omega) = S_{\xi\xi}(\omega) + S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = S_{\xi\xi}(\omega) + \frac{q^2}{12} \quad (7.21.)$$

mivel:

$$S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\varepsilon\varepsilon}(m) e^{j\omega m T} = R_{\varepsilon\varepsilon}(0) = \frac{q^2}{12} \quad (7.22.)$$

Összefoglalva:

A nemlineáris kvantáló hatását az additív zajmodellben egy fehérzaj forrással vettük figyelembe (a zaj spektrális teljesítmény sűrűség függvénye konstans). Ezzel a közelítéssel a nemlineáris hálózatot linearizáltuk, azaz továbbra is érvényes marad például a szuperpozíció tétele.

E fejezet további részében azt fogjuk megvizsgálni, hogy milyen feltételek mellett tartható a kétség kívül egyszerűnek számító additív modell. Kapcsolatot fogunk keresni a kvantálandó jel statisztikai és a fentebb szereplő várható értékek között, amelyeket azután numerikusan kiértékelve látni fogjuk az érvényesség határait.