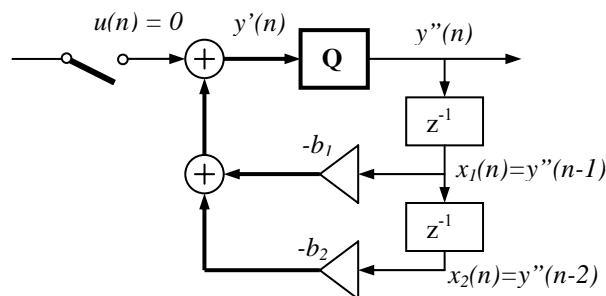


8.2. Zérus bemenetű határciklus

Ebben a fejezetben a rekurzív digitális szűrők **kisjelű viselkedését** fogjuk vizsgálni, olyan körülmények között, amikor az aritmetikai egység szóhosszúsága véges.

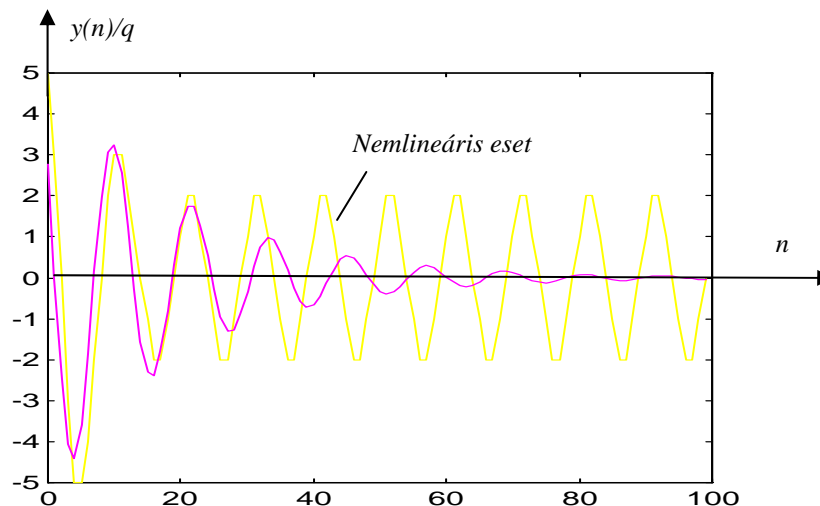
Tételezzük fel, hogy a $t = 0$ időpontban az $u(n)$ bemenő jelet lekapcsoljuk a szűrő bemenetéről és csak a lecsengési folyamatot vizsgáljuk. Végtelen szóhosszúságú aritmetika esetén (lineáris eset) a stabil szűrő $y(n)$ kimenő jele exponenciális burkolóval fog lecsengeni, tartva az $y(\infty)=0$ egyensúlyi állapothoz.

Véges szóhosszúságú, fixpontos aritmetikai egységekben a szorzás a szóhosszúságot megnöveli, (az összegzés a megnövekedett szóhosszúsággal történik), majd az eredményt kerekítés után (kvantálás) az eredeti szóhosszúsággal írjuk vissza a tárolókba (nemlineáris eset).



8.8. ábra A szóhosszúság alakulása másodfokú AR alaptag esetén

Ebben az esetben a lecsengési folyamat más viselkedést fog mutatni. A 8.9. ábrán a szűrő válaszána MATLAB szimulációját látjuk $b_1 = -1.6381$, $b_2 = -0.9031$, $y''(-1) = 5q$, $y''(-2) = 6q$ paraméter értékek esetén (q : az LSB helyiértéke).



8.9. ábra A szűrő kimenő jele a.) lineáris és b.) nemlineáris esetben

Nemlineáris esetben a szűrő kimenő jele periódikussá válik, a konkrét jelalak függ a szűrő együtthatóitól és a kezdeti értékektől. A jel amplitúdója a q kvantálási lépcső néhányszorosa. Ezt a jelenséget nevezik **zérus bemenetű határoszcillációnak** (zero input limit cycle).

A véges szóhosszúságú aritmetikai egység az alábbi egyenlet szerint működik:

$$y'(n) = y''(n) + e(n) = - \sum_{k=1}^N b_k y''(n-k) \quad (8.42.)$$

Ahol:

$$-\frac{q}{2} \leq e(n) < \frac{q}{2} \quad (8.43.)$$

Az eredmény kerekítése következtében a szűrő (kisjelű viselkedés esetén) elveszíti stabilitási tulajdonságát. A lineáris rendszernek szánt szűrő oszcillátorként viselkedik.

Ez a jelenség felveti a stabilitás kérdésének pontosítását. A stabilitást az irodalom az állapotváltozós leírás apparátusát használva tárgyalja, ezért tegyük mi is ezt.

Az autonóm (zérus bemenetű) **lineáris rendszer** állapot egyenletes leírása a következő alakú:

$$\bar{\mathbf{x}}(n+1) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(n) \quad y(n) = \bar{\mathbf{b}}^t \bar{\mathbf{x}}(n) \quad (8.44.)$$

ahol a példánkban:

$$\bar{\mathbf{x}}(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}}^t = [-b_1 \quad -b_2] \quad (8.45.)$$

Az autonóm **nemlineáris rendszer** állapot egyenlete:

$$\bar{\mathbf{x}}(n+1) = Q(\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(n)) \quad (8.46.)$$

Ahol a kvantálóra (a nemlinearitásra) igaz:

$$Q(\bar{\mathbf{0}}) = \bar{\mathbf{0}} \quad (8.47.)$$

Definíciók:

1. A diszkrét idejű, időinvariáns, nemlineáris rendszer (egyenletesen) stabil, ha bármilyen kicsi $\varepsilon > 0$ számhoz található egy olyan $\delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy

$$|\bar{\mathbf{x}}(n)| < \varepsilon \quad \forall n \quad (8.48.)$$

ha: $|\bar{\mathbf{x}}(0)| < \delta$ (kezdeti feltétel).

2. A diszkrét idejű, időinvariáns, nemlineáris rendszer **aszimptotikusan** stabil, ha bármilyen kicsi $\varepsilon > 0$ számhoz található egy olyan n_0 , melyre fenn áll az:

$$|\bar{\mathbf{x}}(n)| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad n \geq n_0(\varepsilon, \delta) \quad (8.49.)$$

$$\text{és:} \quad |\bar{\mathbf{x}}(0)| < \delta \quad (8.50.)$$

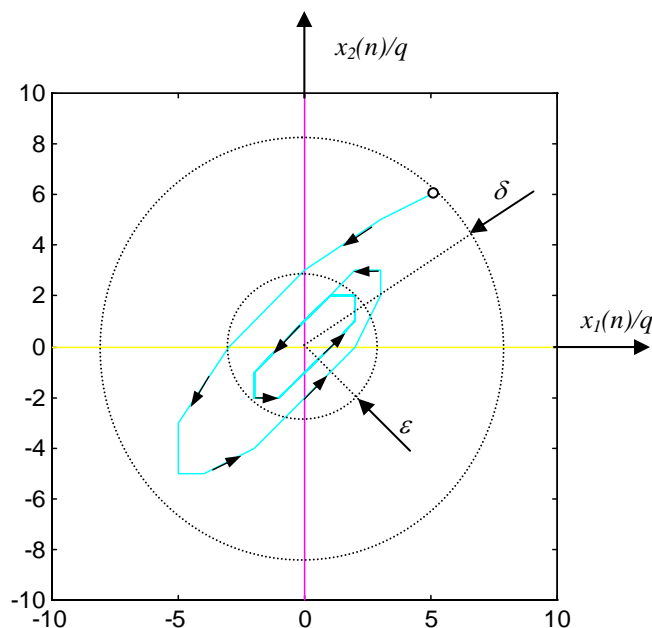
3. A diszkrét idejű, időinvariáns, nemlineáris rendszer **globálisan, aszimptotikusan** stabil, ha a feltétel a 2. esettel megegyezik, de a kezdeti érték feltétel tetszőleges (bármilyen állapotból indítjuk).

4. Kimeneti aszimptotikus stabilitás: ha a jel eltűnését csak a kimenő jeltől követeljük meg, az állapotváltozóktól nem.

Az 1. definícióval nem sokra megyünk, ui. ha $\varepsilon < q/2$ az előírás, akkor a kezdeti értékre esetünkben tipikusan az $\mathbf{x}(0) = 0$ adódik, ami általában nem teljesül.

Az aszimptotikus stabilitás az a tulajdonság, ami esetleg elvárható. Ha a szűrő aszimptotikusan stabil, akkor globálisan is stabil lesz, mivel nagy jelkre a nemlinearitás hatása kicsi (kvázi lineáris viselkedés), így az állapotváltozó vektor előbb-utóbb a δ sugarú körön belülre kerül.

Az előző példánkkal kapcsolatosan megállapíthatjuk, hogy a szűrő aszimptotikusan **sem** stabil, mivel nincs olyan n_0 index mely felett az állapotváltozó vektor abszolút értéke tetszőlegesen kicsivé válna. A határciklus kialakulása jól követhető a 8.10. ábrán, amely az állapotsíkon mutatja a szűrő állapotának időbeli alakulását.



8.10. ábra A határciklus kialakulása másodfokú AR szűrőben

A nemlineáris rendszer stabilitás általában vizsgálata nehéz, konkrét esetekben a szimulációs eljárás a legkézenfekvőbb. (A szimuláció eredményeként ui. eldönthető a stabilitás.)

A zérus bemenetű határciklus kialakulásának veszélye rekurzív digitális szűrőkben tehát állandóan fenn áll. A helyzetet bonyolítja a kaszkád realizálás, ui. ilyenkor a hátább lévő fokozatok már nem zérus bemenetűek. Az egyes fokozatokon belül az adat minták szóhosszúságának növelése a határciklus szintjét lényegesen csökkenti, amivel az egyes fokozatok kimeneti stabilitása biztosítható.

Az 5.3. fejezetben tárgyalt direkt megvalósítású hullámdigitális szűrők mentesek lehetnek a határciklustól a kerekítési szabály megfelelő megválasztásával. Az alábbiakban ezt a kérdést fogjuk megvizsgálni.

Első lépésként a stabilitás feltételét nézzük meg. Lyapunov 2. (stabilitási) tétele használható a kérdés eldöntésére, mely módszerben nem szükséges a megoldás ismerete. A tételt itt nem bizonyítjuk, csak felhasználjuk (Lásd Frigyes Csáki : Modern Control Theories, Akadémiai Kiadó 1972)

A Lyapunov féle stabilitási kritérium:

A diszkrét idejű, nemlineáris rendszer aszimptotikusan stabil, ha találunk egy $V(\bar{x})$ skalár-vektor (un. Lyapunov) függvényt, melyre:

$$1. \quad V(\bar{x}(n)) > 0 \quad \forall \bar{x} \neq \bar{0} \quad (8.51.)$$

$$2. \quad V(\bar{0}) = 0 \quad \text{ha } \bar{x} = \bar{0} \quad (8.52.)$$

$$3. \quad V(\bar{x}) \text{ folytonos függvénye } \bar{x} \text{-nek} \quad (8.53.)$$

$$4. \quad \lim V(\bar{x}) \rightarrow \infty \text{ ha } |\bar{x}| \rightarrow \infty \quad (8.54.)$$

$$5. \quad W(\bar{x}(n)) = V(\bar{x}(n+1)) - V(\bar{x}(n)) < 0 \quad (\text{Szigoruan monoton csökken}) \quad (8.55.)$$

Az 1.-5. feltételek teljesülése elégséges (de nem szükséges) feltétele a stabilitásnak (a feltételek nem teljesülése még nem jelenti azt, hogy a szűrő nem stabil).

Ahogy az 5. fejezetben láttuk, a folytonos idejű referencia szűrőből az összes LC elemet kiemelve egy N kapus veszteség mentes (csak az összekötő vezetékeket tartalmazó) hálózatot kaptunk (lásd 5.3. ábra). A kapukon passzív mérőirányt felvéve, a Kirchoff egyenleteknek megfelelően, az azokon beáramló pillanatnyi teljesítménynek zérusnak kell lennie (veszteség mentes hálózat).

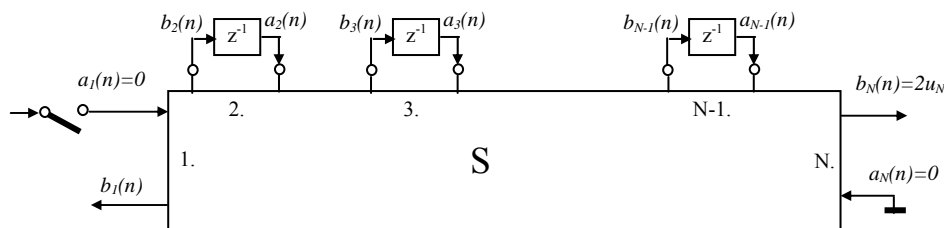
$$P = \sum_{k=0}^N u_k i_k = 0 \quad (8.56.)$$

Az 5. fejezetben leírtak szerint bevezetve az

$$a_k(n) = u_k(nT) + R_k i_k(nT) \quad (8.57.)$$

$$b_k(n) = u_k(nT) - R_k i_k(nT) \quad (8.58.)$$

reflexiók paramétereit jutunk el a hullámdigitális szűrőhöz:



8.10. ábra A direkt realizálású hullámdigitális szűrő

Lineáris működés esetén (végtelen szóhosszúság) a rendszert leíró differencia egyenlet rendszer:

$$\bar{\mathbf{x}}(n+1) = \bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{x}}(n) \quad (8.59.)$$

ahol az állapotváltozók vektora:

$$\bar{\mathbf{x}}(n) = [a_2(n), a_3(n), \dots, a_{N-1}(n)]^T \quad (8.60.)$$

A (8.57.) és (8.58.) egyenletekből kifejezve u_k , i_k értékeit:

$$u_k(nT) = \frac{1}{2}(a_k(n) + b_k(n)) \quad (8.61.)$$

$$i_k(nT) = \frac{G_k}{2}(a_k(n) - b_k(n)) \quad (8.62.)$$

majd ezeket behelyettesítve (8.56.)-ba, a lineáris esetre érvényes

$$P = \sum_{k=1}^N \frac{G_k}{4} [a_k^2(n) - b_k^2(n)] = 0 \quad (8.63.)$$

összefüggést kapjuk.

Tekintetbe véve, hogy $a_1(n) = a_N(n) = 0$, írhatjuk:

$$\sum_{k=2}^{N-1} G_k a_k^2(n) = G_1 b_1^2(n) + G_N b_N^2(n) + \sum_{k=2}^{N-1} G_k b_k^2(n) \quad (8.64.)$$

$$\text{Mivel:} \quad a_k(n+1) = b_k(n) \quad (k=2, 3, \dots, N-1) \quad (8.65.)$$

$$\sum_{k=2}^{N-1} G_k a_k^2(n) = G_1 b_1^2(n) + G_N b_N^2(n) + \sum_{k=2}^{N-1} G_k a_k^2(n+1) \quad (8.66.)$$

Válasszuk Lyapunov függvénynek a:

$$V(\bar{\mathbf{x}}(n)) = \sum_{k=2}^{N-1} G_k a_k^2(n) \quad (8.67.)$$

nemnegatív (pozitív definit) kifejezést!

Ezzel a (8.55.):

$$W(\bar{\mathbf{x}}(n)) = V(\bar{\mathbf{x}}(n+1)) - V(\bar{\mathbf{x}}(n)) = -G_1 b_1^2(n) - G_N b_N^2(n) < 0 \quad (8.68.)$$

A kapott eredmény egyáltalán nem meglepő, miszerint a lineáris rendszer globálisan, aszimptotikusan stabil, mert a $V(\bar{\mathbf{x}}(n))$ Lyapunov függvény szigorúan monoton csökkenő idősorozatot alkot.

Nemlineáris esetben az:

$$\bar{x}'(n+1) = \bar{x}''(n+1) + \bar{e}(n+1) = \bar{\bar{S}}\bar{x}''(n) \quad (8.69.)$$

vagy másként:

$$\bar{x}''(n+1) = Q[\bar{\bar{S}}\bar{x}''(n)] \quad (8.70.)$$

összefüggés érvényes, ahol a $(.)''$ a véges szóhosszúságú, az $(.)'$ a kiterjesztett szóhosszúságú mintát, $Q[\cdot]$ a választott kerekítési szabálynak megfelelő nemlinearitást jelenti.

A Lyapunov függvény ebben az esetben:

$$V(\bar{x}''(n)) = \sum_{k=2}^{N-1} G_k a_k''^2(n) \quad (8.71.)$$

és

$$V(\bar{x}''(n+1)) = \sum_{k=2}^{N-1} G_k a_k''^2(n+1) = \sum_{k=2}^{N-1} G_k b_k''^2(n) \quad (8.72.)$$

Ha az n . ütemben nem kerekítenénk (lineárisan működne a szűrő), akkor (8.68.) alapján teljesülne a:

$$V(\bar{x}'(n+1)) - V(\bar{x}''(n)) = \sum_{k=2}^{N-1} G_k b_k''^2(n) - \sum_{k=2}^{N-1} G_k a_k''^2(n) < 0 \quad (8.73.)$$

egyenlőtlenség.

Ha a kerekítési szabály olyan, hogy:

$$b_k''^2 \leq a_k''^2 \quad (8.74.)$$

akkor a (8.73.) alapján - mivel az első (a pozitív) összeget csökkentjük- igaz lesz a:

$$W(\bar{x}''(n)) = V(\bar{x}''(n+1)) - V(\bar{x}''(n)) = \sum_{k=2}^{N-1} G_k b_k''^2(n) - \sum_{k=2}^{N-1} G_k a_k''^2(n) < 0 \quad (8.75.)$$

feltétel, ami a stabilitást jelenti.

A (8.74.) feltétel az amplitúdóban való lefelé kerekítést (magnitúdó csonkolást) jelenti (a pozitív mintákat a nálánál kisebb, a negatívokat a nálánál pozitívabb kvantálási lépcsőre kerekítjük).

A kvantálási hiba:

$$-q < e_k(n) < +q \quad (k = 2, 3, \dots, N-1) \quad (8.76.)$$

amely zérus várható értékű, $\frac{q^2}{3}$ szórású valószínűségi változónak tekinthető.

A szokásos kerekítési szabálytól eltérve, a nagyobb szórás miatt a szűrő aritmetikai zaja 6 dB-el nagyobb lett, de a direkt struktúrájú hullámdigitális szűrő mentes a zérus bemenetű határciklustól.