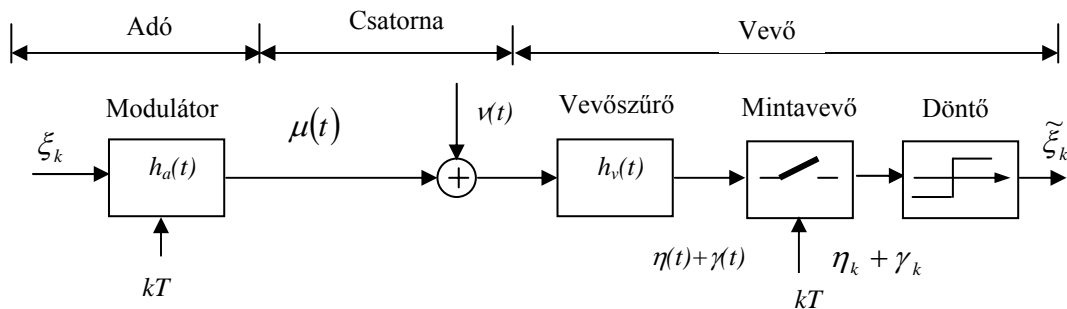


9.2. A pulzus amplitúdó moduláció (PAM)

Az adó oldalon az állomány biteit megfelelő protokoll szerint soros bit-folyammá alakítjuk át, majd ezeket a biteket T időközönként a modulátor a bemenetére vezetjük. A modulátor a '0' vagy '1' szimbólumoktól függően vagy egy pozitív, vagy egy negatív előjelű impulzust bocsájt ki, amit bizonyos jelformálás után átküldünk a csatornán.

A vevő oldalon T szerint mintavételezzük a jelet és annak előjeléből következtetünk a küldött szimbólumra. A vett szimbólumokból a választott protokoll szerint visszaállítjuk az adatállományt. Ez az eljárás a kétszintű PAM.

A választott modell a következő:



9.1. ábra A PAM adatátvitel modellje

Az adó oldali jelformáláson aluláteresztő szűrőt kell érteni, azért, hogy a kibocsátott impulzus sávhatárolt legyen (illeszkedve a csatornában rendelkezésre álló sáv szélességhez).

A vevő bemenetén is célszerű (aluláteresztő) szűrőt alkalmazni, annak érdekében, hogy a csatornában lévő, sávon kívüli idegen jelektől és a zajtól megszabaduljunk, mert ezek a döntés helyességét elronthatják.

A pulzus amplitúdó moduláció a fenti elképzelés szerint csak alapsávi összeköttetés (kábel) esetén jöhet számításba.

Az adatátviteli sebesség növelhető, ha a bitfolyamból több bitet foglalunk össze egy szimbólummá, majd a lehetséges kombinációknak megfelelően, többféle impulzus amplitúdó értéket engedünk meg moduláló jelként. Ekkor a vevő oldalon a döntés is ennek megfelelően többszintű. Adott jel- és zajteljesítmény mellett ilyenkor a döntési értékek közelebb kerülnek egymáshoz és ezért az adatátviteli hiba valószínűsége növekszik.

A választott modellen ezután megvizsgáljuk:

- a szimbólum-áthallás mentes csatorna átviteli függvényét,
- a bit hiba valószínűség jel-zaj viszonytól való függését.

Külön fejezetben fogjuk tárgyalni a vevő oldali időzítés (a mintavételezési időpont) helyreállításának kérdéseit.

A szimbólum-áthallás mentes csatorna

Mint fentebb indokoltuk, mind az adóban, mind a vevőben sávhatároló szűrést kell végeznünk. Mint tudjuk, a szűrés következtében a keskeny impulzusok az időben (esetleg több szimbólum idő intervallumban) is szétterülnek. A döntés alapját képező pillanatértéket így nem csak egyetlen (az éppen küldött) impulzus, hanem az azt megelőző és azt követő impulzusok sokasága befolyásolja.

Ezt a jelenséget nevezzük **szimbólum-áthallásnak** (intersymbol interference: ISI).

Első lépésben magát az átviteli csatornát zaj- és torzítás mentesnek tételezzük fel. Erre az esetre fogjuk megvizsgálni, milyen eredő $H(f)$ átviteli karakterisztika szükséges ahhoz, hogy ne lépjen fel szimbólum-áthallás. Az eredő karakterisztika ismeretében tudjuk a felbontást elvégezni adó- ill. vevőoldali szűrőre.

Mint látni fogjuk, a szűrők (az egyszerű tárgyalhatóság érdekében) nem-kauzális szűrőknek adódnak. A szűrők súlyfüggvényeinek eltolásával a nem-kauzális szűrők kauzálissá tehetők, és így már realizálhatók lesznek. A súlyfüggvények eltolása a jel késleltetésének felel meg. (Ennek a késleltetésnek a figyelembe vétele nehezítené a tárgyalást.) A valóságos rendszerekben a vevő oldali mintavételi időpont szinkronizálása a vett jelhez (az időzítés visszaállítása) magából a vett jelből történik, így a vett jel késleltetése ebből a szempontból nem érdekes.

A modulátor diszkrét idejű bemenettel és folytonos idejű kimenettel rendelkező rendszer. Jelöljük $h_a(t)$ -vel a modulátor impulzus válasz függvényét (az egységnyi impulzusra adott választ).

Az átvendő "0" vagy "1" szimbólumokhoz rendeljük hozzá a $\xi_k \in \{-A_0, +A_0\}$ amplitúdó értékeket. Az eredeti üzenet k -ik bitje ezzel a ξ_k amplitúdó értékre konvertálódott. A továbbiakban ezt tekintjük az üzenetnek.

A jelzés sebessége: $f_b = 1/T$ Baud [szimbólum/secundum], ami kétszítű moduláció esetében megegyezik az adatátviteli sebességgel [bit/ sec] (egy szimbólumhoz egy bit tartozik).

Mivel a modulátor lineáris és időinvariáns, annak kimenő jele:

$$\mu(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k h_a(t - kT) \quad (9.1.)$$

A modulátor tehát az egy darab (egységnyi) diszkrét idejű jelre a folytonos idejű, u.n. elemi csatorna jellel ($h_a(t)$) válaszol. Ennek a jelnek a Fourier-transzformáltja (Fourier-integrálja) az adószűrő $H_a(f)$ átviteli karakterisztikája.

$$H_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (9.2.)$$

A vevőszűrőt a $H_v(f)$ átviteli karakterisztikájával definiálunk, melyhez a $h_v(t)$ impulzusválasz tartozik.

$$h_v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_v(f) e^{+j2\pi ft} df \quad (9.3)$$

Az eredő átviteli karakterisztika a kaszkád kapcsolásnak megfelelően:

$$H(f) = H_a(f) H_v(f) \quad (9.4.)$$

Az eredő csatorna impulzusátviteli függvénye (súlyfüggvénye) $h(t)$ az adó- és vevőoldali impulzusválasz függvények konvolúciója.

A mintavételező bemenetén a jel (a zajtól az első lépésben tekintsünk el):

$$\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n h(t - nT) \quad (9.5.)$$

Mintavételező kimenete a kT -ik időpontban:

$$\eta_k = \eta(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n h(kT - nT) = \xi_k h(0) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{\infty} \xi_n h((n-k)T) \quad (9.6.)$$

A memória mentes döntő kimenete a bemenet (pillanatnyi) előjelétől függ:

$$\tilde{\xi}_k = A_0 \cdot \text{sign}(\eta_k) \quad (9.7.)$$

A (9.6.)-ból láthatóan a (9.7.) szerinti döntésben $\tilde{\xi}_k = \xi_k$, ha:

$$h_n = h(nT) = \delta_{n0} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (9.8.)$$

A vevő oldali mintavételezés után egy diszkrét idejű bemenettel és diszkrét idejű kimenettel rendelkező rendszert kaptunk, melynek az impulzus válasz sorozata a h_n sorozat.

Ennek a diszkrét idejű rendszernek a frekvencia tartományban a $H_{mv}(f)$ átviteli függvény felel meg, amely karakterisztika ideális (ISI mentes) esetben:

$$H_{mv}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-j2\pi f n T} = 1 \quad (9.9.)$$

A mintavételi tétel értelmében viszont a mintavett rendszer átviteli függvénye kifejezhető a folytonos idejű csatorna eredő $H(f)$ átviteli függvényének periódikus kiterjesztéseként:

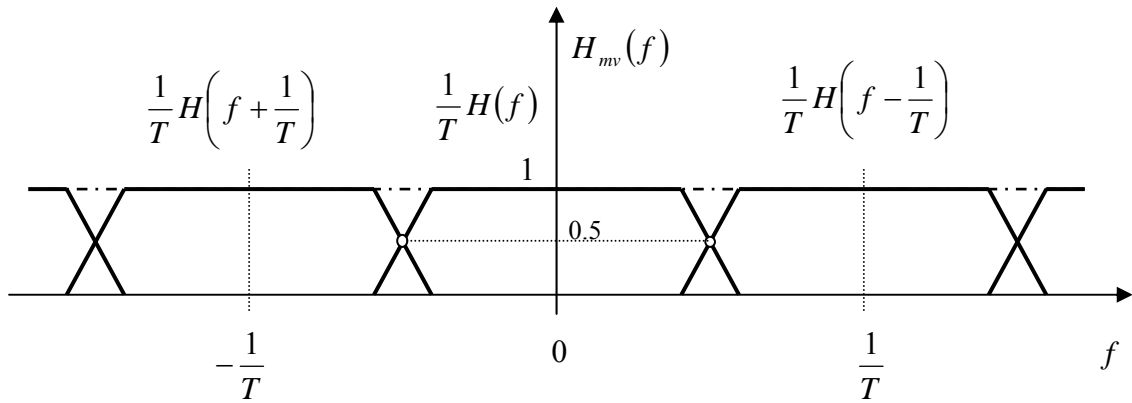
$$H_{mv}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(f - n \frac{1}{T}\right) = 1 \quad (9.10.)$$

A $H(f)$ -től ezen kívül még megköveteljük, hogy aluláteresztő karakterisztikájú legyen. Jelentse ez azt, hogy $H(f)$ legyen véges tartójú a $\max[-1/T, +1/T]$ tartományban (azon kívül zérus átvitelű).

A (9.10.)-ben szereplő végtelen összegből így a $[-1/T, +1/T]$ frekvencia tartományban csak az $n = 0, +1, -1$ indexekhez tartozó tagok maradnak meg:

$$H(f) + H\left(f + \frac{1}{T}\right) + H\left(f - \frac{1}{T}\right) = T = \text{const} \quad (9.11.)$$

Szavakban kifejezve ez azt jelenti, hogy a mintavételezésből adódó periodikus kiterjesztés következtében fellépő átlapolódásnak olyannak kell lennie, hogy kiadódjon a konstans (1) érték. Ennek a feltételnek minden olyan karakterisztika eleget tesz, amelyik aluláteresztő jellegű és páratlan szimmetriájú az $1/2T$ (és a $-1/2T$) pontokhoz tartozó 0.5 függvény értékekre (lásd 9.2. ábra).

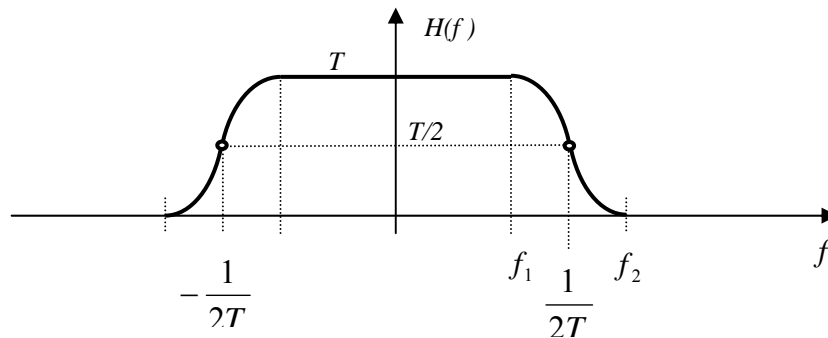


9.2. ábra A mintavételezett csatorna eredő karakterisztikája

Szabványos csatorna karakterisztika:

(emelt koszinusz = raised cosine)

Annak érdekében, hogy az impulzus válasz függvény az időben gyorsan csillapodó jellegű legyen, a csatorna átviteli karakterisztikáját emelt koszinusz függvénynek választjuk:



9.3. ábra Az emelt koszinusz csatorna karakterisztika

Formulákban ez a következőt jelenti:

$$H(f) = \begin{cases} T & \text{ha } 0 \leq |f| \leq f_1 \\ \frac{T}{2} \left[1 + \cos \left(\pi \frac{|f| - f_1}{f_2 - f_1} \right) \right] & \text{ha } f_1 \leq |f| \leq f_2 \\ 0 & \text{ha } f_2 \leq |f| \end{cases} \quad (9.12.)$$

Ahol:

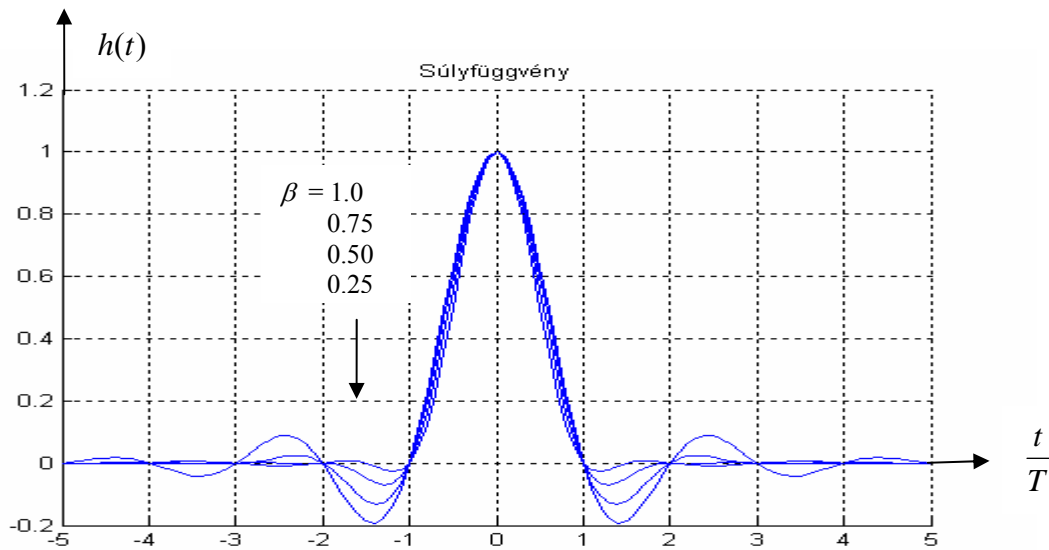
$$f_1 = \frac{1 - \beta}{2T} \quad \text{és} \quad f_2 = \frac{1 + \beta}{2T} \quad (9.13.)$$

Lekerekítési (roll-off) paraméter: béta, tipikus értéke: 0.25, 0.50, 0.75 vagy 1.0.

Az impulzusválasz (a részlet számítások mellőzésével):

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} dt = 2 \int_0^{f_2} H(f) \cos(2\pi ft) df = \dots = \\ &= \frac{\sin \pi \frac{t}{T} \cos \left(\beta \pi \frac{t}{T} \right)}{\pi \frac{t}{T} \left(1 - \left(2\beta \frac{t}{T} \right)^2 \right)} \end{aligned} \quad (9.14.)$$

A 9.4. ábra a súlyfüggvénynek (csak a pozitív) időtengely feletti alakulását mutatja a lekerekítési paraméter különböző értékei mellett (a súlyfüggvény páros függvény!). A függvény várakozásunknak megfelelő, T egész számú többszöröseinél zérus értékű, azaz biztosítja az áthallás mentességet.

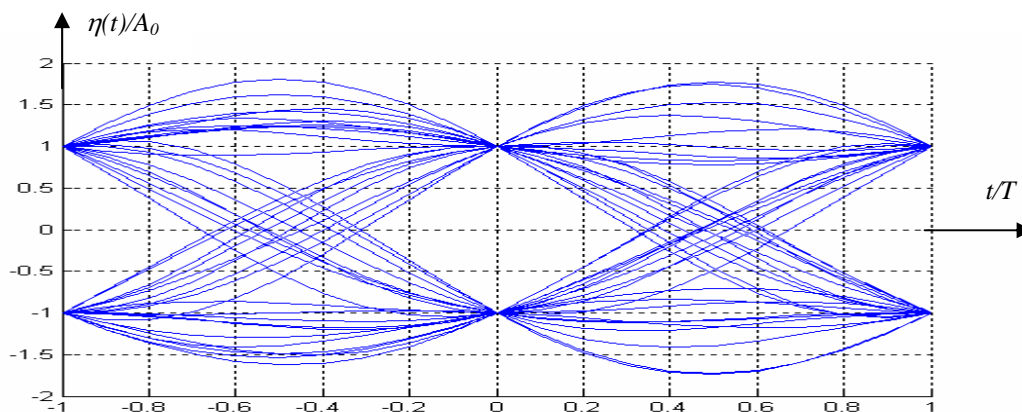


9.4. ábra A normalizált súlyfüggvény

Ha a sávszélességgel takarékoskodunk, akkor a β értékét kicsire választjuk (lásd 9.3. ábra). Ekkor a null-átmenetek meredeksége nagyobb, ami viszont abból a szempontból kedvezőtlen, hogy a vevő oldalon az időzítés visszaállítást (a mintavételi időpontok kijelölését) pontosabbá kell tenni, mivel annak kis ingadozása (*jitter*) nagyobb szimbólum áthallást okoz.

A kiszámított szűrő súlyfüggvényére nem kauzális jelet kaptunk, ami abból adódott, hogy az átviteli függvényt valóságnak tételeztük fel. A súlyfüggvényt négyszögletes ablakkal "ablakolva" pld. a $[-8T, +8T]$ tartományra és a pozitív időtengely irányában eltolva $8T$ értékkel, azt kauzálissá tehetjük ($A \cdot t > 8T$ -n esetén a súlyfüggvény már elhanyagolhatóan kicsi.). Az időtartományban történő eltolás a frekvencia tartományban lineáris fázist eredményez. Mivel az időzítés visszaállítást a vett jelből van megoldva, az eltolásból adódó késleltetés nem okoz gondot.

Ha egy oszcilloszkóppal megvizsgáljuk a szűrő kimenetén a jelalakot úgy, hogy az oszcilloszkóp vízszintes eltérítését szinkronizáljuk a jelzési órajelhez, a 9.5. ábrán látható jeleket látnánk. Ezt az ábrát nevezzük szemábrának.



9.5. ábra Az ideális csatorna szemábrája, kétszintű PAM esetén ($\beta = 0.25$)

A konkrét jelalak természetesen a küldött üzenettől függ. A vétel minőségére a szemábra „nyitottsága” jellemző, vagyis az a tény, hogy a döntési pillanatokban (az ábrán a $t = 0$ -ban) milyen távol vannak a döntés alapját képző értékek. Ha a csatornában lineáris torzítás (és zaj) van, a szemábra „záródik”, ami (különösen többszintű moduláció esetén) megnöveli a hibás döntés valószínűségét.

Ezek után bontsuk fel az eredő átviteli karakterisztikát adó- és vevőoldali szűrő átviteli karakterisztikákra. Gyakorlati megvalósításokban a szokásos választás az, hogy a két karakterisztikát egyformára választjuk úgy, hogy a szorzatuk az eredőt adja:

$$H_a(f) = TH_v(f) \quad (9.15.)$$

A (9.4.) alapján az amplitúdó karakterisztikák:

$$|H_a(f)| = T \sqrt{\frac{1}{T} H(f)} \quad (9.16.)$$

$$|H_v(f)| = \sqrt{\frac{1}{T} H(f)} \quad (9.17.)$$

(A különbség abból adódik, hogy az adó oldalán a szűrő $h_a(t)$ súlyfüggvényét, míg a vevő oldalon szűrő $H_v(f)$ átviteli függvényét definiáljuk dimenzió mentesnek.)

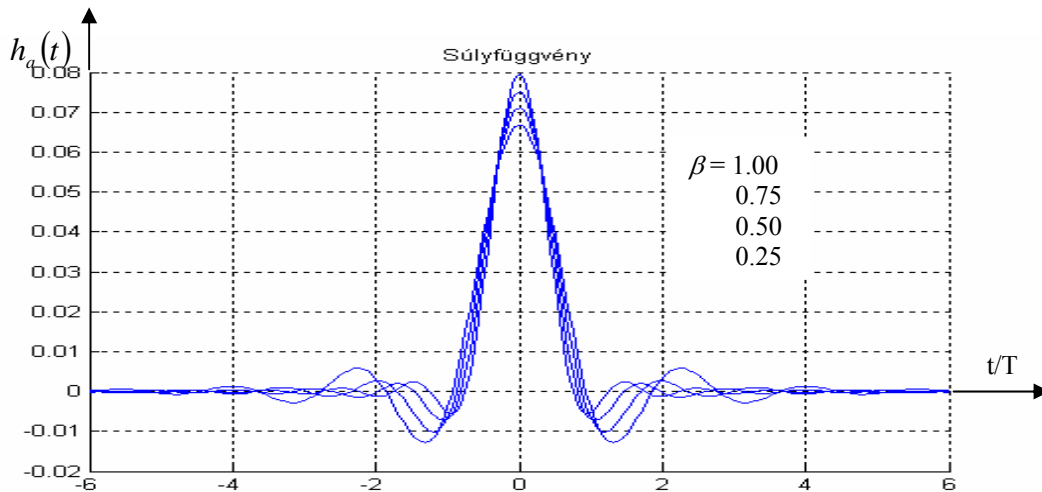
A (9.12.) kifejezéssel adott átviteli függvényből négyzetgyököket vonva (felhasználva a kétszeres szög koszinuszára vonatkozó azonosságot) írhatjuk:

$$H_v(f) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq |f| \leq f_1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{|f| - f_1}{f_2 - f_1}\right) & \text{ha } f_1 \leq |f| \leq f_2 \\ 0 & \text{ha } f_2 \leq |f| \end{cases} \quad (9.15)$$

A (9.13.) szerinti aluláteresztő jellegű átviteli függvényt inverz-Fourier transzformálva, kapjuk az adószűrő impulzus válasz függvényét:

$$\begin{aligned} h_a(t) = (1 - \beta) \frac{\sin\left(\pi(1 - \beta) \frac{t}{T}\right)}{\pi(1 - \beta) \frac{t}{T}} + \beta \cos\left(\pi \frac{t}{T} + \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sin\left(\beta\pi \frac{t}{T} + \frac{\pi}{4}\right)}{\beta\pi \frac{t}{T} + \frac{\pi}{4}} + \\ + \beta \cos\left(\pi \frac{t}{T} - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sin\left(\beta\pi \frac{t}{T} - \frac{\pi}{4}\right)}{\beta\pi \frac{t}{T} - \frac{\pi}{4}} \end{aligned} \quad (9.15.)$$

A modulátor digitális jelfeldolgozó processzorral történő megvalósításakor a $h_a(t)$ impulzusválasz ismeretében impulzus invariáns transzformációval tervezhetjük meg a szűrőt. (A diszkrét idejű szűrő impulzus válasza a folytonos idejű súlyfüggvény mintavételezettje.)



9.6. ábra Az adószűrő súlyfüggvénye a β paraméter különböző értékei esetén
(A β növelésével az impulzus egyre keskenyebb)

Az ábrából látható, hogy ez a szűrő T egész számú többszöröseinél nem zérus, de $h_v(t)$ -vel vett konvolúciója (kaskád kapcsolás!) visszaadja a 9.3. ábra szerinti függvényt.

A jel-zaj viszony

Kezdjük a számításokat a forrás analízisével! A modulátor bemenete a $\xi_k \in \{-A_0, +A_0\}$ halmazból veszi fel értékeit. A továbbítandó szimbólumok előfordulásának valószínűsége legyen egyforma:

$$P\{\xi_k = +A_0\} = P\{\xi_k = -A_0\} = \frac{1}{2} \quad (9.16.)$$

Az eredeti állomány bitjeire ez a megkötés nagy valószínűséggel nem teljesül. A vevő oldalon az időzítés helyreállító áramkör azonban csak akkor tud jól működni, ha (a továbbítandó állomány tartalmától függetlenül) a modulátor gyakran váltja a küldött impulzusok előjelét, ugyanis ekkor könnyű kinyerni a szükséges órajelet a vett jelből. Ezért az adóban szükség van (még a moduláció előtt) egy olyan fokozatra, amelyik tetszőleges bitsorozatból álvéletlen sorozatot állít elő. Ezt a fokozatot nevezik scrambler-nek. A vevőben az álvéletlen sorozatból állítja vissza a de-scrambler az eredeti üzenetet. Az álvéletlen sorozatra már teljesül a (9.16.) szerinti feltevés.

A modulátor bemenetén lévő ξ_k diszkrét idejű folyamatot egy valószínűségi változó egy realizációjának tekintjük, melynek várható értéke és szórása (átlag teljesítménye):

$$E \xi_k = 0 \quad (9.17.)$$

$$\sigma_{\xi}^2 = E \xi_k^2 = A_0^2 \quad (9.18.)$$

Ha a modulátor bemenetére érkező minták egymástól függetlenek, akkor korrelálatlanok is:

$$R_{\xi\xi}(m) = E \xi_k \xi_{k+m} = \begin{cases} A_0^2 & \text{ha } m = 0 \\ 0 & \text{ha } m \neq 0 \end{cases} \quad (9.19.)$$

, melynek spektrális teljesítménysűrűség függvénye konstans (fehér folyamat):

$$S_{\xi\xi}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\xi\xi}(m) e^{-jm2\pi fT_s} = A_0^2 = \text{const} \quad (9.20.)$$

A modulátor kimenő jele:

$$\mu(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n h_a(t - nT) \quad (9.21.)$$

melynek várható értéke (9.17.) alapján:

$$E\mu(t) = E \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n h_a(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E \xi_n h_a(t - nT) = 0 \quad (9.22.)$$

A kimenő jel teljesítményének a jel másodrendű momentumát tekintjük:

$$\begin{aligned} P_\mu(t) &= E\mu^2(t) = E \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n h_a(t - nT) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k h_a(t - kT) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E \xi_k \xi_n h_a(t - kT) h_a(t - nT) \end{aligned} \quad (9.23.)$$

Felhasználva (9.19.)-et, a belső összegből csak az $n = k$ indexű tag marad meg, amivel:

$$P_\mu(t) = E\mu^2(t) = A_0^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_a^2(t - kT) \quad (9.24.)$$

A kimenő jel (mint valószínűségi változó) másodrendű momentuma függ az időtől, annak periodikus függvénye (az elemi csatornajele négyzetének periodikus kiterjesztettje). Így a csatornába került jel nem lehet stacionárius (ciklo-stacioner folyamat).

Az átlagteljesítményt úgy kapjuk meg, hogy a teljesítmény (9.24.) szerinti kifejezését egy periódusra átlagoljuk (integráljuk és osztjuk a periódus hosszával).

$$\bar{P}_\mu = \frac{1}{T} \int_0^T P_\mu(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A_0^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_a^2(t - kT) dt = \frac{A_0^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T h_a^2(t - kT) dt \quad (9.25.)$$

A (9.25.) -ben bevezetve a $t' = t - kT$ változót, írhatjuk:

$$\bar{P}_\mu = \frac{A_0^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T h_a^2(t - kT) dt = \frac{A_0^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-kT}^{-(k-1)T} h_a^2(t') dt' = \frac{A_0^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} h_a^2(t') dt' \quad (9.28.)$$

$$\text{A Parseval-tétel értelmében:} \quad \int_{-\infty}^{\infty} h_a^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H_a(f)|^2 df \quad (9.29.)$$

$$\text{amivel a kimenő jel átlag teljesítménye:} \quad \bar{P}_\mu = \frac{A_0^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |H_a(f)|^2 df \quad (9.30.)$$

Mivel az átviteli karakterisztika valós, a teljesítmény értéke zárt alakban:

$$\bar{P}_\mu = \frac{A_0^2}{T} \int_{-f_2}^{f_2} H_a^2(f) df = A_0^2 \int_{-f_2}^{f_2} H(f) df = A_0^2 \quad (9.31.)$$

(Ahol felhasználtuk (9.13.) –ből a $H_a^2(f) = TH(f)$ összefüggést, valamint a 9.3. ábra alapján látható, hogy az integrál értéke egy.)

Modellünkben additív, Gauss-eloszlású, zérus várható értékű, stacionárius fehér zajt tételezünk fel ($v(t)$), melynek spektrális teljesítmény sűrűség függvénye N_0 (= konstans).

$$S_{vv}(f) = N_0 \quad (9.32.)$$

A vevőszűrő kimenetén (a mintavételező bemenetén) a $v(t)$ zaj szintén stacionárius, Gauss-eloszlású lesz, melynek spektrális teljesítmény sűrűség függvénye:

$$S_{vv}(f) = |H_v(f)|^2 N_0 = H_v^2(f) N_0 = \frac{1}{T} H(f) N_0 \quad (9.33.)$$

Ennek a zajnak az átlag teljesítménye (szórásnégyzete):

$$P_v = \sigma_v^2 = E v^2 = \int_{-f_2}^{f_2} S_{vv}(f) df = \frac{N_0}{T} \int_{-f_2}^{f_2} H(f) df = \frac{N_0}{T} \quad (9.34.)$$

A jel-zaj viszonyt a csatornában lévő hasznos jel és a mintavételező bebenetén lévő zaj teljesítményének hányadosaként értelmezzük:

$$SNR = \frac{\bar{P}_\mu}{P_v} = \frac{A_0^2}{\sigma_v^2} = \frac{A_0^2 T}{N_0} \quad (9.35.)$$

A jel-zaj viszony tehát a modulátort tápláló jel A_0 amplitúdójától, a csatornában lévő zaj N_0 spektrális sűrűségétől és az $1/T$ effektív sáv szélességtől függ.

A bithiba valószínűsége

Az alábbiakban az ISI mentes csatornában a zaj hatására bekövetkező szimbólum-tévesztés valószínűségének meghatározásával foglalkozunk. Keressük annak az eseménynek a valószínűségét, amikor a $\tilde{\xi}_k$ vett üzenet nem egyezik meg a ξ_k küldött üzenettel. Ezt az alábbi, egymást kizáró, két esemény feltételes valószínűségének összegeként tudjuk felírni;

$$\begin{aligned} P_{berr} &= P\{\tilde{\xi}_k \neq \xi_k\} = \\ &= P\{\tilde{\xi}_k = -A_0 | \xi_k = +A_0\} P\{\xi_k = +A_0\} + P\{\tilde{\xi}_k = +A_0 | \xi_k = -A_0\} P\{\xi_k = -A_0\} \end{aligned} \quad (9.36.)$$

A scrambler kimenetén előálló üzenet folyamra igaz, hogy:

$$P\{\xi_k = +A_0\} = P\{\xi_k = -A_0\} = \frac{1}{2} \quad (9.37.)$$

A döntési szabályt figyelembe véve, a feltételes valószínűségek kifejezhetők a zaj amplitúdók előfordulási valószínűségeivel:

$$P\{\tilde{\xi}_k = -A_0 | \xi_k = +A_0\} = P\{+A_0 + \gamma_k < 0\} = P\{\gamma_k < -A_0\} \quad (9.38.)$$

$$P\{\tilde{\xi}_k = +A_0 | \xi_k = -A_0\} = P\{-A_0 + \gamma_k \geq 0\} = P\{\gamma_k \geq +A_0\} \quad (9.39.)$$

A (9.38.)-ban felírt valószínűség, (definíció szerint) a Gauss-eloszlású zaj F_γ eloszlásfüggvényéből határozható meg:

$$P\{\gamma \leq -A_0\} = F_\gamma(-A_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\gamma} \int_{-\infty}^{-A_0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_\gamma^2}} dx \quad (9.40.)$$

Vezessük be a $t = \frac{x}{\sigma_\gamma}$ (a zaj szórására normált) változót, amivel a keresett valószínűség a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényével válik kifejezhetővé:

$$F_\gamma(-A_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-A_0/\sigma_\gamma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(-\frac{A_0}{\sigma_\gamma}\right) \quad (9.41.)$$

Ahol a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (9.42.)$$

Mivel feltevésünk szerint a zaj várható értéke zérus, így a valószínűségi sűrűség függvény páros, ezért a (9.38.)-ban és a (9.39.)-ben felírt események valószínűsége egyforma:

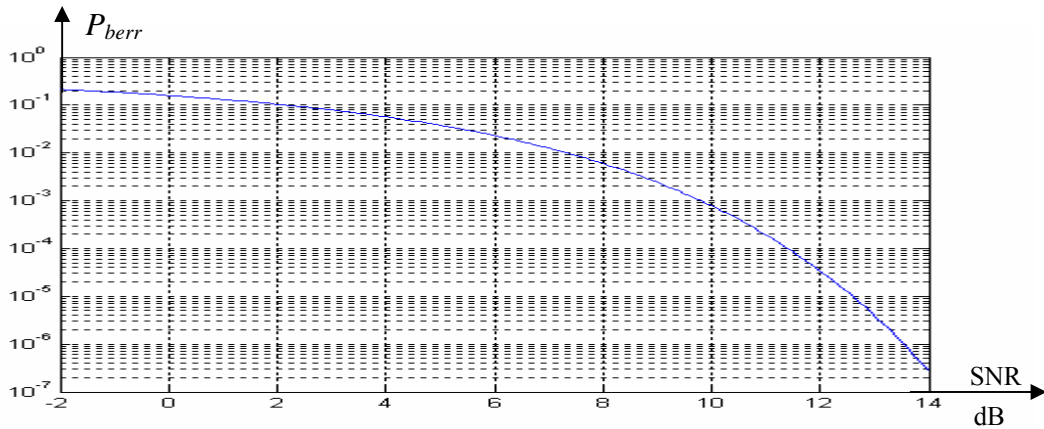
$$P\{\gamma_k \leq -A_0\} = P\{\gamma_k > +A_0\} = \Phi\left(-\frac{A_0}{\sigma_\gamma}\right) = \Phi(-\sqrt{SNR}) \quad (9.43.)$$

A (9.43.)-ban felhasználtuk a jel-zaj viszony (9.35.) szerinti alakjából, az impulzus amplitúdójának és a zaj szórásának hányadosára adódó összefüggést.

Ezzel az üzenet tévesztésének valószínűsége, a bithiba arány:

$$P_{berr} = \frac{1}{2} [\Phi(-\sqrt{SNR}) + \Phi(-\sqrt{SNR})] = \Phi(-\sqrt{SNR}) \quad (9.44.)$$

A 9.7. ábra a bithiba arány alakulását mutatja a dB-ben kifejezett jel-zaj viszony függvényében.



9.7. ábra A kétszintű PAM bithiba valószínűsége a jel-zaj viszony függvényében