

10. Jelgenerátorok

Az oszcillátorok feladata periodikus jelek előállítása. Jellemzőjük a hullámalak és a frekvencia. Bemenő jelük általában nincs, a kimenet maga az előállított jel.

10.1. Táblázatos módszer

Tetszőleges hullámformájú periodikus jel legegyszerűbben úgy állítható elő, hogy a hullám egy periódusának mintáit táblázatban tároljuk. Egy állapotváltozó szükséges (az n index) amivel a táblázatot cirkulárisan címezzük. Ha a táblázat mérete N , akkor a generált jel frekvenciája a mintavételi frekvencia N -ed része:

$$\omega_0 = \frac{\omega_s}{N} \quad (10.1.)$$

Leggyakrabban szinuszos jel előállítása a feladat. Ha a jel frekvenciáját változtatjuk, akkor is célszerű egyetlen táblázatot használni. Legyen a kívánt jel $x(nT)$:

$$x(nT) = A \sin \omega_0 nT = A \sin \varphi(n) \quad (10.2.)$$

A következő mintavételi ütemben érvényes fázis rekurzívan is kifejezhető:

$$\varphi(n+1) = \omega_0 nT = \varphi(n) + \omega_0 T = \varphi(n) + 2\pi\omega_0 / \omega_s \quad (10.3.)$$

Praktikus okokból érdemes az állapotváltozónak felvett fázist nem radiánokban mérni, hanem az alábbiak szerint normálni:

$$f(n+1) = N \frac{\varphi(n+1)}{2\pi} = f(n) + N \frac{\omega_0}{\omega_s} = f(n) + \Delta f \quad (10.4.)$$

A normált fázis növekménye:

$$\Delta f = N \frac{\omega_0}{\omega_s} \quad (10.5.)$$

Ha a jel frekvenciája a mintavételi frekvenciával az

$$\omega_0 = m \frac{\omega_s}{N} \quad (10.6.)$$

viszonyban van (ahol m egész), akkor a fázis növekmény $\Delta f = m$ is egész. Ebből következően az $f(n)$ is egész lehet, amit a táblázat címzésére közvetlenül felhasználhatunk ($f(n)$ az index). A táblázatot a:

$$T_{\sin}[k] = A \sin\left(k \frac{2\pi}{N}\right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (10.7.)$$

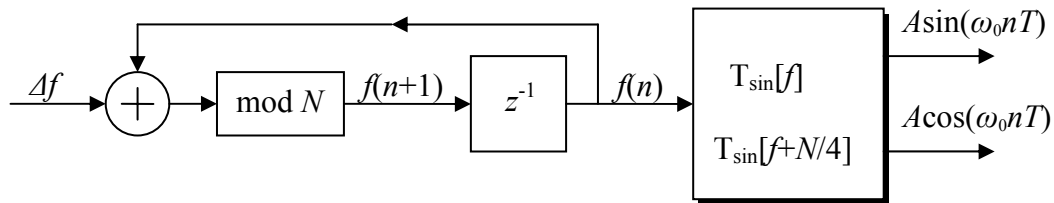
adatokkal feltöltve a jel generálása a memória olvasásával már nagyon egyszerű. A fázis frissítése a növekmény hozzáadásával, majd az eredmény modulo N végrehajtásával kell, hogy megtörténjen, biztosítva azt, hogy az index ne mutasson ki a táblázatból a következő ütemben sem.

$$f(n+1) = [f(n) + m] \bmod N \quad 0 \leq f \leq (N-1) \quad (10.8.)$$

A modulo (maradék) képzés akkor egyszerű, ha az N méretet a 2 egész számú hatványának választjuk és az összeget $(N-1)$ -el a DSP programban "maszkoljuk" (AND).

Pld.: ha $N=256$ $f(n+1) = [f(n) + m] \text{ AND } [255]$ ($255_{\text{dec}}=0000\ 0000\ 1111\ 1111_{\text{bin}}$).

Gyakran igény a kétfázisú (sin-cos) jel előállítás. Ekkor nem kell még egy oszcillátort készíteni, hanem elég a táblázatot folytatni még egy negyed periódus hosszan. A táblázatot az f -ik idextről olvasva a szinuszos, az $f+N/4$ indexről a koszinuszos eredményt kapjuk.



1.1 ábra A numerikusan vezérelt kétfázisú oszcillátor felépítése

10.2. Táblázatos módszer interpolációval (szinuszos jelekre)

A táblázatos módszer kétségtelen hátránya, hogy a (10.6.) értelmében használatával csak diszkrét frekvenciájú jelek állíthatók elő. Ha a (10.5.) szerinti fázisnövekményben megengedünk tört részt is, ettől a hátránytól megszabadulhatunk.

Bontsuk fel a normalizált (f) fázist (e) egész és (t) tört részére:

$$f(n) = e(n) + t(n) \quad (10.9.)$$

ahol: $0 \leq t(n) < 1$.

Legyen most az előállítandó jel az:

$$\begin{aligned} y(n) &= A \cos[\varphi(n)] = A \cos\left[\frac{2\pi}{N} f(n)\right] = A \cos\left[\frac{2\pi}{N} (e(n) + t(n))\right] = \\ &= A \cos\left[\frac{2\pi}{N} e(n)\right] \cos\left[\frac{2\pi}{N} t(n)\right] - A \sin\left[\frac{2\pi}{N} e(n)\right] \sin\left[\frac{2\pi}{N} t(n)\right] \end{aligned} \quad (10.10.)$$

Felhasználva, a kis szögek szinuszára és koszinuszára vonatkozó közelítéseket:

$$\delta = \sin\left[\frac{2\pi}{N} t(n)\right] \cong \frac{2\pi}{N} t(n) \ll 1 \quad \text{valamint} \quad \cos\left[\frac{2\pi}{N} t(n)\right] \cong 1 \quad (10.11.)$$

Írhatjuk:

$$y(n) = A \cos(\omega_0 n T) \cong \mathbf{T}_{\sin}[e(n) + N/4] - \delta \mathbf{T}_{\sin}[e(n)] \quad (10.12.)$$

Az (e) egész részt továbbra is a táblázat indexelésére használtuk fel.

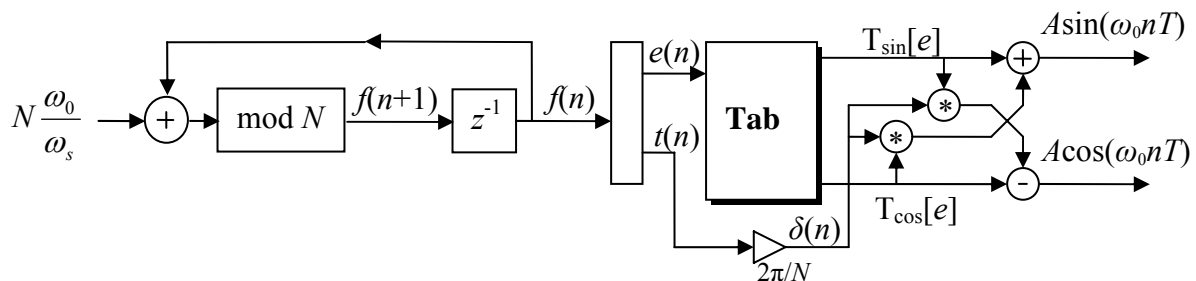
A szinuszos jelre alkalmazva az addíciós tételt, a jel az alábbi képlettel számolható:

$$x(n) = A \sin(\omega_0 n T) \cong \mathbf{T}_{\sin}[e(n)] + \delta \mathbf{T}_{\sin}[e(n) + N/4] \quad (10.13.)$$

Nem jelent sok műveleti többletet, ha a normalizált fázist ($f(n)$ -t) és a növekményt (Δf -et) dupla pontosságú számként tároljuk. Így a (10.5.) szerint beállított frekvencia igen nagy pontossággal realizálható lesz. A (10.10.) és a (10.13.)-ban alkalmazott csak elsőfokú

közelítés ellenére a jel spektrális tisztasága igen jó, a harmonikusok elnyomása jobb, mint 70 dB.

Ezzel a módszerrel olyan oszcillátort konstruáltunk, melynek a bemenetére kapcsolt jel segítségével tetszőlegesen állítani tudjuk a frekvenciát. Az ilyen áramkört nevezik VCO-nak (Voltage Controlled Oscillator), vagy talán helyesebb elnevezéssel NCO-nak (Numerical Controlled Oscillator)



10.2. ábra A kétfázisú VCO megvalósítása

A VCO -t használhatjuk frekvencia-modulátorként és a fáziszárt hurok (PLL) hangolható oszcillátoraként (lásd ott.).

10.3. Rezonátoros módszer

Tekintsük az alábbi két addíciós összefüggést:

$$A \cos[\omega_0(n+1)T] = A \cos[\omega_0 n T] \cos[\omega_0 T] - A \sin[\omega_0 n T] \sin[\omega_0 T] \quad (10.14.)$$

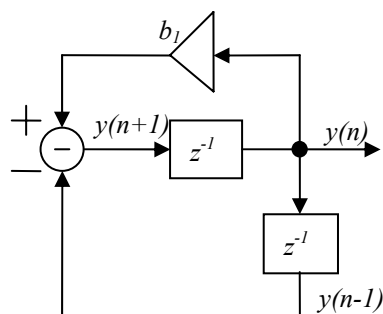
$$A \cos[\omega_0(n-1)T] = A \cos[\omega_0 n T] \cos[\omega_0 T] + A \sin[\omega_0 n T] \sin[\omega_0 T] \quad (10.15.)$$

Bevezetve az $y(n) = A \cos[\omega_0 n T]$ állapotváltozót, a fenti két egyenlet összeadásával az alábbi homogén differencia egyenletet kapjuk:

$$y(n+1) + y(n-1) = b_1 y(n) \quad (10.16.)$$

ahol: $b_1 = 2 \cos[\omega_0 T] \quad (10.17.)$

A (10.16.) összefüggést átrendezve: $y(n+1) = b_1 y(n) - y(n-1) \quad (10.18.)$



10.3. ábra A rezonátorral megvalósított oszcillátor.

A hálózatot az: $y(0) = A$ és az $y(-1) = A \cos \omega_0 T$ kezdeti értékből indítva, ω_0 frekvenciájú, 'A' amplitúdójú koszinuszos jelet kapunk. Az $y(0) = 0$ és az $y(-1) = -A \sin \omega_0 T$ kezdeti feltételekkel indítva, a jel szinuszos lesz.

A 10.3. ábrán egy olyan másodfokú autoregresszív rendszert ismerhetünk fel, melynek (p_1, p_2) pólusai pontosan az egység sugarú körön helyezkednek el:

$$1 + b_1 z^{-1} - z^{-2} = (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) = 0 \quad (10.19.)$$

Az egységkörön lévő pólusok garantálják, hogy a jel amplitúdója állandó lesz. A frekvenciát a b_1 együttható állítja be. Jelöljük az elvileg pontos (végtelen szóhosszúságú) értéket b_1^0 -val:

$$b_1^0 = 2 \cos[\omega_0 T] = 2 \cos\left[2\pi \frac{\omega_0}{\omega_s} T\right] \quad (10.20.)$$

A véges szóhossz miatt a kerekített b_1 értékhez egy $\Delta\omega$ -val megváltozott érték tartozik:

$$b_1 = 2 \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)T] = 2 \cos[\omega_0 T] \cos[\Delta\omega T] - 2 \sin[\omega_0 T] \sin[\Delta\omega T] \quad (10.21.)$$

Kihasználva hogy, a kis szögek koszinusza jó közelítéssel egy és szinusza az argumentummal egyenlő, írhatjuk:

$$|b_1^0 - b_1| = 2 \sin[2\pi\omega_0 T] \Delta\omega T \leq \frac{q}{2} \quad (10.22.)$$

ahol q az LSB helyiértéke. Ezzel az elérhető frekvencia pontosság:

$$\left| \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right| \leq \frac{q}{8\pi \sin \omega_0 T} \frac{\omega_s}{\omega_0} \quad (10.23.)$$

Az alábbi egyenletekből kiindulva próbálkozhatunk kétfázisú oszcillátort készíteni:

$$A \cos[\omega_0(n+1)T] = A \cos[\omega_0 nT] \cos[\omega_0 T] - A \sin[\omega_0 nT] \sin[\omega_0 T] \quad (10.24.)$$

$$A \sin[\omega_0(n+1)T] = A \sin[\omega_0 nT] \cos[\omega_0 T] + A \cos[\omega_0 nT] \sin[\omega_0 T] \quad (10.25.)$$

Bevezetve az:

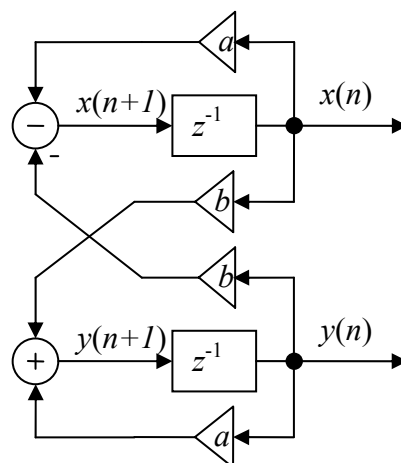
$$x(n) = A \cos[\omega_0 nT]$$

$$y(n) = A \sin[\omega_0 nT]$$

$$a = \cos[\omega_0 T]$$

$$b = \sin[\omega_0 T]$$

megkonstruáljuk a hálózatot:

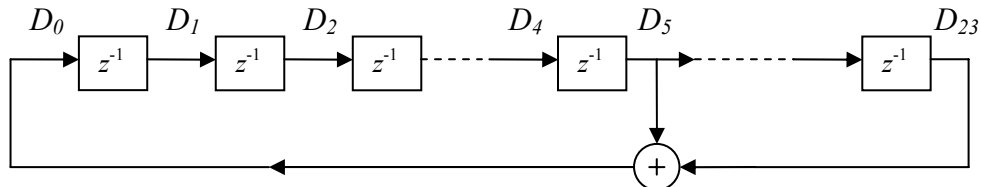


10.4.ábra A kétfázisú oszcillátor elvi megoldása

A kapott megoldás azonban a gyakorlatban nem működik. Az a és b együtthatókat véges szóhosszúságúra kerekítve, az $a^2 + b^2 = 1$ azonosság nem fog teljesülni, így a gyökök nem lesznek az egységsugarú körön. Egységkörön belüli gyökök esetén lecsengő, kívüli gyökök esetén exponenciálisan növekvő (így előbb-utóbb túlsorduló) jeleket kapunk.

10.4. Zajgenerátorok

Bizonyos feladatokban szükségünk lehet véletlen változó jelekre. Az alábbiakban egy meglehetősen egyszerű algoritmust mutatunk be ál-véletlen sorozatok generálására, ami ugyanakkor jó paraméterekkel rendelkezik. A megoldás egy visszacsatolt shiftregiszteren alapul az alábbi ábra szerint:



10.5. ábra Visszacsatolt shiftregiszter mint véletlen szám generátor

Az összeadás egy átvitel nélküli egy bites összeadást (XOR) jelent. Az előállított ál-véletlen szám legyen:

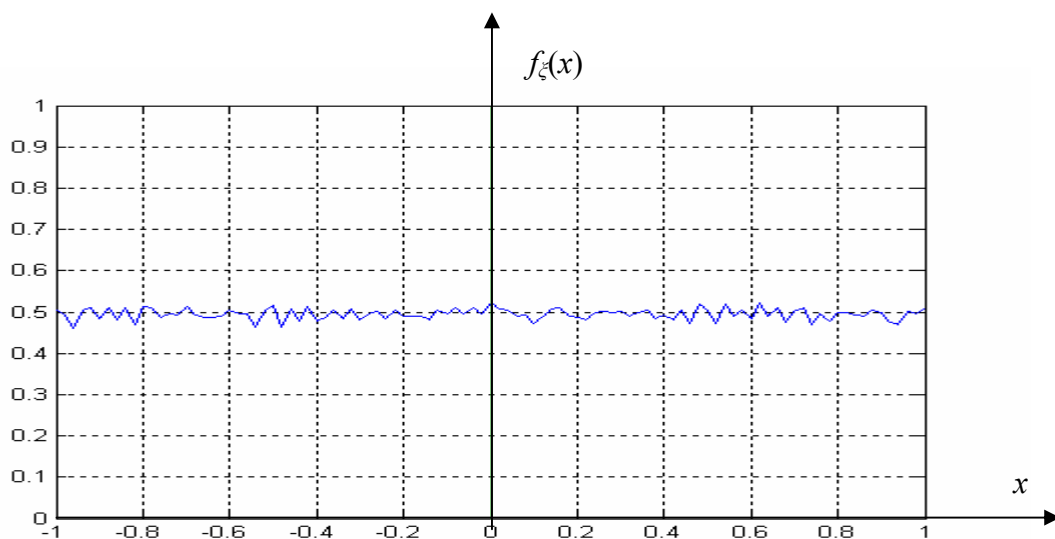
$$\xi = 2^{-15} \sum_{i=0}^{15} D_i 2^i = D_{15} + D_{14} 2^{-1} + \dots + D_0 2^{-15} \quad (10.26.)$$

A shiftregiszter adatai két 16 bites változóban elhelyezhetők, így a (10.26.)-ban felírt változó egy kettes komplementes kódú számnak tekinthető, melyben az MSB (D_{15}) az előjel bit. A shiftregiszter léptetése könnyen megoldható: a két változót betöltjük a 32-bites akkumulátorba és végrehajtunk egy SHIFT LEFT utasítást. Az LSB bitet (D_0 -át) képezve, azt hozzáadjuk (XOR-oljuk) az akkumulátorhoz.

A (10.26.)-ban megadott szám formátuma: 16TC Q15, ami azt jelenti, hogy az álvéletlen szám a $-1 \leq \xi < 1$ intervallumba esik.

A shiftregisztert 0-tól különböző tartalommal indítjuk. Az előállított sorozat periodikus lesz, de a periódus hossza nagyon nagy ($2^{23} \approx 8.39 \cdot 10^6$)

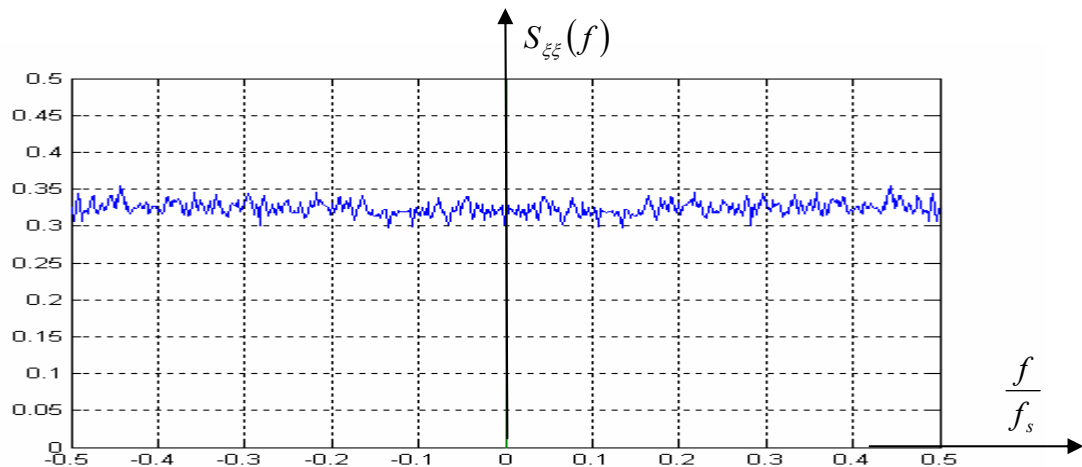
A fenti véletlen szám generátor statisztikáit határozzuk meg szimulációval.



10.6. ábra A hisztogrammal felvett amplitúdó sűrűség függvény

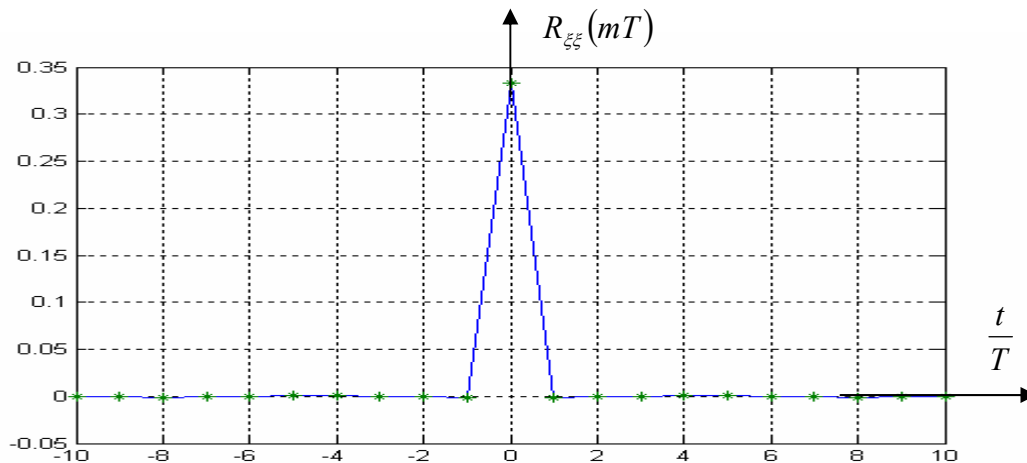
Egy $N = 10^5$ hosszú sorozat mintáit összegyűjtve, és 200 azonos nagyságú intervallumra hisztogrammot szerkesztve felvehetjük a jel kísérleti úton meghatározott amplitúdó sűrűség függvényét. A 10.6. ábrából láthatóan az egyenletes eloszlás kielégítő mértékben teljesül. A közel szimmetrikus alak a zérus várható értéket biztosítja.

Ha minden mintát felhasználunk, akkor az előállított jel spektruma nem lesz “fehér”. Annak érdekében, hogy a minták korrelálatlanok legyenek, dobjunk el néhány mintát! Például, ha csak minden ötödik mintát tartjuk meg (a shiftregisztert valójában ötszörös sebességgel léptetjük a mintavételi frekvenciához képest), akkor az előállított jel teljesítmény sűrűség spektrumára az alábbi ábrán látható becslést kapjuk:



10.7. ábra A spektrális teljesítmény sűrűség függvény

Az autokorrelációs sorozatot a spektrális sűrűség függvény inverz Fourier transzformáltjaként számítjuk ki. Az eredmény a 10.8. ábrán látható:



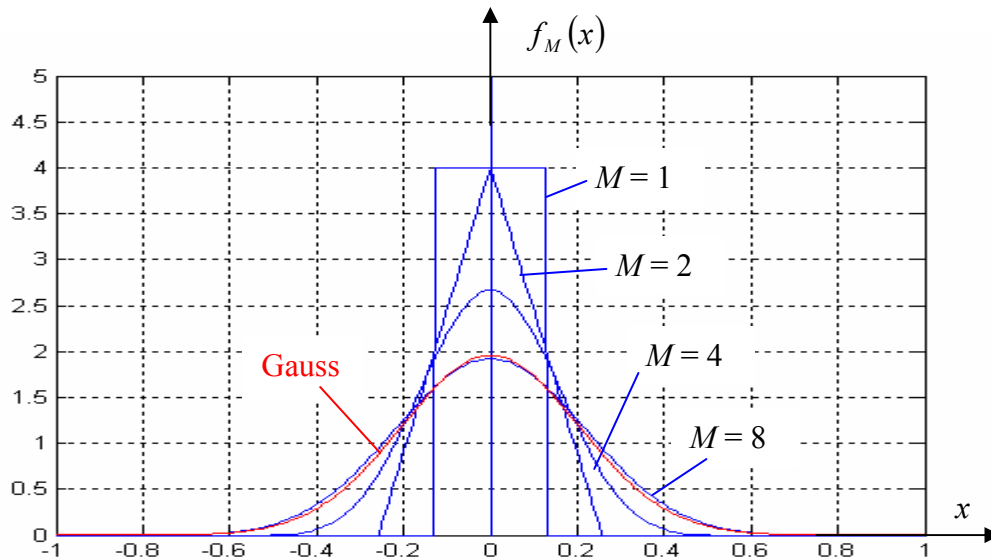
10.8. ábra A becsléssel meghatározott autokorrelációs függvény (sorozat)

Az ábrából jól látható, hogy az így előállított ál-véletlen sorozat korrelálatlan, vagyis a spektrum fehér. (Ha minden mintát megtartottunk volna, akkor az első öt korrelációs tag még nem lenne elhanyagolható. Ez adta az ötletet a mintaritkításra.)

Ha nem fehér folyamatra van szükség, akkor egy megfelelő szűrővel a spektrum a kívánalmaknak megfelelően módosítható. A szűréssel a jel amplitúdó eloszlása azonban megváltozik, a szűrő kimenő jele nem lesz egyenletes eloszlású.

A zérus várható értékű, Gauss-eloszlású véletlen változó jelek jelentősége abban rejlik, hogy ilyen eloszlású jelet szűrve, a kimenet is zérus várható értékű, Gauss-eloszlású lesz.

Normális- (Gauss-) eloszlású jelet jó közelítéssel előállíthatunk egyenletes eloszlású jelekből. Vegyünk pld. $M = 8$ darab korrelálatlan, egyenletes eloszlású jelet és képezzük ezek összegét! Tanulmányainkból tudjuk, hogy az összeg sűrűség függvénye a tagok sűrűség függvényeinek konvolúciójaként határozható meg. A 10.9. ábrán az $M = 1$ értékhez tartozó, a $[-1/8, +1/8]$ intervallumban egyenletes eloszlás mellett feltüntettük az $M = 2, 4$ és 8 értékekhez tartozó sűrűség függvényeket is.



10.9. ábra Az M különböző értékeihez tartozó sűrűség függvények

Az egyetlen jel szórásnégyzete:

$$\sigma_1^2 = \int_{-\frac{1}{8}}^{+\frac{1}{8}} 4x^2 dx = \frac{1}{192} \approx (0.07217)^2$$

A nyolc jel összegének szórásnégyzete:

$$\sigma_8^2 = 8\sigma_1^2 = \frac{1}{24} \approx (0.2041)^2$$

A 10.9. ábrába berajzoltuk az ehhez a szórásnégyzethez tartozó Gauss-eloszlás sűrűség függvényét is. Láthatóan már $M = 8$ esetén is jó egyezés van a közelítő és a valódi eloszlások között. A lényeges különbség, hogy a Gauss-eloszlásban (igaz nagyon kis valószínűséggel) előfordulnak 1-nél nagyobb (ill. -1-nél kisebb) értékek is, addig a közelítő módszerben ez nem következhet be (nincs túlcordulás).

A korrelálatlan jeleket a hasonló, de különböző kezdőállapotból indított shiftregiszterekből nyerjük. Az összegzett jel spektruma fehér marad.