

11. A gyors Fourier transzformáció (*Fast Fourier Transform, FFT*)

Az FFT a diszkrét idejű Fourier transzformáció (DFT) kiszámításának egy hatékony algoritmus. Ha f_n egy (általában komplex értékű) idősorozat, ahol $n=0,1,2,\dots,(N-1)$, akkor ennek DFT-je, (azaz a spektrum):

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{nk} \quad k = 0,1,2,\dots,(N-1) \quad (11.1.)$$

Ahol: $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ (11.2.)

Az algoritmus akkor lesz hatékony, ha N -et a 2-nek egész számú hatványaként választjuk meg.

A (11.1.)-szerinti összegzést bontsuk fel két részre, mely részekben a páros ($2n$), ill. a páratlan ($2n+1$) sorszámú mintákat használjuk csak fel:

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2n} W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} f_{2n+1} W_N^{(2n+1)k} = \\ &= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g_n W_{(N/2)}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{(N/2)-1} h_n W_{(N/2)}^{nk} = G_k + W_N^k H_k \end{aligned} \quad (11.3.)$$

A (11.3.)-ban G_k és H_k mennyiségeket felfoghatjuk úgy, mint az $N/2$ hosszúságú g_n és h_n sorozatok DFT-jét, ahol:

$$g_n = f_{2n} \quad h_n = f_{2n+1} \quad n = 0,1,2,\dots,(N/2-1) \quad (11.4.)$$

A G_k és H_k kiszámításánál a k index a $k=(0,1,2,\dots,(N/2-1))$ értékeket veheti fel, míg a (11.1.) kiszámításához az indexnek a $k=(0,1,2,\dots,(N-1))$ tartományon kell futnia. Ezért az $(N/2)$ ill. az ennél nagyobb index értékekre a (11.1.)-et írjuk fel az alábbi alakban:

$$F_{k+N/2} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g_n W_{(N/2)}^{n(k+\frac{N}{2})} + W_N^{k+\frac{N}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h_n W_{(N/2)}^{n(k+\frac{N}{2})} \quad (11.5.)$$

ahol: $k=(0,1,2,\dots,(N/2-1))$

A (11.5.) összefüggésben szereplő tényezők egyszerűbben is kifejezhetők:

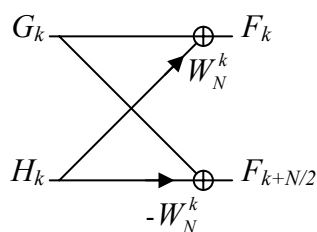
$$W_N^{k+N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+\frac{N}{2})} = e^{-j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\pi} = -e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = -W_N^k \quad (11.6.)$$

$$W_{(N/2)}^{k+N/2} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2(k+\frac{N}{2})} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2k} e^{-j2\pi} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2k} = W_{(N/2)}^k \quad (11.7.)$$

Ezzel a spektrum felső fele:

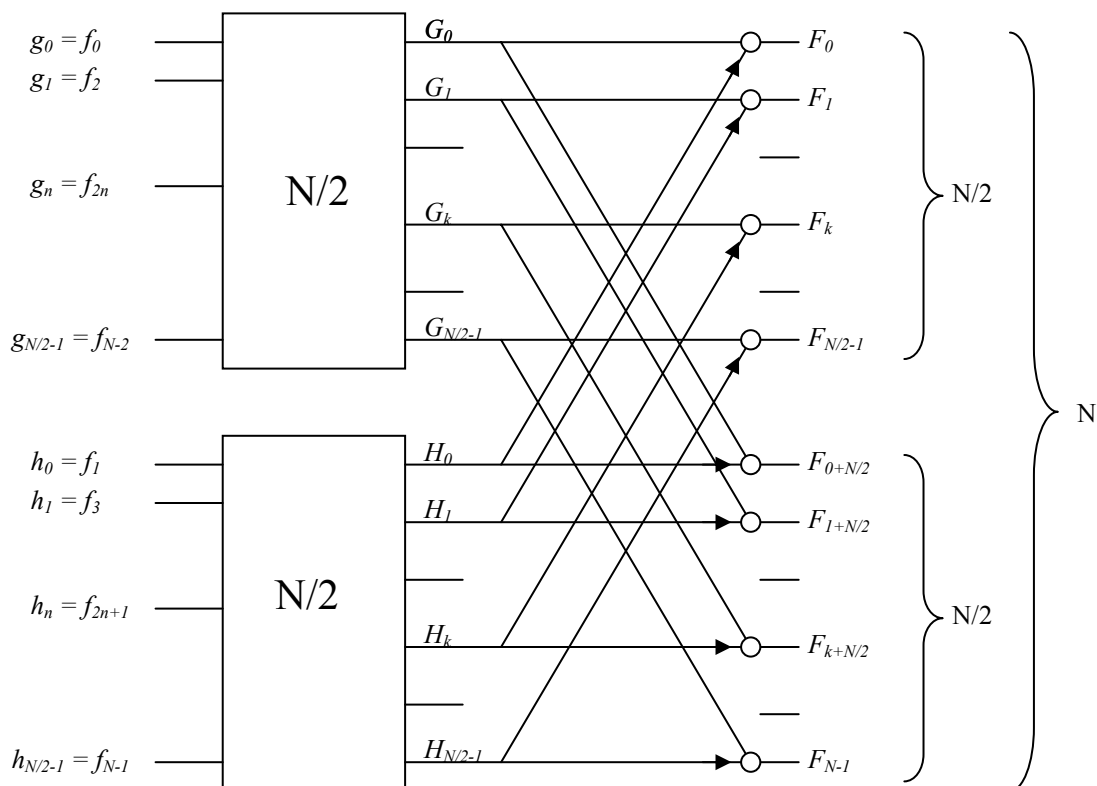
$$F_{k+N/2} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} g_n W_{N/2}^{nk} - W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h_n W_{N/2}^{nk} = G_k - W_N^k H_k \quad (11.8.)$$

A (11.3.) és a (11.8.) összefüggéseket egy jelfolyam gráfban ábrázolva kapjuk az u.n. "pillangót" (butterfly):



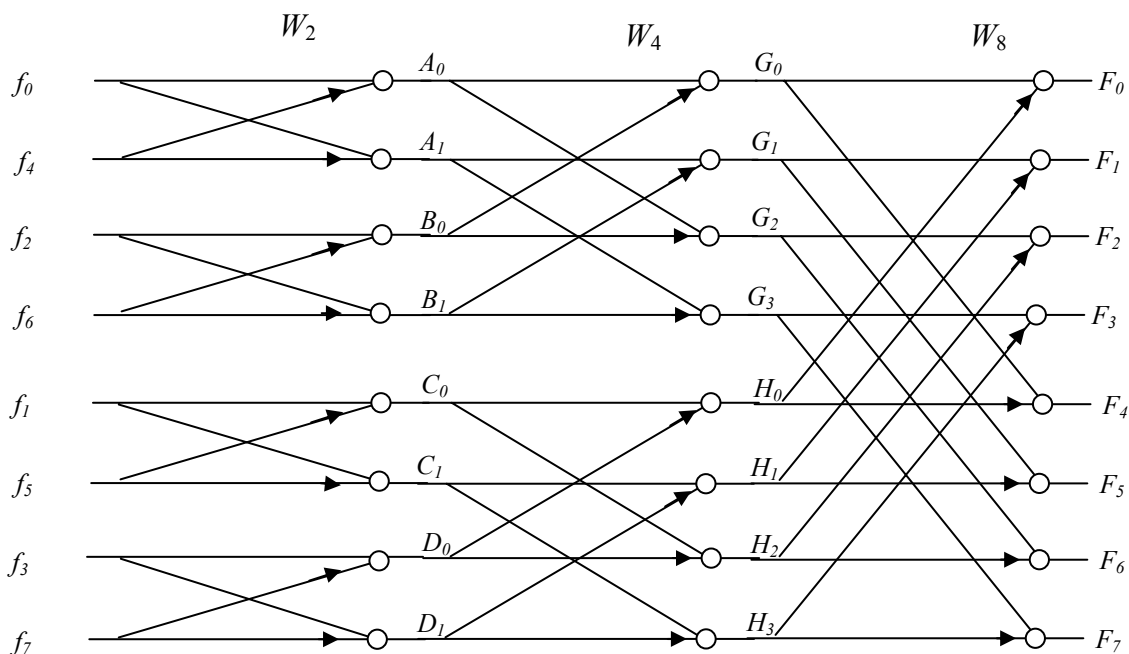
11.1. ábra A pillangó

Ezzel az átalakítással az N -pontos DFT kiszámítását visszavezettük két $(N/2)$ fokszámú DFT kiszámítására.



11.2. ábra Az N -pontos DFT visszavezetése két $(N/2)$ -pontos DFT kiszámítására.

Természetesen a fokszám redukálós eljárás tovább folytatható, mivel az N a 2-nek egész számú hatványa. Az alábbi ábra egy $N=8$ pontos DFT teljes kifejtését mutatja:



11.3. ábra Az $N=8$ pontos FFT kiszámításának folyamatábrája

Mint az ábrából látható minden egyes fokozatban $N/2$ darab komplex szorzást, összeadást ill. kivonást kell elvégezni, míg a fokozatok száma $\log_2 N$. A műveletek összes száma:

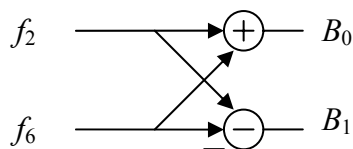
$$sz = \frac{N}{2} \log_2 N \quad (11.9.)$$

Ha a DFT-t a (11.1.) szerint számítanánk ki, akkor N^2 komplex szorzást kellene elvégeznünk. A megtakarítás nagy N -eknél jelentős, pld. $N=1024$ esetén az FFT művelet igénye 5120, míg a közvetlen számolással $1024^2 \sim 10^6$ adódik.

További egyszerűsítést jelent a 0-s indexű pillangók számításánál a:

$$W_N^0 = e^{-j0} = 1 \quad (11.10.)$$

azonosság használata.



11.4. ábra Az első fokozat pillangói

Az algoritmus taglalását az idősorozat decimálásával kezdtük (**Decimation In Time**) ezért ezt DIT eljárásnak nevezik. A DIT módszerben a kimeneti sorozat rendezett (az indexek növekvő sorrendben helyezkednek el), míg a bemeneti sorozat első pillantásra rendezetlennek tűnik. Az alábbi táblázat első két oszlopában ezt a sorrendet tüntettük fel decimális és bináris formában.

n_{dec}	n_{bin}	r_{bin}	r_{dec}
0	000	000	0
4	100	001	1
2	010	010	2
6	110	011	3
1	001	100	4
5	101	101	5
3	011	110	6
7	111	111	7

A táblázat harmadik oszlopába a második oszlop bináris adatainak fordítottját (reverse) írtuk. Ezt a számot decimálissá alakítva a rend helyreáll. Itt nem bizonyítjuk, de ez a rend más pontszámokra is érvényes.

A DIT eljárásban tehát az input vektor feltöltését **bit reverse** címkéssel kell elvégezni.

DSP implementáció esetén a fontos szempont, hogy a számítások közben elkerüljük a túlszordulást. Ha az f_n sorozat formátuma pld 16 TC Q15, ($-1 \leq \text{real}(f_n) < 1$, $-1 \leq \text{imag}(f_n) < 1$), akkor a részeredmények és kimenet adatai biztosan nem férnek el ebben a formátumban. Ezért a (11.1.)-el ellentétben az FFT esetében a pillangókban egy 2-vel való osztást is végrehajtottunk, így az összeadások után a formátum mindig ugyanaz maradhat. Ez $\log_2 N$ számú fokozat után N -nel történő osztásnak felel meg.

DFT esetén:

$$F_k = DFT\{f_n\} = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{nk} \quad (11.11.)$$

FFT esetén:

$$F_k = FFT\{f_n\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{nk} \quad (11.12.)$$

Az FFT-ben a pillangók:

$$F_k = \frac{1}{2} (G_k + W_N^k H_k) \quad \text{és} \quad F_{k+N/2} = \frac{1}{2} (G_k - W_N^k H_k) \quad (11.13.)$$

Ha egy sorozat **inverz** diszkrét Fourier transzformáltját (IDFT-jét) kell kiszámítanunk, akkor azt elvégezhetjük a rendelkezésünkre álló (11.12.) szerinti FFT eljárással.

A feladat:

$$f_n = IDFT\{F_k\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (11.14.)$$

Képezzük a (11.14.) szerinti kifejezés konjugáltját! (Az összeg konjugáltja a tagok konjugáltjának összege, a szorzat konjugáltja a tényezők konjugáltjának szorzata.):

$$f_n^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k^* e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k^* W_N^{kn} = FFT\{F_k^*\} \quad (11.15.)$$

Az input vektort a bemeneti sorozat konjugáltjával töltjük fel (bit reverse címezéssel), majd az FFT eredményét ismételten konjugáljuk, miáltal megkapjuk a sorozat IDFT-jét.

11.2. Az FFT és a spektrum kapcsolata (a szivárgás)

A spektrum analízátorokban gyakran alkalmaznak FFT-n alapuló eljárást a spektrum meghatározására. Vizsgáljuk most meg, hogy egy f_c frekvenciájú, komplex értékű harmonikus jel esetében milyen eredményt ad az FFT.

Legyen: $x(t) = Ce^{j2\pi f_c t}$ (11.16.)

Ennek a jelnek a spektruma:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = C \delta(f - f_c) \quad (11.17.)$$

A (11.17.) szerint a spektrum analízátortól azt várnánk el, hogy a megjelenített spektrumban az $f = f_c$ frekvencián egy C-vel arányos hosszúságú egyetlen vonal jelenjen meg.

Most mintavételezzük meg az $x(t)$ jelet $f_s = 1/T$ frekvenciával ($f_s > 2f_c$)!

Az időtartományban:

$$x_n = x(t = nT) \quad n = -\infty, \dots, +\infty \quad (11.18.)$$

A frekvenciatartományban:

$$X^*(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi f n T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_s) = \frac{C}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - f_c - kf_s) \quad (11.19.)$$

Ha a jelből N db mintát gyűjtünk össze az FFT számára:

$$y_n = w_n x_n \quad n = -\infty, \dots, +\infty \quad (11.20.)$$

Ahol:

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad 0 \leq n \leq (N-1) \\ 0 & \text{egyebkent} \end{cases} \quad (11.21.)$$

Ennek a sorozatnak a diszkrét idejű Fourier transzformáltja (DTFT-je):

$$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{-j2\pi f n T} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi f n T} \quad (11.22.)$$

Példánknál maradva:

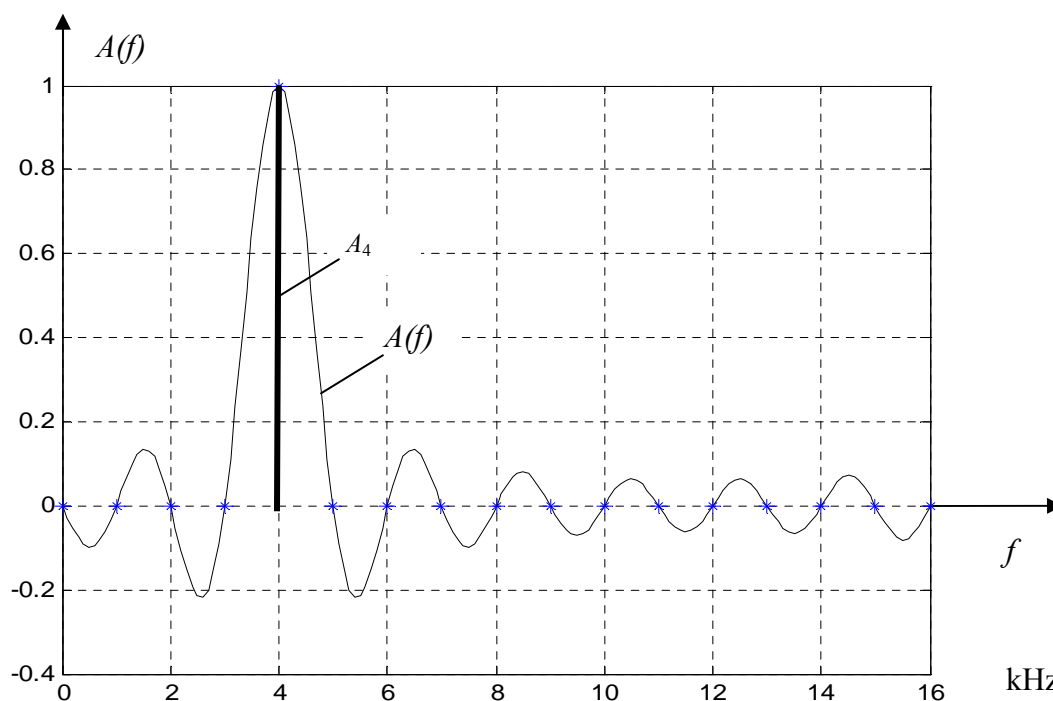
$$Y(f) = C \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi f_c n T} e^{-j2\pi f n T} = C \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi (f-f_c) n T} = A(f) e^{j\varphi(f)} \quad (11.23.)$$

Ahol:
$$A(f) = \frac{\sin(N\pi(f-f_c)T)}{\sin(\pi(f-f_c)T)} \quad \varphi(f) = -\pi(f-f_c)T(N-1) \quad (11.24.)$$

A spektrum analizátor ezeknek a függvényeknek az értékeit tudják kiszámítani néhány diszkrét frekvenciaérték helyén. Ezeket a frekvenciákat válasszuk meg az alábbi módon:

$$f_k = k \frac{f_s}{N} \quad (11.24.)$$

Az ezeken a helyeken felvett függvény értékeket jelöljük : $A_k = A(f_k)$ -val

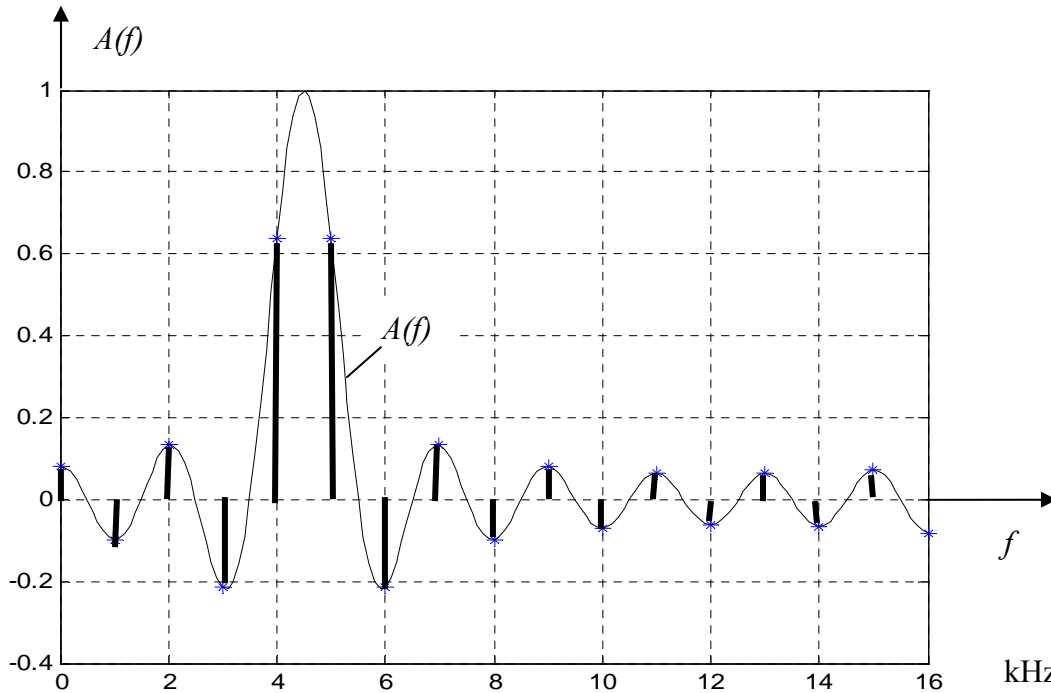


11.5. ábra A jel spektrumának $A(f)$ amplitudó karakterisztikája
 $f_c=4\text{kHz}$, $f_s=16\text{kHz}$ és $N=16$ paraméter értékek mellett

Ha a (11.22.) összefüggésbe helyettesítjük be az $f = f_k$ értéket, akkor az:

$$Y_k = A_k e^{j\varphi_k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi f_k nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \quad (11.25.)$$

kifejezést kapjuk, amiben az N hosszú sorozat DFT-jét ismerjük fel. A DFT-t viszont az FFT algoritmusával számoljuk ki. A 11.5. ábrát tekintve, az FFT alapú spektrum analízátor a várt eredményt adta, a kapott spektrum az $f_c = f_4$ helyen elhelyezkedő egyetlen vonalból áll.



11.6. ábra A jel spektrumának $A(f)$ amplitúdó karakterisztikája
 $f_c=4.5\text{kHz}$, $f_s=16\text{kHz}$ és $N=16$ paraméter értékek mellett

A 11.6. ábrán egy olyan frekvenciájú bemenő jelnek az amplitúdó spektrumát mutatja, melynél a frekvencia nem esik az f_k frekvencia raszter egyik pontjára sem (4.5 kHz). Mint az ábrából látható, olyan helyeken is megjelenik spektrum komponens, ahol az eredeti jelben nem volt. Ezt a jelenséget nevezzük **spektrum szivárgásnak** (spectrum leakage).

A szivárgás annak a következménye, hogy a spektrumot véges (N számú) mintájából akarjuk meghatározni.

Szivárgás akkor nem lép fel, ha a bemenő jel olyan periodikus jel, amikor is a periódus idő egész számú többszöröse megegyezik az adatgyűjtés teljes (NT) idejével. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy a bemenő jel csak az f_k sorozatnak megfelelő frekvenciájú komponenseket tartalmaz.

11.3. A szivárgás csökkentése ablakolással

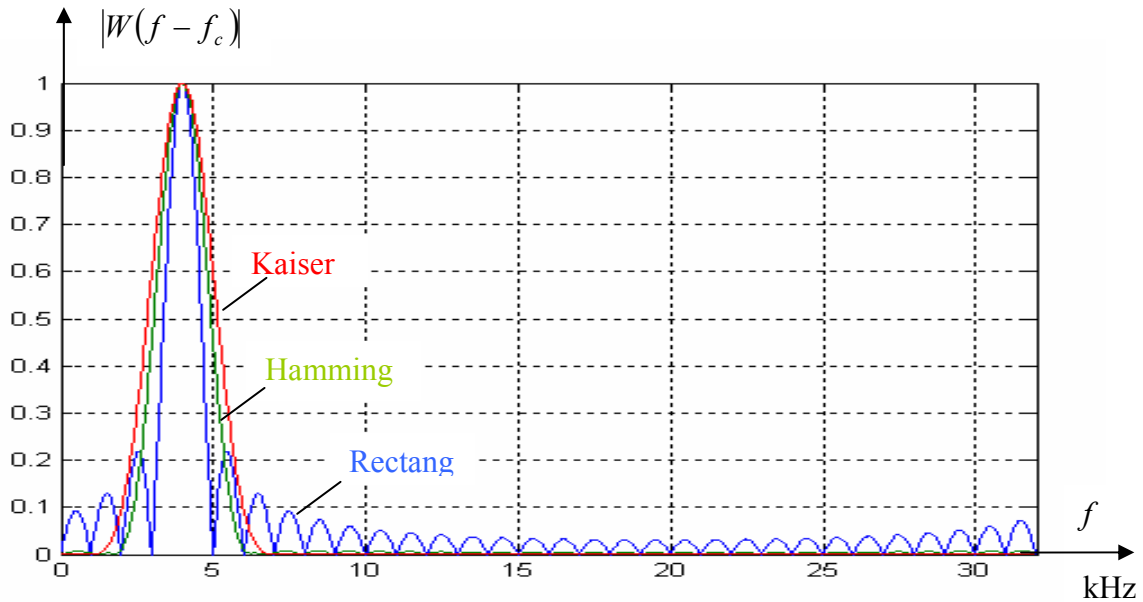
Mint az előzőekben láttuk, a (11.20.) szerinti négyszögletes (rectangular) ablakolás esetében a spektrum szivárgás jelentős. Még igen távoli frekvenciákon is megjelennek olyan spektrum-komponensek, melyek az eredeti jelben nem voltak.

A távoli frekvenciákon a szivárgás jelentősen elnyomható, ha az ablakoló függvény nem konstans, hanem a FIR szűrők tervezésénél megismert Bartlett, Hamming, Kaiser, stb., függvények valamelyike.

Az ablakolás az időtartományban szorzást jelent: $y_n = w_n x_n$

A frekvencia tartományban az ablakolt sorozat spektruma konvolúcióval számítható:

$$Y(f) = \frac{1}{f_s} \int_0^{f_s} X^*(v) W(f-v) dv = \frac{1}{f_s} \int_0^{f_s} \frac{C}{T} \delta(v-f_c) W(f-v) dv = CW(f-f_c) \quad (11.26.)$$



11.7. ábra A jel spektrumának abszolút értéke különböző alakfüggvények esetében $f_c=4\text{kHz}$, $f_s=32\text{kHz}$ és $N=32$ paraméter értékek mellett

Az FFT (mint korábban már beláttuk) ennek a spektrumnak az értékeit határozza meg a kiadódó frekvencia raszter értékei mellett. Az ábrán ez a raszter 1 kHz. Ha a vizsgált jel frekvenciája erre a raszterre esik, a rectangular ablak hibátlan eredményt ad. Ha nem, akkor a szivárgás jelentős. A Hamming (és a Kaiser) ablaknál a szomszédos raszter pontokban jelentős amplitúdó érték jelenik meg (0.5, ill. 0.6), ugyanakkor a távolabbi pontokban a szivárgás-elnyomás szinte tökéletes.

11.4. A periodogram

Tételezzük fel, hogy egy (legalább gyengén) stacionárius, véletlen változó x_n jelsorozat spektrumát kívánjuk meghatározni véges sok mintájából. A gyenge stacionaritás feltétele, hogy a jel várható értéke:

$$\mathbf{E}\{x_n\} = konst \quad (11.27.)$$

legyen, és az autókorrelációs függvény értéke ne függjön az n értékétől:

$$R_x(m) = \mathbf{E}\{x_{n+m}x_n\} \quad (11.28.)$$

A véletlen változó jel spektrumán az autókorrelációs függvény Fourier transzformáltját értjük, amit spektrális (teljesítmény) sűrűség függvénynek nevezünk:

$$S_x(f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_x(m) e^{-j2\pi f m T} \quad (11.29.)$$

A célunk tehát az $S_x(f)$ becslése.

Első lépésként a bejövő sorozatból a w_n ablakoló sorozat segítségével véges sok (N db) mintát gyűjtünk:

$$y_n = w_n x_n = \begin{cases} y_n & \text{ha} \\ 0 & \text{egyebkent} \end{cases} \quad 0 \leq n \leq (N-1) \quad (11.30.)$$

Az autókorrelációs sorozat becslését végezzük el az alábbi módon:

$$\tilde{R}_y(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n y_{n+m} = \frac{1}{N} y_n * y_{-n} \quad (11.31.)$$

Itt észrevehetjük, hogy a becslést az y_n sorozatnak és időben megfordítottjának (y_{-n}) konvolúciójaként számíthatjuk ki.

Most képezzük a (11.31.) Fourier transzformáltját!

$$P_N(f) = DTFT\{\tilde{R}_y(m)\} = \frac{1}{N} Y(f) Y^*(f) \quad (11.32.)$$

ahol:

$$Y(f) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j2\pi f n T} \quad (11.32.)$$

Ezt a Fourier transzformáltat nevezzük (N pontos) **periodogram**-nak.

$$P_N(f) = \frac{1}{N} |Y(f)|^2$$

(11.33.)

Bebizonyítható, hogy:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{P_N(f)\} = S_x(f) \quad (11.34.)$$

azaz a periodogram a spektrális teljesítmény sűrűség függvényt aszimptotikusan jól becsli.
A (11.34.) akkor igaz, ha az ablakfüggvény úgy van normálva, hogy teljesül rá nézve az:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w_n^2 = 1 \quad (11.35.)$$

azonosság.

Ha a spektrumot csak a diszkrét f_k frekvenciákon akarjuk meghatározni, akkor :

$$Y_k = Y(f_k) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j2\pi f_k n T} = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} = DFT\{y_n\} \quad (11.36.)$$

Így a periodogram is diszkrét helyeken lesz ismert:

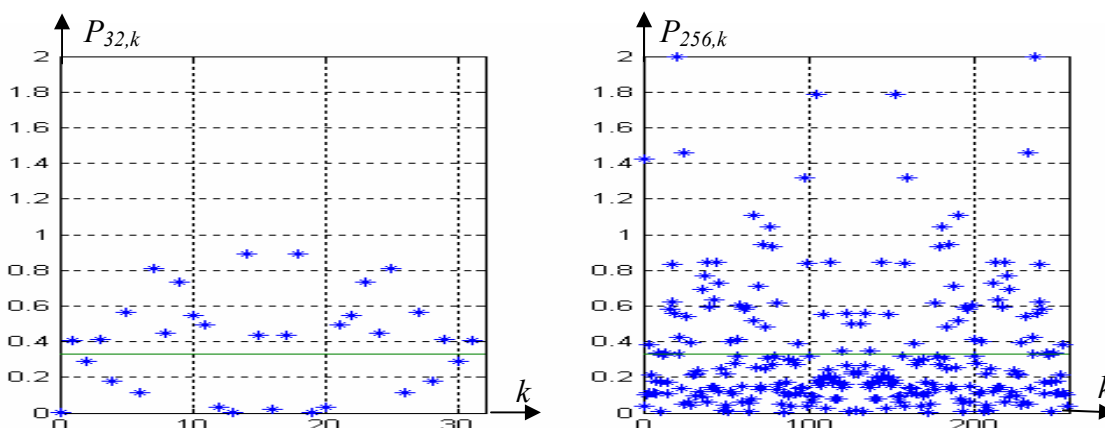
$$P_{N,k} = P_N(f_k) = \frac{1}{N} |Y_k|^2 \quad k=0,1,2,\dots,(N-1) \quad (11.37.)$$

A (11.36.)-ot természetesen FFT algoritmussal számítjuk ki.

A (11.34.) alapján azt gondolnánk, hogy a periodogram használható eredményt ad. Hogy belássuk a periodogram szerény teljesítő képességét, tekintsük az alábbi feladatot:

Legyen az x_n jel zérus várható értékű, a $[-1,+1]$ intervallumon egyenletes eloszlású korrelálatlan sorozat. Ennek a spektrális sűrűség függvénye konstans = 0.333 (a szórásnégyzet).

A MATLAB szimulációt $N=32$ és $N=256$ értékekre elvégezve az eredmény az alábbi ábra szerinti lesz:



11.8.ábra Az $N=32$ és $N=256$ paraméterű periodogram eredménye (négyszögletes ablakkal)

Azt tapasztaljuk, hogy a pontszám növelésével az ábra egyre inkább “kifelhősödik” és ha ebből az ábrából kellene következtetnünk az ismeretlen spektrumra, bizony nehéz dolgunk lenne.

Vizsgáljuk meg, hogy a “kifelhősödés” minek a következménye. Ennek érdekében tekintsük a periodogram két pontjának $P_N(f_1)$ és $P_N(f_2)$ -nek, mint két valószínűségi változónak a kovarianciáját:

$$\begin{aligned} \text{cov}\{P_N(f_1), P_N(f_2)\} &= \mathbf{E}\{[P_N(f_1) - \mathbf{E}\{P_N(f_1)\}][P_N(f_2) - \mathbf{E}\{P_N(f_2)\}]\} = \\ &= \mathbf{E}\{P_N(f_1)P_N(f_2)\} - \mathbf{E}\{P_N(f_1)\}\mathbf{E}\{P_N(f_2)\} = \\ &= \dots\dots\dots = \\ &\equiv \begin{cases} \sigma_P^4 & \text{ha } |f_2 - f_1| < 2B \\ 0 & \text{ha } |f_2 - f_1| > 2B \end{cases} \end{aligned} \quad (11.38.)$$

A hosszadalmas számítás eredménye a két önkényesen választott frekvencia távolságától függ. Ha ez a távolság kisebb az ablakfüggvényhez tartozó $W(f)$ főhurokjának sáv szélességénél ($2B$ -nél), akkor egy véges értéket kapunk, ellenkező esetben zérust.

Ha a két frekvencia megegyezik egymással (a távolságuk zérus) a (11.38.) a periodogram értékének mint valószínűségi változónak a szórásnégyzetet szolgáltatja:

$$\begin{aligned} \text{var}\{P_N(f_1)\} &= \mathbf{E}\{[P_N(f_1) - \mathbf{E}\{P_N(f_1)\}]^2\} = \\ &= \mathbf{E}\{P_N(f_1)^2\} - [\mathbf{E}\{P_N(f_1)\}]^2 = \sigma_P^2(f_1) > 0 \end{aligned} \quad (11.39.)$$

Az a tény, hogy két valószínűségi változó kovarianciája zérus, miközben a szórásuk véges, vezet egy olyan ábrához, melyben az egymástól nem túl nagy távolságra ($>2B$) elhelyezkedő két vonal egy regisztrátumon belül jelentősen eltérhet egymástól. Az ábra egészét tekintve ez a tény jelentkezik úgy, mint egy felhő.

A véges értékű szórás (melynek nagysága független az N pontszámtól) következtében a periodogram a spektrum becslését nem konzisztens módon végzi. Konzisztens becslést úgy kaphatunk, hogyha a mérés szórását lecsökkentjük.

Ha a spektrumot nem egyetlen minta N -esből, hanem egymás után M számú adatgyűjtés és periodogram átlagolásával számoljuk az :

$$\hat{S}_k = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M P_{N,k}^{(i)} \quad (11.40.)$$

összefüggés alapján, akkor a szórás négyzetet is M -ed részére tudjuk csökkenteni:

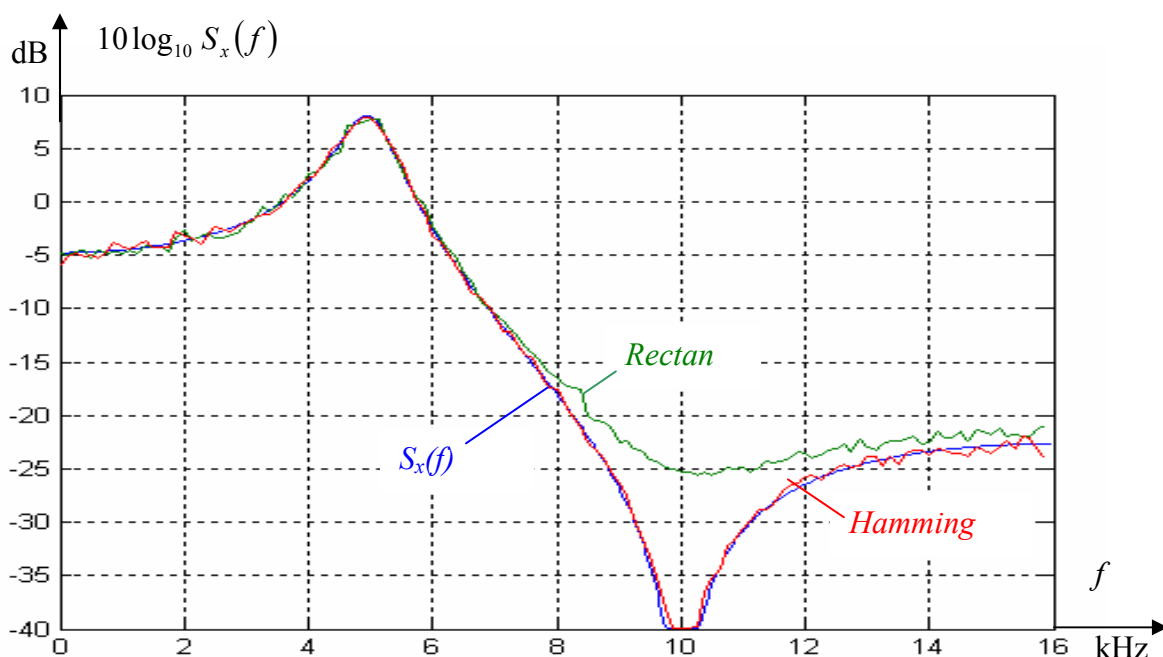
$$\sigma_S^2 = \frac{\sigma_P^2}{M} \quad (11.41.)$$

A módszer szemléltetése érdekében tekintsünk egy példát! Egy korrelálatlan (konstans spektrális sűrűség függvényű), σ_0 szórású jelsorozatot engedjük át egy ismert $H(f)$ frekvencia karakterisztikájú hálózaton. Az x_n kimenet spektrális sűrűség függvénye ekkor:

$$S_x(f) = \sigma_0^2 |H(f)|^2 \quad (11.41.)$$

szintén ismert.

A kimeneti jel periodogramját átlagolva az alábbi ábrán látható eredményt kapjuk:



11.8. ábra A spektrumbecslés eredménye kétféle ablakkal

A paraméterek a szimuláció során $N=256$, $M=100$ értékűek voltak.

Szokásos módszer még a rekurzív átlagolás, melyben:

$$\hat{S}_k^{(i)} = \Delta P_{N,k}^{(i)} + (1 - \Delta) \hat{S}_k^{(i-1)} \quad (11.43.)$$

ahol delta egy 1-nél kisebb pozitív szám.