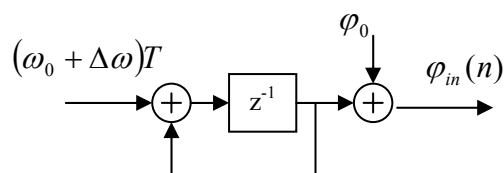


12. A fáziszárt hurok (Phase Locked Loop, PLL)

A fáziszárt hurok feladata az, hogy egy helyi (lokális) oszcillátor fázisát szinkronba hozza a bemenetére érkező **periódikus jel** fázisával.

A bemeneti periódikus jel fázisát három paraméterével jellemezhetjük: a névleges frekvencia (ω_0), a tényleges frekvencia ($\omega_0 + \Delta\omega$) és a kezdő fázis (φ_0). Ezen paraméterekkel a bejövő jel fázisának diszkrét idejű modellje az alábbi:



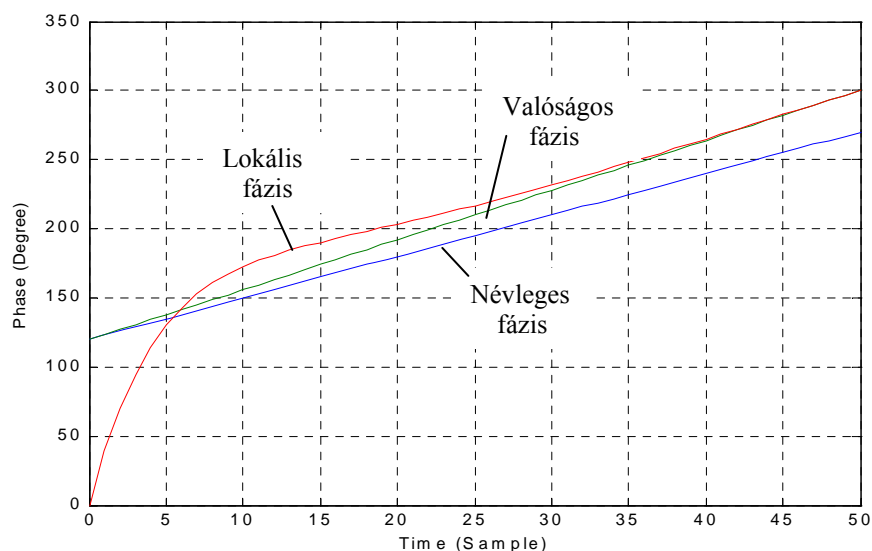
12.1. ábra A bejövő jel fázisának diszkrét idejű modellje

A bejövő periódikus jel fázisa a mintavételi időpontokban:

$$\varphi_{in}(n) = (\omega_0 + \Delta\omega)nT + \varphi_0 = \varphi_{in}(n-1) + (\omega_0 + \Delta\omega)T \quad (12.1)$$

melyben a jel frekvenciája $\Delta\omega$ értékkel tér el az ω_0 névleges értéktől és ahol φ_0 a bejövő jel (véletlenszerű) kezdő fázisa.

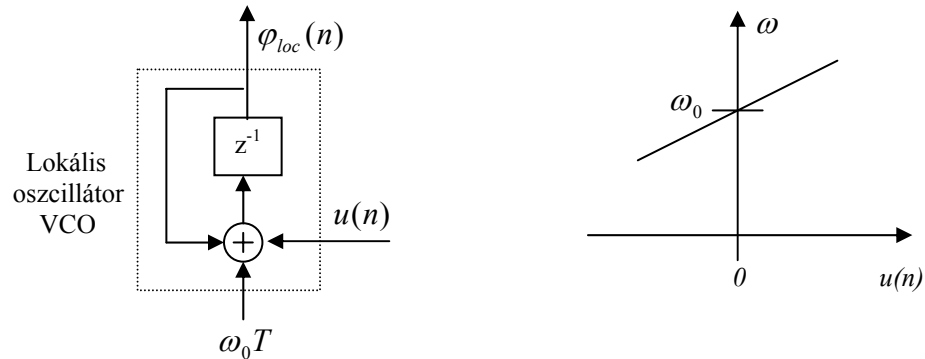
A következő ábrán egy fáziszárt hurok behúzási folyamatát látjuk, melyben a helyi oszcillátor fázisa fokozatosan megközelíti a bejövő jel fázisát.



12.2. ábra A befogás folyamata. A névleges fázis növekmény: $\omega_0 T = 3^\circ$, a frekvencia hiba: $\Delta\omega / \omega_0 = 20\%$, a kezdő fázis: $\varphi_0 = 120^\circ$.

A lokális oszcillátor frekvenciája nyitott hurok esetén a névleges frekvenciával, az u.n. szabadonfutó frekvenciával egyezik meg. Ekkor a lokális oszcillátor fázis

növekménye mintavételi időintervallumonként $\omega_0 T$. Ha a fázisnövekményt növeljük a lokális oszcillátor frekvenciája nagyobb, ha csökkentjük a frekvencia kisebb lesz. Az ilyen oszcillátort nevezzük NCO-nak (Numerical Controlled Oscillator). Szokásos elnevezés még a VCO (Voltage Controlled Oscillator) is.



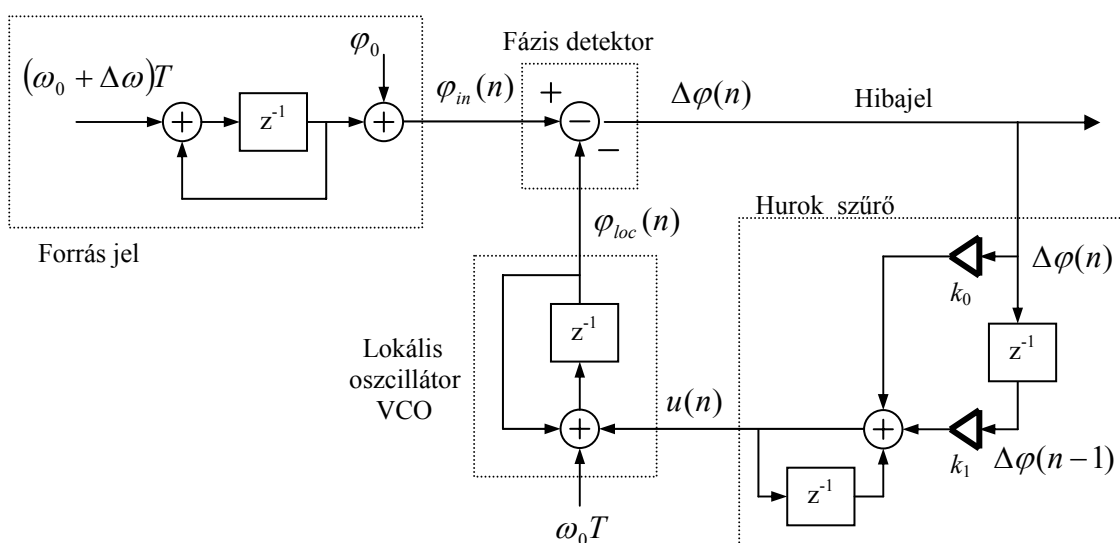
12.3. ábra A VCO felépítése és karakterisztikája

A lokális oszcillátor (VCO) fázis növekedése:

$$\phi_{loc}(n+1) = \phi_{loc}(n) + \omega_0 T + u(n) \quad (12.2.)$$

ahol $u(n)$ a hangoló jel. (Az oszcillátor kimenő jele a fázisának ismeretében már generálható, de ezzel a kérdéssel majd később foglalkozunk.)

A PLL-ben lévő fázisdetektor a bejövő jel és a helyi oszcillátor fázisának különbségével arányos hibajelét szolgáltat, amelyet jelformálás után a helyi oszcillátor hangoló bemenetére vezetjük. A helyi oszcillátor hangolásával érjük el, hogy annak fázisa utolérje a bejövő jel fázisát. A megvalósítandó PLL-ben a fázisdetektor kialakítása a mindenkorri jelalakoktól függ, de a PLL további részei, a hurokszűrő és a feszültség vezérelt oszcillátor (VCO) azonos maradhat.



12.4. ábra. A fáziszárt hurok modellje

Az elvi vizsgálatot a 12.4. ábrán látható modell alapján fogjuk elvégezni. Ebben feltételezzük, hogy a bejövő jel pillanatnyi fázisa közvetlenül rendelkezésre áll, és ezért a fázisdetektor egy egyszerű különbségképző.

A hurokszűrő kialakításának indoklását kezdjük a befogott (stacioner) állapot vizsgálatával. Tételezzük fel, hogy a bejövő jel frekvenciája eltér a névlegestől. A tranziensek lezajlása után a hurok behúzott állapotában:

$$\varphi_{in}(n) = \varphi_{loc}(n) \quad (12.4.)$$

ami a hibajelet tekintve:

$$\Delta\varphi(n) = \varphi_{in}(n) - \varphi_{loc}(n) = 0 \quad (12.5.)$$

Ugyanakkor a frekvencia hiba miatt a VCO bemenetén $u(n) = \Delta\omega T$ nagyságú hangoló jel szükséges a fázis befogás (és bent-tartás) érdekében.

Az integrátor az a lineáris, időinvariáns áramkörü elem, amelyik zérus bemenetre képes véges kimenetet produkálni. A hurokban ezért egy integrátort helyezünk el, mellyel zérus nagyságú fázis hiba esetén is tartható a szükséges hangoló jel.

A PLL-ben lévő VCO szintén egy integrátort valósít meg, így a hurok már két integrátort tartalmaz. Két integrátor esetén a hurok stabilitásának biztosítása érdekében szükség van egy $K(z)$ korrektor fokozatra, ami egy átviteli zérust valósít meg.

$$K(z) = k_0(1 - az^{-1}) = k_0 + k_1z^{-1} \quad (12.6.)$$

A $K(z)$ -ben szereplő két paramétert (k : hurok erősítés, a : átviteli zérus) a megfelelő tranziens viselkedés beállításának feltételéből fogjuk meghatározni. A nyílt hurok átvitele:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \frac{1}{1 - z^{-1}} K(z) = \frac{k_0 z^{-1}(1 - az^{-1})}{(1 - z^{-1})^2} \quad (12.7.)$$

Tekintsük kimenő jelnek a fázisdetektor kimenetét:

$$\Delta\varphi(n) = \varphi_{in}(n) - \varphi_{loc}(n) \quad (12.8.)$$

A kimenő jel a komplex frekvencia tartományban:

$$\Delta\Phi(z) = \Phi_{in}(z) - \Phi_{loc}(z) \quad (12.9.)$$

A bejövő jel "z" transzformáltja:

$$\Phi_{in}(z) = \varphi_0 \frac{1}{1 - z^{-1}} + \omega_0 T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} + \Delta\omega T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \quad (12.10.)$$

A 12.1. ábra alapján:

$$\Phi_{loc}(z) = \omega_0 T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} + H(z)\Delta\Phi(z) \quad (12.11.)$$

Ez utóbbi két egyenletet behelyettesítve a (12.9.)-be, írhatjuk:

$$\Delta\Phi(z) = \left(\varphi_0 \frac{1}{1-z^{-1}} + \Delta\omega T \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \right) - H(z)\Delta\Phi(z) \quad (12.12.)$$

Ebből az egyenletből a kimenő jel "z" transzformáltja:

$$\Delta\Phi(z) = \left(\varphi_0 \frac{1}{1-z^{-1}} + \Delta\omega T \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \right) \frac{1}{1+H(z)} \quad (12.13.)$$

ahol a zárt hurok átviteli függvénye a (12.7.) felhasználásával:

$$\frac{1}{1+H(z)} = \frac{(1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})^2 + k_0 z^{-1}(1-az^{-1})} \quad (12.14.)$$

A hurok tranziens viselkedését a zárt hurok pólusainak megfelelő megválasztásával fogjuk beállítani. Ha a pólusok valósak, a tranziens aperiódikus lesz, azaz a stacionárius állapot beállása lengések nélkül fog megtörténni.

A másodfokú átviteli függvény két valós pólusát válasszuk egyformának, melynek értéke legyen p . Ezzel a zárt hurok átviteli függvénye:

$$\frac{1}{1+H(z)} = \frac{(1-z^{-1})^2}{(1-pz^{-1})^2} \quad (12.15.)$$

A (12.14.) és a (12.15.) nevezőit kifejtve, majd az együtthatókat összevetve írhatjuk:

$$\begin{aligned} (1-z^{-1})^2 + k_0 z^{-1}(1-az^{-1}) &= 1 - z^{-1}(2-k_0) + z^{-2}(1-ak_0) \\ (1-pz^{-1})^2 &= 1 - 2pz^{-1} + p^2 z^{-2} \\ 2-k_0 &= 2p \quad 1-ak_0 = p^2 \end{aligned} \quad (12.16.)$$

Ez utóbbi egyenleteket az ismeretlenekre megoldva a méretezési összefüggésekhez jutunk:

$$\boxed{k_0 = 2(1-p)} \quad \boxed{k_1 = -ak_0 = p^2 - 1} \quad (12.17.)$$

A zárt hurok hibajelének tranziens válasza:

$$\Delta\Phi(z) = \left(\varphi_0 \frac{1}{1-z^{-1}} + \Delta\omega T \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \right) \frac{(1-z^{-1})^2}{(1-pz^{-1})^2} =$$

$$\Delta\Phi(z) = \varphi_0 \frac{z(z-1)}{(z-p)^2} + \Delta\omega T \frac{z}{(z-p)^2} \quad (12.18.)$$

A kezdeti és végértékekre vonatkozó összefüggések felhasználásával:

$$\Delta\varphi(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \Delta\Phi(z) = \varphi_0 \quad (12.19.)$$

$$\Delta\varphi(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \Delta\Phi(z) = 0 \quad (12.20.)$$

A (12.18.) szerinti eredményt két részre bontva:

$$\Delta\Phi_1(z) = \varphi_0 \frac{z(z-1)}{(z-p)^2}, \quad \text{és} \quad \Delta\Phi_2(z) = \Delta\omega T \frac{z}{(z-p)^2} \quad (12.21.)$$

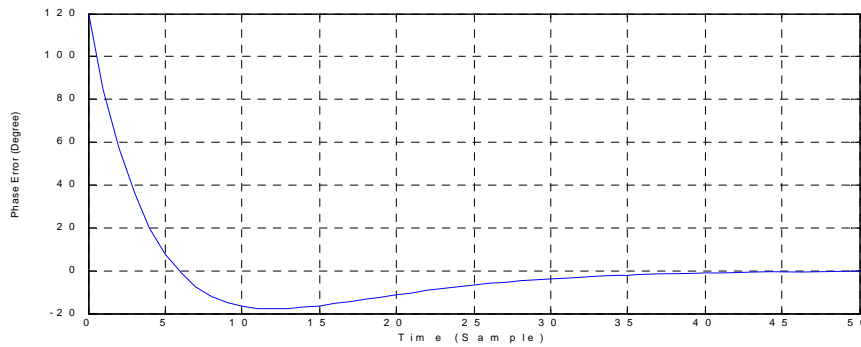
Az időtartományban a fáziszárt huroknak a kezdeti fázishibára adott tranziens válasza:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1(n) &= \mathcal{Z}^{-1}\{\Delta\Phi_1(z)\} = \frac{1}{2j\pi} \oint \Delta\Phi_1(z) \frac{z^n}{z} dz = \text{Res} \left[\Phi_1(z) \frac{z^n}{z}, p \right] \\ \Delta\varphi_1(n) &= \text{Res} \left[\Phi_1(z) \frac{z^n}{z}, p \right] = \lim_{z \rightarrow p} \frac{d}{dz} (z-p)^2 \Phi_1(z) \frac{z^n}{z} = \\ &= \lim_{z \rightarrow p} \frac{d}{dz} \varphi_0 (z^{n+1} - z^n) = \varphi_0 [(n+1)p^n - np^{n-1}] \end{aligned} \quad (12.22.)$$

Frekvencia hiba esetén az időtartományban a válasz:

$$\Delta\varphi_2(n) = \text{Res} \left[\Phi_2(z) \frac{z^n}{z}, p \right] = \Delta\omega T n p^{n-1} = 2\pi \frac{\Delta\omega}{\omega_s} n p^{n-1} \quad (12.23.)$$

A 12.5. ábrán a behúzás folyamatát látjuk, $\varphi_0 = 120^\circ$, $\Delta\omega = 20\%$ és $p = 0.85$ értékek esetén.



12.5. ábra A PLL behúzási folyamata

A fejezet bevezetőjében felrajzolt 12.4. ábrát elvi jellegűnek kell tekintenünk, mert az esetek többségében nem áll rendelkezésre közvetlenül a bejövő jel fázisa.

A fázisdetektor, aminek a feladata a fázis hibával arányos jel előállítása volt, az elvi ábrán így egy egyszerű kivonó lehetett. Ha a PLL bemeneteként maga a periódikus jel áll csak rendelkezésre, akkor meg kell konstruálnunk a mindenkor jel alakjához illeszkedő fázisdetektort.

Az alábbiakban példaként komplex értékű szinuszos bemenő jelre adunk meg egy lehetséges fázisdetektort.

A bemenő jel $x(nT)$ valós és $y(nT)$ képzetes része legyen:

$$x(nT) = A \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)nT + \varphi_0] \quad \text{és} \quad y(nT) = A \sin[(\omega_0 + \Delta\omega)nT + \varphi_0]$$

A lokális oszcillátorunk legyen kétfázisú (\sin , \cos) jelet előállító VCO, amelyik zérus hangoló jel hatására az:

$$s(n) = \sin \omega_0 nT \quad \text{és} \quad c(n) = \cos \omega_0 nT \quad (12.25.)$$

jeleket szolgáltatja.

A hibajel állítsuk elő a következő módon:

$$e(n) = y(nT)c(n) - x(nT)s(n) = \quad (12.26.)$$

$$= A[\sin(\omega_0 nT + \Delta\varphi(n))\cos(\omega_0 nT) - \cos(\omega_0 nT + \Delta\varphi(n))\sin(\omega_0 nT)] =$$

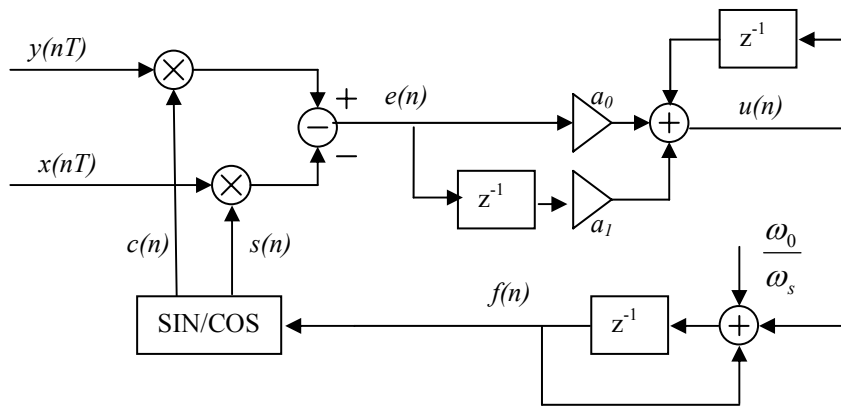
$$= A \sin(\Delta\varphi(n)) \quad (12.27.)$$

ahol a fázishiba:

$$\Delta\varphi(n) = \varphi_0 + \Delta\omega nT \quad (12.28.)$$

A (12.26.) szerinti fázisdetektor által szolgáltatott $e(n)$ hibajel nemlineáris kapcsolatban van a fázishibával. Kis fázishibák esetén azonban a kapcsolat linearizálható :

$$e(n) = A \sin \Delta\varphi(n) \approx A \Delta\varphi(n) \quad (12.29.)$$



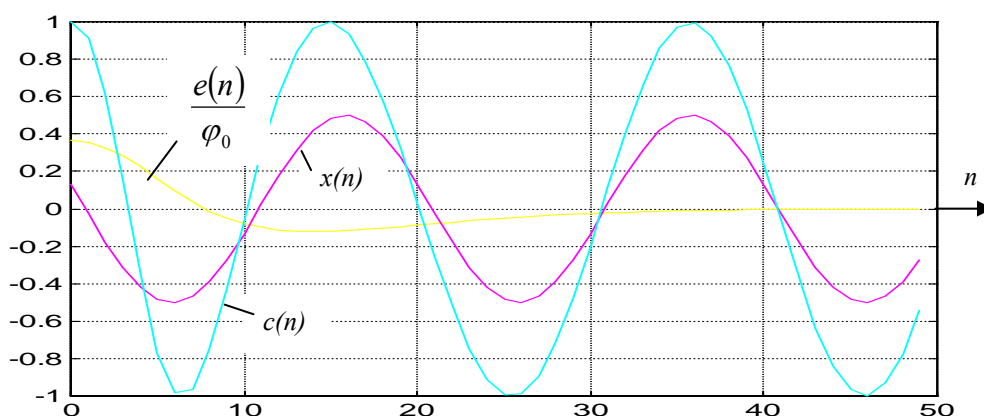
12.3. ábra A fáziszárt hurok megvalósítása

A fázisdetektor meredeksége a (12.29.) alapján: $\frac{\Delta\varphi(n)}{e(n)} = A$.

Másrészt a szinusz és koszinusz jeleket előállító fokozat bemenő adatának (az oszcillátor fázisának: $f(n)$ -nek) a formátuma kényelmesebben kezelhető, ha azt nem radiánban, hanem 2π -re normalizált alakjában használjuk. A fázisdetektor meredekségét és a normalizálást figyelembe véve a korrekciós fokozat együtthatóit módosítani kell, annak érdekében, hogy a hurokerősítés a tervezett értéknek megfelelő legyen.

$$a_0 = \frac{k_0}{2\pi A} \quad a_1 = \frac{k_1}{2\pi A} \quad (12.30.)$$

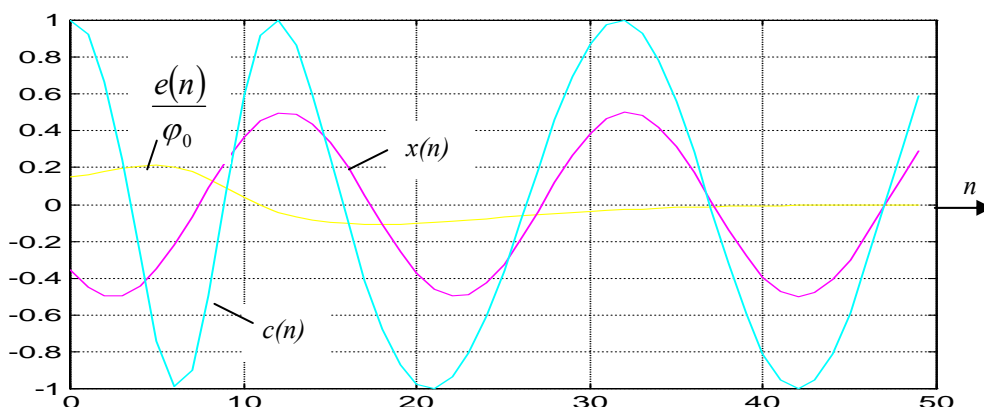
A 12.4. ábra a PLL befogási folyamatának MATLAB szimulációját mutatja.



12.4. ábra A PLL befogása

$$A=0.5, \quad p=0.8, \quad \varphi_0 = 75^\circ, \quad f_s=10\text{kHz}, \quad f_0 = 500\text{Hz}, \quad \Delta f = 5\text{Hz}$$

Nagyobb kezdeti fázishiba esetén a nemlinearitás hatása úgy jelentkezik, mintha a hurokerősítés lecsökkent volna (a fázisdetektor kisebb jelet produkál). Ennek következtében a tranzienst elhúzódnak. Ezt látjuk a 12.5. ábrán.



12.5. ábra A PLL befogása nagy kezdeti fázishiba esetén

$$A=0.5, \quad p=0.8, \quad \varphi_0 = 135^\circ, \quad f_s=10\text{kHz}, \quad f_0 = 500\text{Hz}, \quad \Delta f = 5\text{Hz}$$

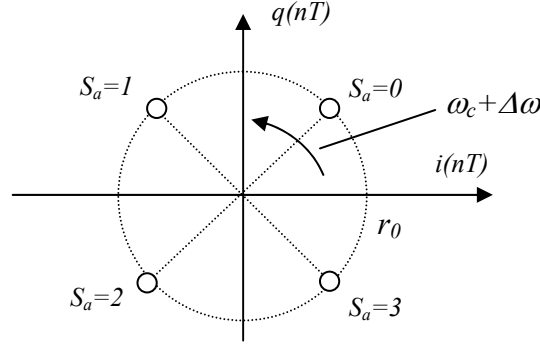
A **következő példánk** a PLL alkalmazására a vivő helyreállításának (carrier recovery) feladata a 4-QPSK modulációt használó modemekben.

A 4-QPSK moduláció esetében a vevőben a jelet egy Hilbert-transzformátort megvalósító sávszűrő párra vezetve, azok kimenetén a kvadratúra komponenseket kapjuk meg. A jelzési időintervallum közepén ezek:

$$i(nT) = r_0 \cos \varphi_{in}(n) \quad \text{ill.} \quad q(nT) = r_0 \sin \varphi_{in}(n) \quad (12.30.)$$

$$\text{ahol:} \quad \varphi_{in}(n) = (\omega_c + \Delta\omega)nT + \varphi_0 + \frac{\pi}{4}(2s_a(n) + 1) \quad (12.31.)$$

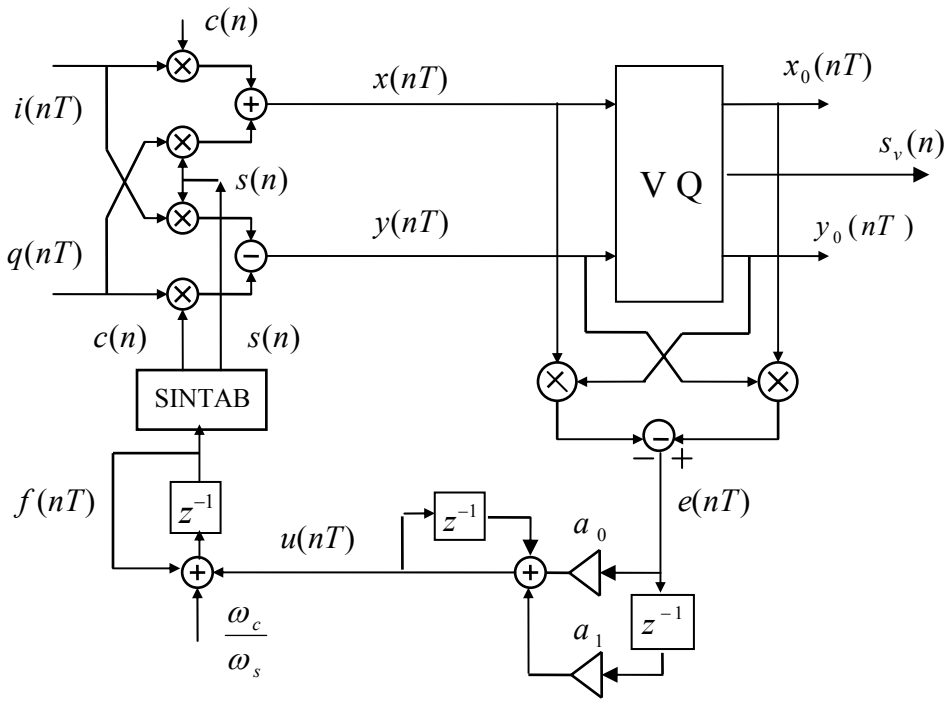
A (12.31.)-ben az első tag a vivőfrekvenciából (és annak hibájából) adódik, a második tag (φ_0) a modulátor oszcillátorának véletlenszerű kezdő fázisa. A harmadik tag az alapsávi modulációs tartalmat írja le. A 4-QPSK esetében az $s_a(n) = \{0, 1, 2, 3\}$ állapotváltozó azt mutatja meg, hogy alapsávban (moduláció előtt) a konstellációs pont melyik síknegyedben tartózkodik.



12.6. ábra A 4-QPSK konstellációs pontjai az alapsávban

A vivő visszaállító fokozat bemenetére érkező $i(nT)$, $q(nT)$ jel valójában olyan, mintha a 12.6. ábra pontjai az óramutató járásával ellentétesen, $\omega_c + \Delta\omega$ körfrekvenciával forogna, φ_0 kezdő fázissal. A vivő visszaállítás azt jelenti, hogy a lokális VCO-t a PLL-ben úgy kell hangolnunk, hogy a komplexnek tekintett $x(n)$, $y(n)$ lekevert jel a 12.6. ábrán látható (álló) konstellációs pontokba kerüljön.

A vivő visszaállító fokozat rajzát a 12.7. ábra mutatja. A jelhez illeszkedő fázisdetektor egy keverő, egy VQ vektor kvantáló fokozatból valamint további szorzó és különbségképző egységekből áll. A VCO kétfázisú (\sin , \cos) jelet állít elő. Az ábrán $u(n)$ a VCO hangoló jele, $f(n)$ a VCO relatív fázisa: $\varphi_{loc}(n) = 2\pi f(n)$.



12.7. A vivő helyreállító fokozat (A COSTAS hurok)

Az ábra alapján a működés a következő:

A VCO kimenő jelei:

$$c(n) = \cos \varphi_{loc}(n) \quad \text{és} \quad s(n) = \sin \varphi_{loc}(n) \quad (12.32.)$$

A keverő kimenetei:

$$\begin{aligned} x(nT) &= i(nT)c(n) + q(nT)s(n) = \\ &= r_0 [\cos \varphi_{in}(n) \cos \varphi_{loc}(n) + \sin \varphi_{in}(n) \sin \varphi_{loc}(n)] = \\ &= r_0 \cos[\varphi_{in}(n) - \varphi_{loc}(n)] \end{aligned} \quad (12.33.)$$

$$\begin{aligned} y(nT) &= q(nT)c(n) - i(nT)s(n) = \\ &= r_0 [\sin \varphi_{in}(n) \cos \varphi_{loc}(n) - \cos \varphi_{in}(n) \sin \varphi_{loc}(n)] = \\ &= r_0 \sin[\varphi_{in}(n) - \varphi_{loc}(n)] \end{aligned} \quad (12.34.)$$

Az $x(nT)$ és $y(nT)$ úgy tekinthető mint egy r_0 abszolút értékű és $\varphi_{in}(n) - \varphi_{loc}(n)$ fázisú komplex mennyiség valós és képzetes részei.

Az $x(nT)$ és $y(nT)$ jelek a vektor kvantáló bemenetei, melynek feladata, hogy eldöntse, az $x(nT)$ és $y(nT)$ által reprezentált komplex szám melyik síknegyedbe mutat. A vektor kvantálónak három kimenete van: $s_v(nT) = \{0, 1, 2, 3\}$ reprezentálja a síknegyed számát; az $x_0(nT)$, és az $y_0(nT)$ az adott síknegyedhez tartozó konstellációs pont **névleges** koordinátái.

$$x_0(nT) = r_0 \cos \alpha_0(n) \quad \text{és} \quad y_0(nT) = r_0 \sin \alpha_0(n) \quad (12.35.)$$

ahol:
$$\alpha_0(n) = \frac{\pi}{4}(2s_v(n)+1) \quad (12.36.)$$

Az $x(nT)$ és $y(nT)$ által reprezentált $\varphi_{in}(n) - \varphi_{loc}(n)$ pillanatnyi fázis helyzetet bontsuk fel két részre az alábbi módon:

$$\varphi_{in}(n) - \varphi_{loc}(n) = \alpha_0(n) + \Delta\varphi(n) \quad (12.37.)$$

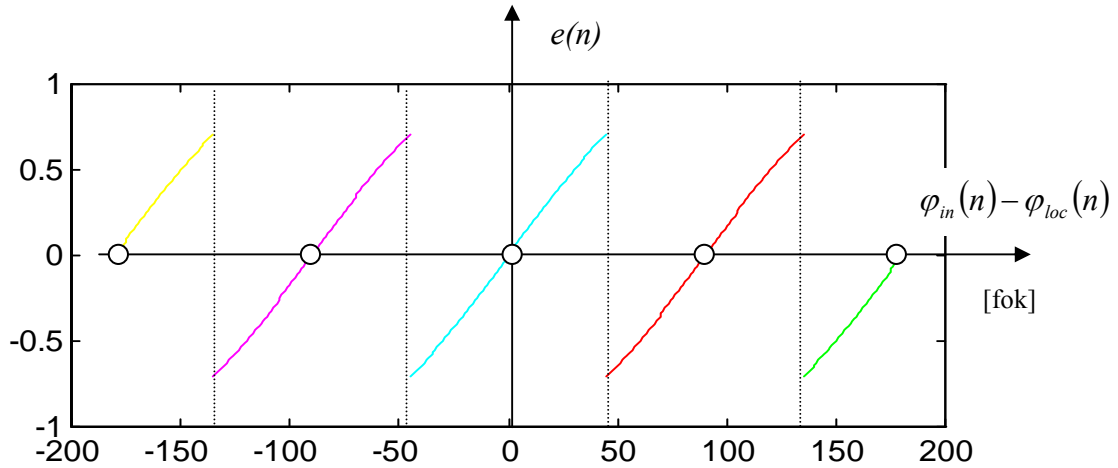
Ez a felbontás azt jelenti, hogy a vektor kvantáló a pillanatnyi fázis értékét is kvantálja (α_0 -ra). A $\Delta\varphi(n)$ kvantálási hiba:

$$-\frac{\pi}{4} \leq \Delta\varphi(n) < +\frac{\pi}{4} \quad (12.38.)$$

A fázisdetektor $e(n)$ kimenő jele a hibajel, ami az 12.7. ábra alapján:

$$\begin{aligned} e(n) &= y(nT)x_0(nT) - x(nT)y_0(nT) = \\ &= r_0^2 [\sin(\alpha_0 + \Delta\varphi)\cos\alpha_0 - \cos(\alpha_0 + \Delta\varphi)\sin\alpha_0] = \\ &= r_0^2 \sin(\Delta\varphi(n)) \end{aligned} \quad (12.39.)$$

A 12.8. ábra a fenti módszerrel realizált fázisdetektor karakterisztikáját mutatja, azaz az $e(n)$ hibajelnek a $\varphi_{in}(n) - \varphi_{loc}(n)$ fáziskülönbségtől való függését.



12.8. ábra A fázisdetektor karakterisztikája.

A kvantálás következtében a $\{-180^0 \leq \varphi < +180^0\}$ tartományban a karakterisztikának 4 zérushelye van a $\{-180^0, -90^0, 0^0, +90^0\}$ pontokban. Ez azt jelenti, hogy ezek a behúzott állapotokhoz tartozó stabil pontok lehetnek. (A hibajel zérussá válik, nincs ami tovább hangolja a VCO-t.) A négy stabil pont azt jelenti, hogy az abszolút fázishelyes vivő visszaállítás ezzel a módszerrel nem lehetséges. (A konstellációs diagram 90^0 -os elforgatásra invariáns.)

A digitális adatátvitelben ez a fázis bizonytalanság akkor nem okoz hibát, ha az átküldeni kívánt információt nem a konstellációs állapotokhoz, hanem az **állapot**

átmenetekhez rendeljük hozzá. Ezt a módszert differenciális kódolásnak (DQPSK) nevezzük, mely módszer széles körben alkalmazást nyer nem csak a PSK, hanem a QAM rendszerekben is.

A karakterisztika meredeksége a stabil pontokban:

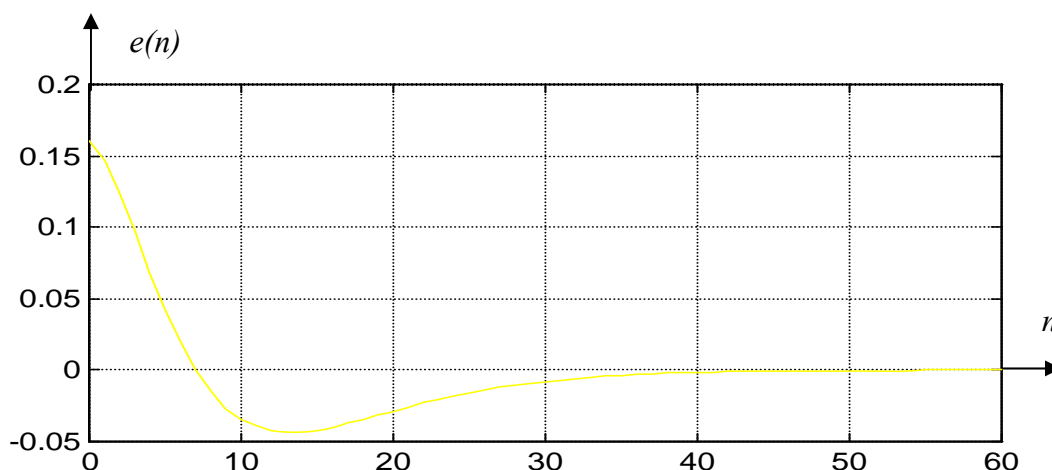
$$\left. \frac{de(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = r_0^2 \quad (12.40.)$$

Annak érdekében, hogy a hurokerősítésre a (12.17.)-ben adott összefüggés érvényes maradjon (ahol is a fázisdetektor meredeksége 1 volt), korrigálni kell a hurokerősítés értékét a tényleges meredekség értékével. További korrekciót igényel, hogy a VCO fázisát az egyszerűbb realizálhatóság érdekében nem radiánban, hanem relatív egységként ábrázoljuk. Ezekkel a korrekciókkal a módosított hurokerősítés értéke:

$$k' = \frac{k}{2\pi r_0^2} \quad (12.41.)$$

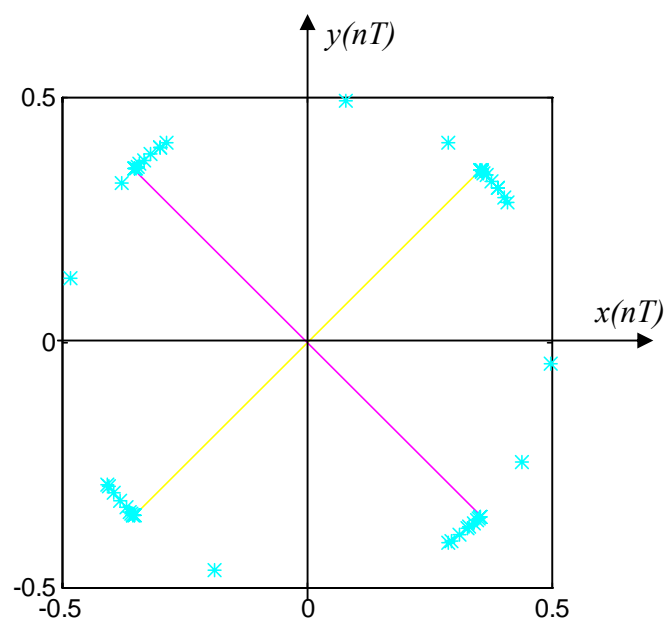
A következő ábrák a vivő visszaállító fokozat MATLAB szimulációját mutatják A paraméterek értékei:

$$\begin{array}{lll} f_s = 9600 \text{ Hz} & \varphi_0 = 40^\circ & \\ f_c = 1800 \text{ Hz} & r_0 = 0.5 & T = \frac{1}{2400} \text{ sec} \\ \Delta f = 5 \text{ Hz} & p = 0.8 & \end{array}$$



12.9. ábra A hibajel alakulása a mintaszám függvényében

A 12.10. ábra a behúzás folyamatát mutatja a konstellációs diagramon. Ahogy a hibajel csökken, az $[x(nT), y(nT)]$ koordinátájú pontok egyre jobban megközelítik a névleges $[x_0(nT), y_0(nT)]$ koordinátákat.



12.10. ábra A konstellációs ábra