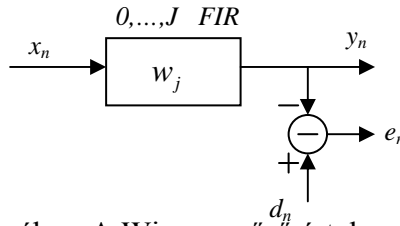


## 13. Adaptív jelfeldolgozás

### 13.1. A Wiener szűrés

A szűrési feladat megfogalmazható úgy is, hogy a szűrő  $y_n$  kimenő jele a lehető legjobban hasonlítson egy ismert  $d_n$  (u.n. “megkívánt”) jelre. A “legjobban hasonlítson” kifejezés jelentse azt, hogy a különbségük négyzetének várható értéke legyen minimális.



13.1. ábra A Wiener szűrő értelmezése

Legyen:

$X_n$  : a bemeneti sztochasztikus folyamat, melynek egy realizációja az  $x_n$  sorozat és

$D_n$  : a megkívánt sztochasztikus folyamat, melynek egy realizációja a  $d_n$  sorozat.

$X_n$ ,  $D_n$  legalább gyengén stacionárius, melynek az autokorrelációs függvényei:

$$R_{XX}(m) = \mathbb{E}X_n X_{n-m} \quad (13.1.)$$

$$R_{DD}(m) = \mathbb{E}D_n D_{n-m} \quad (13.2.)$$

és a keresztkorrelációs függvény:

$$R_{DX}(m) = \mathbb{E}D_n X_{n-m} \quad (13.3.)$$

A Wiener feladat:

$$\min_{w_j} \mathbb{E}(D_n - Y_n)^2 = \min_{w_j} \mathbb{E} \left( D_n - \sum_{j=0}^J w_j X_{n-j} \right)^2 \quad (13.4.)$$

A megoldás:

$$\begin{aligned} J(\bar{\mathbf{w}}) &= \mathbb{E} \left( D_n - \sum_{j=0}^J w_j X_{n-j} \right)^2 = \mathbb{E} \left( D_n^2 - 2D_n \sum_{i=0}^J w_i X_{n-i} + \sum_{i=0}^J w_i X_{n-i} \sum_{j=0}^J w_j X_{n-j} \right) = \\ &= \mathbb{E}D_n^2 - 2 \sum_{i=0}^J w_i \mathbb{E}D_n X_{n-i} + \sum_{i=0}^J w_i \sum_{j=0}^J w_j \mathbb{E}X_{n-i} X_{n-j} = \\ &= a_0 - 2 \sum_{i=0}^J w_i b_i + \sum_{i=0}^J w_i \sum_{j=0}^J w_j R_{ij} = \\ &= a_0 - 2\bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (13.4.)$$

Ahol bevezettük az alábbi jelöléseket:

$$\bar{\mathbf{w}}^T = [w_0, w_1, \dots, w_J] \quad (13.5.)$$

$$a_0 = R_{DD}(0) = \mathbb{E}D_n D_n = \mathbb{E}D_n^2 \quad (13.6.)$$

A keresztkorrelációs vektor:

$$\bar{\mathbf{b}}^T = [b_0, b_1, \dots, b_J] \quad (13.7.)$$

$$b_i = R_{DX}(i) = \mathbb{E} D_n X_{n-i} \quad (13.8.)$$

Az autokorrelációs mátrix:

$$\bar{\bar{\mathbf{R}}} = \begin{bmatrix} R_{00} & \cdot & R_{0J} \\ \cdot & R_{ij} & \cdot \\ R_{J0} & \cdot & R_{00} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{xx}(0) & \cdot & R_{xx}(J) \\ \cdot & R_{xx}(i-j) & \\ R_{xx}(J) & \cdot & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \quad (13.9.)$$

$$R_{ij} = R_{xx}(i-j) = \mathbb{E} X_{n-i} X_{n-j} = R_{ji} \quad (13.10.)$$

A (13.13.) szerinti kvadrátikus alakot kell minimalizálni. Ez a skalár-vektor függvény a  $(J+1)$  dimenziós térben elhelyezkedő paraboloid egyenlete.

$$\mathbf{J}(\bar{\mathbf{w}}) = a_0 - 2\bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{w}} \quad (13.13.)$$

A felület szélső értéke (minimuma) ott van, ahol a függvény gradiense zérussá válik.

$$\text{grad} \mathbf{J}(\bar{\mathbf{w}}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{J}(\bar{\mathbf{w}})}{\partial w_0}, \frac{\partial \mathbf{J}(\bar{\mathbf{w}})}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{J}(\bar{\mathbf{w}})}{\partial w_J} \right]^T = 2(\bar{\bar{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{b}}) = 0 \quad (13.12.)$$

Amiből az optimális szűrő együtthatók (vektora):

$$\bar{\mathbf{w}}_{opt} = \bar{\bar{\mathbf{R}}}^{-1} \bar{\mathbf{b}} \quad (13.13.)$$

A megválasztott  $J$  foksám mellett és optimális szűrő esetén a maradék hiba:

$$\mathbb{E}(D_n - Y_n)^2 = \mathbf{J}(\bar{\mathbf{w}}_{opt}) = a_0 - \bar{\mathbf{w}}_{opt}^T \bar{\mathbf{b}} \geq 0 \quad (13.14.)$$

Tudnivalók az autokorrelációs mátrixról (matematikai kitérő):

1. Toeplitz mátrix : a főátló irányában sávok szerkezetű

$$\bar{\bar{\mathbf{R}}} = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 \\ R_1 & R_0 & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \\ R_2 & R_1 & R_0 & R_1 & R_2 & R_3 \\ R_3 & R_2 & R_1 & R_0 & R_1 & R_2 \\ R_4 & R_3 & R_2 & R_1 & R_0 & R_1 \\ R_5 & R_4 & R_3 & R_2 & R_1 & R_0 \end{bmatrix} \quad \text{mert } R_{i,j} = R(i-j) \quad (13.15.)$$

2. Hermitikus mátrix:

$$\overline{\overline{\mathbf{R}}}^T = \overline{\overline{\mathbf{R}}} \quad (13.16.)$$

$$\text{mert: } R_{ij} = R_{ji} = R_{xx}(i-j) = R_{xx}(j-i) = \mathbf{E}X_{n-i}X_{n-j} = \mathbf{E}X_{n-j}X_{n-i}$$

3. Pozitív definit mátrix: ( tetszőleges, nem zérus  $\bar{\mathbf{z}}$  vektorra igaz)

$$\bar{\mathbf{z}}^T \overline{\overline{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{z}} > 0 \quad (13.17.)$$

mert:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}}^T \overline{\overline{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{z}} &= \sum_{i=0}^J z_i \sum_{j=0}^J z_j R_{ij} = \sum_{i=0}^J z_i \sum_{j=0}^J z_j \mathbf{E}X_{n-i}X_{n-j} = \\ &= \mathbf{E} \left( \sum_{i=0}^J z_i X_{n-i} \right)^2 > 0 \end{aligned}$$

A sajátérték sajátvektor egyenlet:

$$\overline{\overline{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{s}}_i = \lambda_i \bar{\mathbf{s}}_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, J \quad (13.18.)$$

4. A sajátvektorok ortonormáltak:

$$\bar{\mathbf{s}}_i^T \bar{\mathbf{s}}_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases} \quad (13.19.)$$

5. A sajátértékek pozitívak:  $\lambda_i > 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots, J \quad (13.20.)$

$$\text{mert} \quad 0 < \bar{\mathbf{s}}_i^T \overline{\overline{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{s}}_i = \bar{\mathbf{s}}_i^T \lambda_i \bar{\mathbf{s}}_i = \lambda_i$$

6. Az autokorrelációs mátrix "nyoma" (trace):

$$\text{trace} = \sum_{i=0}^J R_{ii} = \sum_{i=0}^J \lambda_i = JR_{xx}(0) \quad (13.21.)$$

(Kitérő vége)

### Az optimális Wiener szűrő rekurzív beállítása:

Mintavételi ütemenként a negatív gradiens irányában  $\Delta$  lépésközzel lépünk az optimum felé ( steepest descent method):

$$\bar{\mathbf{w}}(n+1) = \bar{\mathbf{w}}(n) - \Delta (\overline{\overline{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{w}}(n) - \bar{\mathbf{b}}) \quad (13.22.)$$

$$\text{Határértéke:} \quad \bar{\mathbf{w}}(n+1) = \bar{\mathbf{w}}(n) = \bar{\mathbf{w}}_{opt} \quad (13.23.)$$

Ez akkor következik be, amikor:

$$\overline{\overline{\mathbf{R}}} \bar{\mathbf{w}}_{opt} = \bar{\mathbf{b}} \quad (13.24.)$$

ami az optimalitás feltétele.

Mekkora  $\Delta$  lépésközt válasszunk?

$$\bar{\mathbf{w}}(n+1) = \bar{\mathbf{w}}(n) - \Delta(\bar{\mathbf{R}}\bar{\mathbf{w}}(n) - \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{I}} - \Delta\bar{\mathbf{R}})\bar{\mathbf{w}}(n) + \Delta\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{w}}(n) + \Delta\bar{\mathbf{b}} \quad (13.25.)$$

ahol 
$$\bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{I}} - \Delta\bar{\mathbf{R}} \quad (13.26.)$$

Ezt kielégíti : 
$$\bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{s}}_i = (\bar{\mathbf{I}} - \Delta\bar{\mathbf{R}})\bar{\mathbf{s}}_i = \bar{\mathbf{s}}_i - \Delta\lambda_i\bar{\mathbf{s}}_i = (1 - \Delta\lambda_i)\bar{\mathbf{s}}_i = g_i\bar{\mathbf{s}}_i \quad (13.27.)$$

Ahol: 
$$g_i = 1 - \Delta\lambda_i \quad (13.28.)$$

Állítsuk elő  $\mathbf{w}$ -t és  $\mathbf{b}$ -t a sajátvektorok bázisán (azok lineáris kombinációjaként).

$$\bar{\mathbf{w}}(n) = \sum_{i=0}^J v_i(n)\bar{\mathbf{s}}_i \quad \text{és} \quad \bar{\mathbf{b}} = \sum_{i=0}^J \rho_i\bar{\mathbf{s}}_i \quad (13.29.)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}(n+1) &= \sum_{i=0}^J v_i(n+1)\bar{\mathbf{s}}_i = \bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{w}}(n) + \Delta\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{G}}\sum_{i=0}^J v_i(n)\bar{\mathbf{s}}_i + \Delta\sum_{i=0}^J \rho_i\bar{\mathbf{s}}_i = \\ &= \sum_{i=0}^J v_i(n)\bar{\mathbf{G}}\bar{\mathbf{s}}_i + \Delta\sum_{i=0}^J \rho_i\bar{\mathbf{s}}_i = \sum_{i=0}^J v_i(n)g_i\bar{\mathbf{s}}_i + \Delta\sum_{i=0}^J \rho_i\bar{\mathbf{s}}_i = \sum_{i=0}^J (v_i(n)g_i + \Delta\rho_i)\bar{\mathbf{s}}_i \end{aligned} \quad (13.30.)$$

Az  $i$ -ik komponensre az iteráció:

$$v_i(n+1) = g_i v_i(n) + \Delta\rho_i \quad (13.31.)$$

Ennek a differencia egyenletnek keressük a megoldását a

$$v(n) = [v(0) - c]g^n + c \quad v(0) = [v(0) - c] + c = v(0) \quad (13.32.)$$

alakban:

$$\begin{aligned} v_i(n+1) &= [v_i(0) - c_i]g_i^{n+1} + c_i = \{[v_i(0) - c_i]g_i^n - c_i + c_i\}g_i + c_i = \\ &= g_i v_i(n) - c_i g_i + c_i \end{aligned} \quad (13.33.)$$

Összevetve (13.31.)-et (13.33.)-val,  $c_i(1 - g_i) = \Delta\rho_i$  adódik, amiből :

$$c_i = \frac{\Delta\rho_i}{1 - g_i} = \frac{\Delta\rho_i}{\Delta\lambda_i} = \frac{\rho_i}{\lambda_i} \quad (13.34.)$$

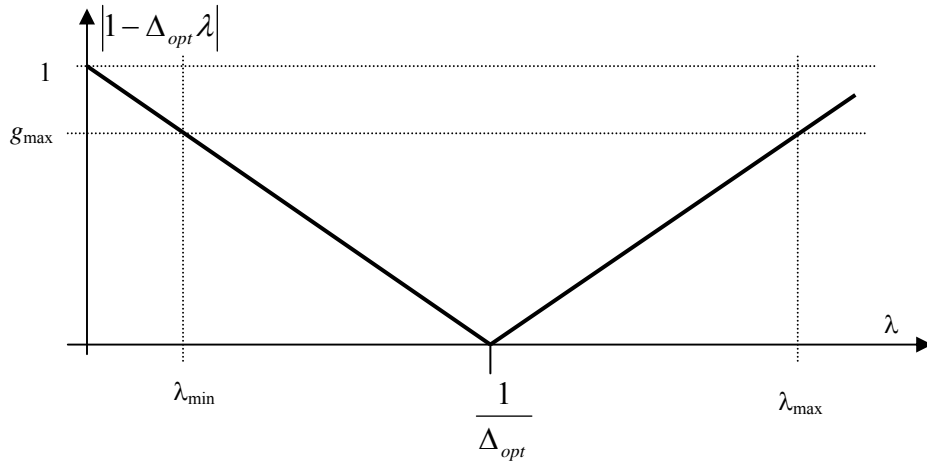
Ezzel a (13.31.) megoldása:

$$v_i(n) = \left[ v_i(0) - \frac{\rho_i}{\lambda_i} \right] g_i^n + \frac{\rho_i}{\lambda_i} \quad (13.35.)$$

A (13.35.) akkor konvergál, ha:

$$|g_i| = |1 - \Delta\lambda_i| < 1 \quad i = 0, 1, 2, \dots, J \quad (13.36.)$$

A stabilitás feltételét a 13.2. ábráról olvashatjuk le.



13.2. ábra Az optimális lépésköz meghatározása

Az ábra alapján az optimum feltétele:

$$\frac{1}{\Delta_{opt}} = \frac{\lambda_{min} + \lambda_{max}}{2} \quad (13.37.)$$

Amiből:

$$\Delta_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min} + \lambda_{max}} \quad (13.38.)$$

Összefoglalva: Adott: **R, b**

1. Kiszámítjuk a sajátértékeket.

$$\lambda \bar{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{s}} = (\lambda \bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{R}}) \bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{0}} \quad (13.39.)$$

Ennek a homogén egyenletnek akkor van megoldása, ha a determinánsa zérus.

$$\det(\lambda \bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{R}}) = 0 \quad (13.40.)$$

Megkeresve ennek a  $(J+1)$ -ed fokú polinomnak a gyökeit, kiválasztható a minimális és a maximális érték.

2. A lépésköz megválasztása ( 13.38.) szerint.

3. Valós időben történik a szűrő adaptálása:

$$w_i(n+1) = w_i(k) - \Delta_{opt} \left( \sum_{j=0}^J R_{ij} w_j(n) - b_i \right) \quad i = 0, 1, 2, \dots, J \quad (13.41.)$$

**A probléma általában az, hogy az autokorreláció és a keresztkorreláció nem ismert.**

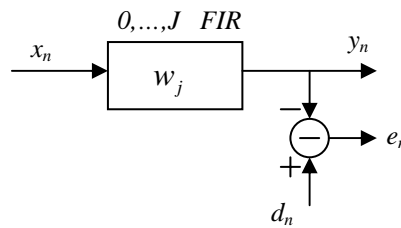
### 13.2. A legkisebb négyzetek módszere (Least Mean Square)

Legyen a feladat a Wiener szűrésnél kitéűzöthöz hasonló, azzal a különbséggel, hogy az autokorrelációs és a keresztkorrelációs függvény nem ismert. Rendelkezésre áll viszont a bemenő jel véges hosszúságú  $x_n$  sorozata és a megkívánt  $d_n$  sorozat. Ezt hívjuk tanuló halmaznak:

$$\mathcal{T}^{(N)} = \{(x_n, d_n), n = 0, 1, 2, \dots, N\} \quad (13.42.)$$

A feladat annak a  $w$  együtthatójú FIR szűrőnek a meghatározása, melyre:

$$\min_{w_j} \sum_{n=0}^N (d_n - y_n)^2 = \min_{w_j} \sum_{n=0}^N \left( d_n - \sum_{j=0}^J w_j x_{n-j} \right)^2 \quad (13.43.)$$



13.3. ábra Az optimalizálendő szűrő

A véges hosszúságú folyamatot vektor-mátrix formalizmussal is leírhatjuk:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \dots & x_{n-J} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & x_{N-1} & \vdots & \vdots & x_{N-J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} \quad (13.44.)$$

Tömören:  $\bar{y} = \bar{\bar{A}} \bar{w} = \bar{d} - \bar{e}$  (13.45.)

Az  $\bar{A}$  normál mátrixot az  $\bar{x}$  oszlopvektorok segítségével is felírhatjuk:

$$\bar{\bar{A}} = [\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_J] \quad (13.46.)$$

A hiba vektora:

$$\bar{e} = \bar{d} - \bar{\bar{A}} \bar{w} \quad (13.47.)$$

A feladat értelmében, az alábbi skalár-vektor függvényt kell minimalizálnunk:

$$\begin{aligned} J(\bar{\mathbf{w}}) &= \sum_{n=0}^N e_n^2 = \bar{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{e}} = (\bar{\mathbf{d}} - \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{w}})^T (\bar{\mathbf{d}} - \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{w}}) = (\bar{\mathbf{d}}^T - \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{A}}^T) (\bar{\mathbf{d}} - \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{w}}) = \\ &= \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{w}} - 2 \bar{\mathbf{w}}^T \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{d}} + \bar{\mathbf{d}}^T \bar{\mathbf{d}} \end{aligned} \quad (13.48.)$$

A szélső érték (a minimum) ott van, ahol a gradiens zérus:

$$\underset{\mathbf{w}}{\text{grad}}(J(\bar{\mathbf{w}})) = 2(\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{d}}) = \bar{\mathbf{0}} \quad (13.49.)$$

Ez az alábbi feltételt jelenti:

$$\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{d}} \quad (13.50.)$$

amiből:

$$\bar{\mathbf{w}}_{opt} = (\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{d}} \quad (13.51.)$$

Az eredmény hasonló alakú a Wiener szűrésnél kapotthoz, ha bevezetjük az alábbi jelöléseket. Az autokorreláció becslése:

$$\hat{\bar{\mathbf{R}}} = \hat{\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{A}}} \quad \text{ahol:} \quad \hat{R}_{ij} = \bar{\mathbf{x}}_i^T \bar{\mathbf{x}}_j = \sum_{n=0}^N x_{n-i} x_{n-j} \quad (13.52.)$$

és a keresztkorreláció becslése:

$$\hat{\bar{\mathbf{b}}} = \hat{\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{d}}} \quad \text{ahol:} \quad \hat{b}_i = \bar{\mathbf{x}}_i^T \bar{\mathbf{d}} = \sum_{n=0}^N d_n x_{n-i} \quad (13.53.)$$

Ezzel a feladat megoldása:

$$\bar{\mathbf{w}}_{opt} = \hat{\bar{\mathbf{R}}}^{-1} \hat{\bar{\mathbf{b}}} \quad (13.54.)$$

Egy érdekes megfigyelést tehetünk azáltal, ha a (13.45.) egyenletet megszorozzuk balról az  $\mathbf{A}$  normál mátrix transzponáltjával:

$$\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{d}} - \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{e}} \quad (13.55.)$$

Az eredményt összevetve (13.50.)-vel, azt kapjuk, hogy:

$$\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{0}}. \quad (13.56.)$$

Ez a mátrix egyenlet felbontható  $(J+1)$  darab skalár szorzatra:

$$\bar{\mathbf{x}}_j^T \bar{\mathbf{e}} = 0 \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, J \quad (13.57.)$$

A (13.57.) egyenlet azt fejezi ki, hogy optimális szűrő esetén a hiba vektor merőleges a normál mátrixot alkotó  $\mathbf{x}_j$  oszlopvektorok mindegyikére.

Erre az eredményre geometriai megfontolások útján is eljuthatunk. A (13.45.) egyenletet úgy is értelmezhetjük, hogy az  $(N+1)$  dimenziós  $\mathbf{y}$  vektort a  $(J+1)$  darab  $\mathbf{x}$  vektor súlyozott összegeként akarjuk előállítani:

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{w}} = \sum_{j=0}^J w_j \bar{\mathbf{x}}_j \quad (13.58.)$$

Az  $(N+1)$  dimenziós térben a  $(J+1)$  darab  $\mathbf{x}$  vektor egy  $(J+1)$  dimenziós  $\mathbf{X}$  alteret (hipersíkot) feszít ki:

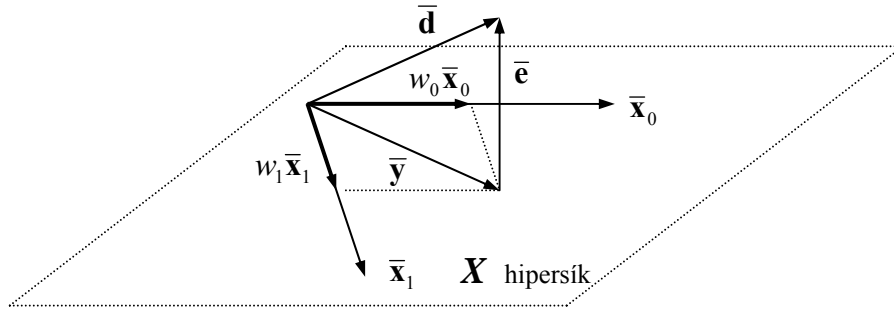
$$\mathbf{X} = \{\bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_J\} \quad (13.59.)$$

A (13.58.) alapján az  $\mathbf{y}$  vektor is ebben az alterben van, a  $\mathbf{d}$  vektor általában nem. A feladat az, hogy az  $\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{y}$  különbségi vektor abszolút érték négyzetét ( normáját) minimalizáljuk:

$$\min \|\bar{\mathbf{e}}\|^2 = \sum_{n=0}^N e_n^2 \quad (13.60.)$$

Az  $\mathbf{e}$  vektor abszolút értéke a  $\mathbf{d}$  vektor csúcsának az  $\mathbf{X}$  síkban fekvő  $\mathbf{y}$  vektor csúcsától vett távolságával egyezik meg, ami akkor minimális hosszúságú, ha  $\mathbf{e}$  merőleges az  $\mathbf{X}$  síkra ( az abban lévő összes vektorra).

$$\bar{\mathbf{e}} \perp \mathbf{X} \{\bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_J\} \quad (13.61.)$$



13.4. ábra Az ortogonalitás szemléltetése az  $N+1=3$  dimenziós térben ( $j=0,1$ )

Ez az **ortogonális projekció** (  $\mathbf{d}$  merőleges vetítése az  $\mathbf{X}$  síkra) van megfogalmazva a (13.57.) egyenletben.

Az ortogonalitási feltételből kiindulva:

$$\bar{\mathbf{x}}_i^T \bar{\mathbf{e}} = 0 \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, J \quad (13.62.)$$

Amiből:

$$\bar{\mathbf{x}}_i^T (\bar{\mathbf{d}} - \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{w}}) = 0 \quad (13.63.)$$

Átrendezés után:

$$\tilde{b}_i = \bar{\mathbf{x}}_i^T \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{x}}_i^T \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{x}}_i^T \sum_{j=0}^J w_j \bar{\mathbf{x}}_j = \sum_{j=0}^J \bar{\mathbf{x}}_i^T \bar{\mathbf{x}}_j w_j = \sum_{j=0}^J \tilde{R}_{ij} w_j \quad (13.64.)$$

Eredményünk természetesen megegyezik a gradiens segítségével kiszámítottal.