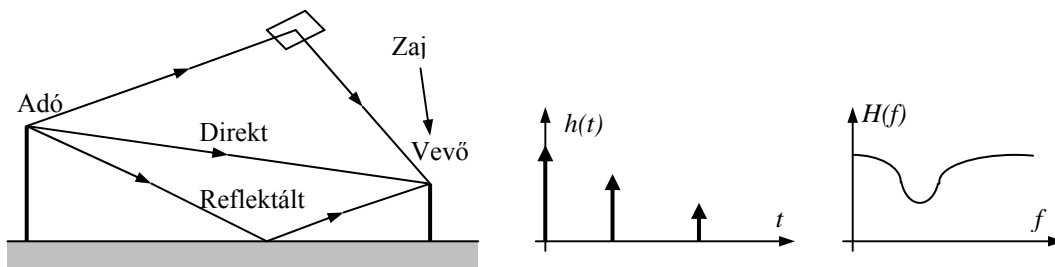


## 14. Adaptív kiegyenlítők

A problémát egy rádiócsatornában folytatott adatátviteli feladat kapcsán szemléltetjük. Az adó bemenetét egy impulzussal gerjesztve, a többutas terjedés miatt, a vevőben (a demodulálás után az alapsávban) egy impulzus sorozatot fogunk észlelni. Az impulzus sorozat Fourier transzformációjával kiszámított alapsávi  $H(f)$  frekvencia karakterisztika nagymértékű „leszívásokat” (vagy kiemeléseket) mutathat.

Ugyanakkor tudjuk, hogy a torzításmentes átvitel feltétele a konstans amplitúdó- és konstans futásiidő karakterisztikájú csatorna. Kézenfekvő ötlet, hogy a vevőben az inverz karakterisztikát valósítjuk meg egy szűrővel, amivel közel ideális csatornát kapunk. A feladatot nehezíti az, hogy a többutas terjedés az időben változhat (pld mobil kommunikáció), ezért a vevő szűrő beállítását adaptívvá kell tenni. Az adaptációnak lehető gyorsnak kell lennie, hogy a lassan változó viszonyokat a rendszer követni tudja.

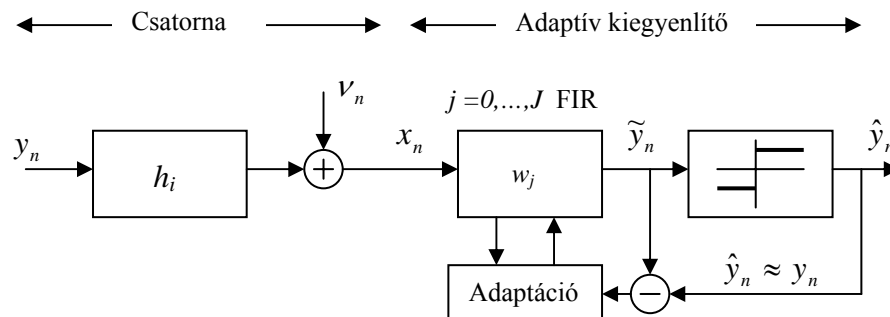


14.1. ábra Rádiócsatorna alapsávi impulzus válasza és alapsávi frekvencia karakterisztikája

A vétel minőségét a csatornában jelenlévő zaj is rontja. Ha a vevőszűrő nagy kiemeléseket mutat, a zajteljesítmény jelentősen megnőhet a detektorban, ami megnehezíti a helyes döntést.

Vezetékes összeköttetés esetén szintén számolni kell a lineáris torzítással (közel- ill. távol-végi echók, vonalerősítők frekvencia hibái, stb). A zaj ebben az esetben azonban általában kisebb mint a rádiócsatornában.

Az alapsávi modell, melyen a számításainkat végezzük a 14.2. ábrán látható.



14.2. ábra Az adaptív csatornakiegyenlítés alapsávi modellje

A továbbítandó jel legyen az  $y_n$  sorozat, amiből a vevő bemenetére az  $x_n$  sorozat érkezik:

$$x_n = \sum_{i=0}^{\infty} h_i y_{n-i} + v_n \quad (14.1.)$$

A modellben zérus várható értékű, Gauss eloszlású, fehér zajt tételezünk fel, melynek spektrális sűrűségfüggvénye:

$$S_{vv}(f) = N_0 \quad (14.2.)$$

A zaj független a továbbítandó jeltől, így korrelálatlan is:

$$E v_n y_{n-i} = 0 \quad \forall i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14.3.)$$

Tételezzük fel, hogy a továbbítandó jel az  $y_n \in \{+1, -1\}$  halmazból veszi fel értékeit egyforma valószínűséggel. Az egyes minták legyenek egymástól függetlenek, így:

$$R_{yy}(m) = E y_n y_{n-m} = \delta_{m0} = \begin{cases} 1 & \text{ha } m = 0 \\ 0 & \text{ha } m \neq 0 \end{cases} \quad (14.4.)$$

melynek spektrális teljesítmény sűrűség függvénye:

$$S_{yy}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{yy}(m) e^{-j\omega m T} = 1 \quad (14.5.)$$

A vevőben az adaptív szűrő legyen FIR szűrő,  $(J+1)$  együtthatóval. Az adaptív szűrő kimenete:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_n &= \sum_{j=0}^J w_j x_{n-j} = \sum_{j=0}^J w_j \left( \sum_{i=0}^{\infty} h_i y_{n-i-j} + v_{n-j} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} g_k y_{n-k} + \eta_n \end{aligned} \quad (14.6.)$$

ahol  $g_k$  a kaszkádba kapcsolt két átviteli blokk eredő súlyfüggvénye:

$$g_k = \sum_{j=0}^J w_j h_{k-j} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (14.7.)$$

Az adaptív szűrő kimenetén a zaj:

$$\eta_n = \sum_{j=0}^J w_j v_{n-j} \quad (14.8.)$$

A (14.6.)-ból a  $k = 0$  indexű tagot kiemelve írhatjuk:

$$\tilde{y}_n = g_0 y_n + \sum_{k=1}^{\infty} g_k y_{n-k} + \eta_n \quad (14.9.)$$

Ha az  $\tilde{y}_n \approx y_n$  eredményt kívánjuk elérni, akkor a  $g_0 = 1$  választás kézenfekvő, míg a (14.9.) második és harmadik tagjától a:

$$\min_{\mathbf{w}} \left( \sum_{k=1}^{\infty} g_k y_{n-k} + \eta_n \right) \quad (14.10.)$$

minimalizálási feltételt követeljük meg. A második tag a szimbólum áthallást (ISI = Inter Symbol Interference), a harmadik a zajt reprezentálja.

### 14.1. A Zero-Forcing (ZF) stratégia

Ebben az eljárásban a szimbólum áthallást minimalizáljuk. Induljunk ki a legrosszabb esetből. Tételezzük fel, hogy az  $n$ -ik ütemben a továbbítandó szimbólum:  $y_n = 1$ , míg a (11.14.)-ben a korábbi  $y_{n-k}$  minták előjelei olyanok, hogy azok a szimbólum áthallást a kedvezőtlen irányban, a lehető legnagyobb teszik (legrosszabb eset= worst case).

$$\tilde{y}_n - \eta_n = g_0 - \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| \approx 1 \quad (14.11.)$$

Az optimalitás feltétele:

$$\bar{\mathbf{w}}_{opt} : \min_{\mathbf{w}} \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| = \min_{\mathbf{w}} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^J w_j h_{k-j} \right| \quad (14.12.)$$

A szimbólum áthallás zérus lenne, ha a  $g_k = 0$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots, J, J+1, \dots$ ) teljesülhetne. A (14.12.) szerinti optimumot megtalálni nehéz, de közel optimális megoldást kaphatunk az alábbi gondolatmenettel:

Írjuk fel a (14.7.)-es konvolúciós egyenletet mátrix-vektor szorzat formájában:

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_J \\ g_{J+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ h_J & h_{J-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & h_1 & h_0 \\ \hline h_{J+1} & h_J & \dots & \dots & \dots & \dots & h_2 & h_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (14.13.)$$

$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$

Láthatjuk, hogy a feladat túlhatározott ( $J+1$  paraméter, több egyenlet). Mivel az impulzus válasz sorozatok monoton csökkenő sorozatok, célszerű az első ( $J+1$ ) egyenletet kielégíteni. (A magasabb sorszámúak a kisebbek, így a hiba is kisebb.)

$$\text{Végül is a} \quad \sum_{j=0}^J w_j h_{n-j} = \delta_{n0} = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 0 \\ 0 & \text{ha } n \neq 0 \end{cases} \quad (14.14.)$$

egyenletrendszer kell megoldani.

Habár a fenti egyenletrendszer  $H$  mátrixa alsó háromszög mátrix és így rekurzív megoldása nem túszágosan bonyolult, célszerűbb az együtthatókat rekurzívan adaptálva beállítani.

A ZF stratégia szerint, az adaptív szűrő együtthatóinak az  $n$ -ik ütemben elvégzendő rekurziója:

$$w_j(n+1) = w_j(n) - \Delta \left\{ y_n - \sum_{i=0}^J w_i(n) x_{n-i} \right\} y_{n-j} \quad j = 0, 1, 2, \dots, J \quad (14.15.)$$

Kérdés, hogy a fenti rekurzió a (14.14.) szerinti megoldáshoz konvergál-e?

Ha igen, akkor az együtthatók fluktuációjának várható értéke zérus kell hogy legyen:

$$E\{w_j(n+1) - w_j(n)\} = -\Delta E\left\{ y_n y_{n-j} - \sum_{i=0}^J w_i(n) x_{n-i} y_{n-j} \right\} = 0 \quad (14.16.)$$

Amiből:

$$E y_n y_{n-j} = \sum_{i=0}^J w_i E x_{n-i} y_{n-j} \quad (14.17.)$$

A bal oldal várható értéke (14.4.) alapján:

$$E y_n y_{n-j} = \delta_{j0} \quad (14.18.)$$

A jobb oldal várható értéke:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^J w_i E x_{n-i} y_{n-j} &= \sum_{i=0}^J w_i E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} h_k y_{n-i-k} y_{n-j} + v_{n-i} y_{n-j} \right\} = \\ &= \sum_{i=0}^J w_i \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} h_k E y_{n-i-k} y_{n-j} + \sum_{k=0}^{\infty} E v_{n-i} y_{n-j} \right\} = \sum_{i=0}^J w_i \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta_{i+k,j} + 0 = \sum_{i=0}^J w_i h_{j-i} \end{aligned} \quad (14.19.)$$

$$\text{Végül is a:} \quad \sum_{i=0}^J w_i h_{j-i} = \delta_{j0} \quad j = 0, 1, 2, \dots, J \quad (14.20.)$$

összefüggést kapjuk, ami megegyezik a (14.14.) szerinti egyenlettel.

A ZF stratégia hátránya:

Az adaptív szűrő frekvencia karakterisztikája a (14.20.) DFT-je segítségével határozható meg. ( időtartományban konvolúció, frekv. tart.-ban szorzás).

$$W(f)H(f) \approx 1 \quad (14.21.)$$

A közelítő egyenlőség abból adódik, hogy a jobb oldal a  $j > J$  indexek esetén csak közelítőleg zérus ( lásd (14.13.)).

Igy az adaptív szűrő kimenetén a zaj spektrális teljesítmény sűrűség függvénye:

$$S_{\eta\eta}(f) = |W(f)|^2 S_{vv}(f) \approx \frac{1}{|H(f)|^2} N_0 \quad (14.22.)$$

Ha  $H(f)$ -ben a fading miatt erős "leszívások" vannak, akkor a zaj a szűrő kimenetén nagyon nagy lesz. Ezért a ZF stratégia rádió csatornában nem javasolt eljárás.

#### 14.2. Minimum Mean Square Error (MMSE) stratégia

Az adaptív kiegyenlítés egy másik lehetséges stratégiája, hogy az adaptív szűrő kimenő jelének az ideális jeltől való eltérését, pontosabban az eltérés négyzetének várható értékét minimalizáljuk:

$$\bar{\mathbf{w}}_{opt} : \min_{\mathbf{w}} \mathbb{E} \left( y_n - \sum_{j=0}^J w_j x_{n-j} \right)^2 \quad (14.23.)$$

A Wiener szűrés esetében ugyan ez volt a kritérium, így az optimális szűrőre vonatkozó megoldás megegyezik az ott kapott eredménnyel:

$$\bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{w}}_{opt} = \bar{\mathbf{b}} \quad (14.24.)$$

Komponensenként:

$$b_i = \sum_{j=0}^J w_j R_{ij} \quad i = 0, 1, 2, \dots, J \quad (14.25.)$$

Ahol az autokorrelációs mátrix elemei:

$$R_{ij} = R_{xx}(i-j) = \mathbb{E} x_{n-i} x_{n-j} \quad (14.26.)$$

A keresztkorrelációs vektor elemei:

$$b_i = R_{yx}(i) = \mathbb{E} y_n x_{n-i} \quad (14.27.)$$

Az  $x$  jel autokorrelációs sorozata:

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \mathbb{E} x_{n-i} x_{n-j} = \mathbb{E} \left( \sum_{k=0}^{\infty} h_k y_{n-i-k} + v_{n-i} \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} h_l y_{n-j-l} + v_{n-j} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h_k h_l \mathbb{E} y_{n-i-k} y_{n-j-l} + \sum_{k=0}^{\infty} h_k \mathbb{E} y_{n-i-k} v_{n-j} + \sum_{l=0}^{\infty} h_l \mathbb{E} y_{n-j-l} v_{n-i} + \mathbb{E} v_{n-i} v_{n-j} \end{aligned} \quad (14.28.)$$

Felhasználva a továbbítandó jelre és a zajra tett feltevéseinket:

$$\mathbb{E} y_{n-i-k} y_{n-j-l} = \delta_{i+k, j+l} = \begin{cases} 1 & \text{ha } l = i+k-j \\ 0 & \text{ha } l \neq i+k-j \end{cases} \quad (14.29.)$$

$$\mathbb{E} y_n v_{n-m} = 0 \quad \forall m \quad (14.30.)$$

$$\mathbb{E} v_{n-i} v_{n-j} = \delta_{ij} N_0 = \begin{cases} N_0 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases} \quad (14.31.)$$

Eredményünk:

$$R_{ij} = R_{xx}(i-j) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k h_{k+i-j} + N_0 \delta_{ij} \quad (14.32.)$$

A (14.32.) összefüggés DFT-jét véve a vevő bemenetére érkező  $x$  jel spektrális teljesítmény sűrűség függvényét kapjuk. Az eredmény a 14.2. ábra alapján kézenfekvő:

$$S_{xx}(f) = H^*(f)H(f)S_{yy}(f) + N_0 = |H(f)|^2 + N_0 \quad (14.33.)$$

A keresztkorrelációs együttható:

$$\begin{aligned} b_i = R_{yx}(i) &= E y_n x_{n-i} = E y_n \left( \sum_{k=0}^{\infty} h_k y_{n-i-k} + v_{n-i} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta_{n,n-i-k} + 0 = h_{-i} \end{aligned} \quad (14.34.)$$

Az optimális együtthatókra vonatkozó (14.25.) egyenlet így:

$$R_{yx}(i) = h_{-i} = \sum_{j=0}^J w_j R_{ij} = \sum_{j=0}^J w_j R_{xx}(i-j) \quad (14.35.)$$

A (14.35.) egyenlet diszkrét idejű konvolúciót fejez ki, amit a frekvencia tartományban a megfelelő transzformáltak szorzataként írhatunk fel:

$$S_{yx}(f) = W(f)S_{xx}(f) \quad (14.36.)$$

A keresztkorrelációs spektrum:

$$S_{yx}(f) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} R_{yx}(i) e^{-j2\pi f i T} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_{-i} e^{-j2\pi f i T} = \sum_{i=0}^{\infty} h_i e^{j2\pi f i T} = H^*(f) \quad (14.37.)$$

A (4.36.) egyenletbe behelyettesítve (4.37.) és (4.33.) egyenleteket:

$$H^*(f) = W(f) \left[ |H(f)|^2 + N_0 \right] \quad (14.38.)$$

Amiből az adaptív szűrő átviteli függvénye:

$$W(f) = \frac{H^*(f)}{|H(f)|^2 + N_0} \quad (14.39.)$$

A szűrő kimenetén a zaj másodrendű momentuma (a zaj átlag teljesítménye) a Parseval-tétel felhasználásával:

$$E \eta_n^2 = \frac{1}{f_s} \int_0^{f_s} S_{\eta\eta}(f) df = T \int_0^{f_s} N_0 |W(f)|^2 df = T N_0 \int_0^{f_s} \frac{|H(f)|^2}{(|H(f)|^2 + N_0)^2} df \quad (14.40.)$$

Eredményünket összehasonlítva a ZF stratégia (4.22.)-ben kapott eredményével, láthatjuk, hogy az MMSE stratégia a zaj szempontjából sokkal kedvezőbb, így rádió csatornában ez az eljárás az ajánlott.

**Az együtthatók rekurzív beállítása:**

A (14.24.) egyenletből az optimális együtthatók meghatározhatók az autokorrelációs és a keresztkorrelációs függvények ismeretében. A probléma általában az, hogy ezek a függvények nem ismertek és a mátrix invertálást is szereténk elkerülni ( tipikusan nem on-line feladat).

Az adó és a vevő kapcsolat felvételének kezdetekor ( egy előre megbeszélt ) u.n. tanuló sorozatot használva a vevőben rendelkezésre áll a továbbítandó  $y_n$  sorozat. A tanulás alatt a szűrő együtthatókat adaptáljuk az alábbi algoritmus szerint:

$$w_l(n+1) = w_l(n) - \Delta \left( y_n - \sum_{j=0}^J w_j(n) x_{n-j} \right) x_{n-l} \quad l = 0, 1, \dots, J \quad (14.41.)$$

Konvergencia esetén az együtthatók fluktuációjának várható értéke zérus kell hogy legyen:

$$E(w_l(n+1) - w_l(n)) = 0 \quad (14.42.)$$

A (14.41.)-ből következően ez a:

$$E \left( y_n x_{n-l} - \sum_{j=0}^J w_j(n) x_{n-j} x_{n-l} \right) = 0 \quad (14.43.)$$

követelményt jelenti. A várható érték képzést elvégezve írhatjuk:

$$R_{yx}(l) = \sum_{j=0}^J w_j R_{xx}(l-j) \quad (14.44.)$$

ami viszont az optimális együtthatókra vonatkozó

$$\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{w}}_{opt} \quad (14.45.)$$

egyenletnek felel meg. A (14.41.) szerinti adaptációs algoritmus tehát az optimális szűrőhöz vezet.

A tanulás után várhatóan a csatorna kiegyenlítése megtörtént és így  $\tilde{y}_n \approx y_n$  lesz, majd a döntés után az  $\hat{y}_n = y_n$  azonosság is teljesül. Az adaptációt a tanulás után is folytatva az:

$$w_l(n+1) = w_l(n) - \Delta \left( \hat{y}_n - \sum_{j=0}^J w_j(n) x_{n-j} \right) x_{n-l} \quad l = 0, 1, \dots, J \quad (14.46.)$$

algoritmus szerint, a csatorna tulajdonságainak ( viszonylag lassú ) megváltozása esetén sem fog elromlani a kiegyenlítés minősége.

### 14.3. A döntés visszacsatolásos (Decision Feedback, DF) módszer

Ez a módszer a ZF és az MMSE módszer bizonyos kombinációja. Az adaptív szűrő ebben az esetben legyen ARMA típusú:

$$\tilde{y}_n = \sum_{j=0}^M v_j x_{n-j} - \sum_{i=1}^N u_i \tilde{y}_{n-i} \quad (14.47.)$$

Az adaptív szűrő együtthatóinak adaptálását végezzük az alábbi algoritmus szerint:

Az MA részt MMSE eljárás szerint:

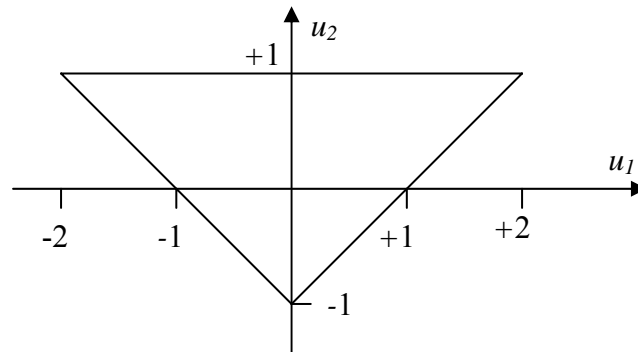
$$v_j(n+1) = v_j(n) - \Delta_v (y_n - \tilde{y}_n) x_{n-j} \quad j = 0, 1, 2, \dots, M \quad (14.48.)$$

Az AR részt ZF eljárás szerint:

$$u_i(n+1) = u_i(n) - \Delta_u (y_n - \tilde{y}_n) y_{n-i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (14.49.)$$

Megjegyezzük, hogy míg a FIR szűrők struktúráisan mindig stabilak, az ARMA szűrők viszont nem biztosan stabilak. Ezért a DF stratégia esetén az AR rész stabilitás vizsgálata további feladatot jelent. A (14.49.) rekurziója után meg kell vizsgálni, hogy az együtthatók a megengedett intervallumban maradnak-e.

Másodfokú AR rész esetén a stabilitás tartománya:



14.3. ábra A másodfokú szűrő együtthatóinak stabilitási tartománya

Magasabb fokszám esetén a stabilitás vizsgálat jelenlegi célkitűzésünkön túlmutat.