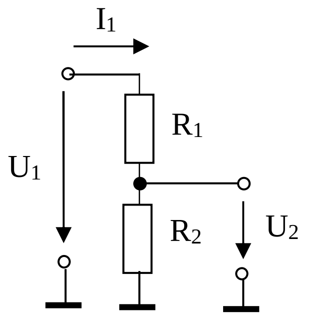
Lineáris, rezisztív hálózatelméleti modellek

Soros kapcsolás

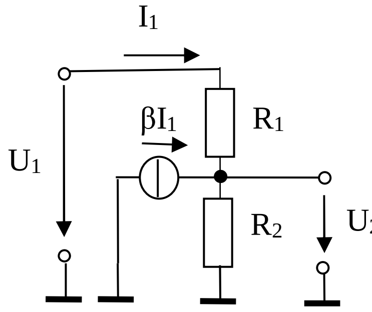
Feszültség osztó: lehet terheletlen (a két ellenálláson ugyan az az áram folyik)
vagy terhelt (nem egyezik a két ellenállás árama)

Példa:

terheletlen



terhelt
(áramvezérelt áramgenerátorral)



Bemenő ellenállás: $$R_{be} = \frac{U_1}{I_1} = R_1 + R_2$$

$$R_{be} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{R_1 I_1 + R_2 (I_1 + \beta I_1)}{I_1} = R_1 + (1+\beta) R_2$$

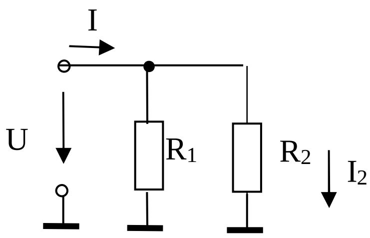
Feszültség(osztás) átvitel: $$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_2 (I_1 + \beta I_1)}{R_1 I_1 + R_2 (I_1 + \beta I_1)} = \frac{(1+\beta) R_2}{R_1 + (1+\beta) R_2}$$

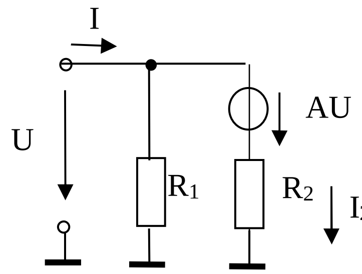
Párhuzamos kapcsolás, áram osztó

Példa:

terheletlen



terhelt
(feszültség vezérelt feszültség generátorral)



Bemenő ellenállás:

$$\frac{1}{R_{be}} = \frac{I}{U} = \frac{I_1 + I_2}{U} = \frac{\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}}{U} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_{be} = \frac{U_1}{I_1} = R_1 * R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{1}{R_{be}} = \frac{I}{U} = \frac{I_1 + I_2}{U} = \frac{\frac{U}{R_1} + \frac{U - AU}{R_2}}{U} = \frac{1}{R_1} + (1-A)\frac{1}{R_2}$$

$$R_{be} = R_1 * \frac{R_2}{(1-A)}$$

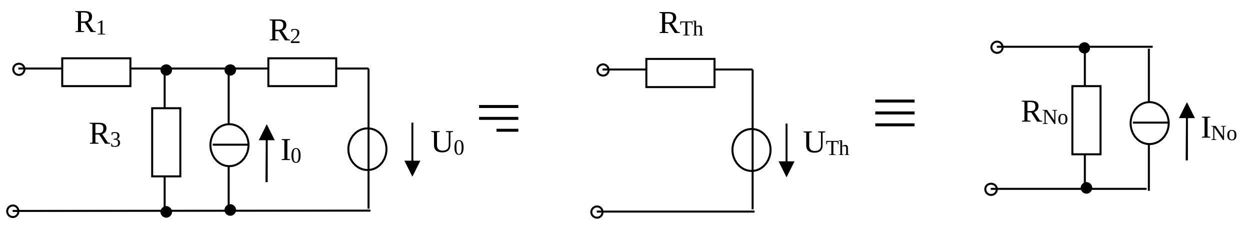
Áramosztó: $$K = \frac{I_2}{I} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$K = \frac{I_2}{I} = \frac{\frac{U - AU}{R_2}}{\frac{U}{R_1} + \frac{U - AU}{R_2}} = \frac{(1-A) R_1}{R_2 + (1-A) R_1}$$

Lineáris kapu (kétpólus) Thevenin és Norton ekvivalense:

Példa:

A kétpólusú áramkör: Thevenin ekvivalens Norton ekvivalens

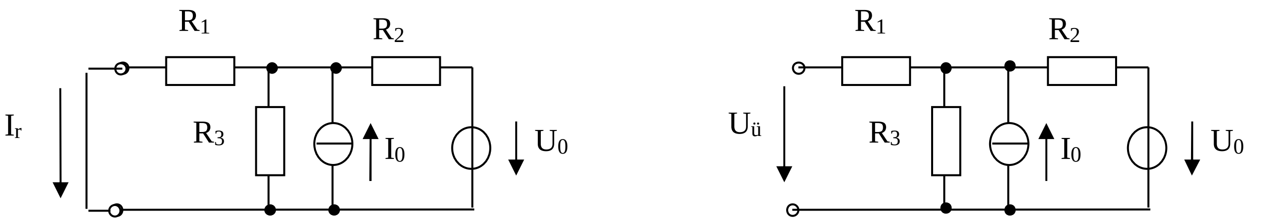


Paraméterei: $U_{Th} = U_{ü}$, $I_{No} = I_r$, $R_{Th} = R_{No} = R$

$$R_{Th} = R_{No} = \frac{U_{ü}}{I_r}, vagy$$

$$R_{Th} = R_{No} = R_{be}\Big|_{U_0 = 0, I_0 = 0, \text{dezaktválás}} == R_1 + (R_2 * R_3)$$

$I_{No} = I_r$ rövidzárási áram: $U_{Th} = U_{ü}$ üresjárási feszültség:



Szuperpozició elvét felhasználva:

$$I_r = I(U_0, I_0 = 0) + I(I_0, U_0 = 0) = $$
$$= \frac{R_3}{R_1 + R_3}\frac{U_0}{R_2 + R_1 * R_3} + \frac{R_2 * R_3}{R_1 + R_2 * R_3} I_0$$

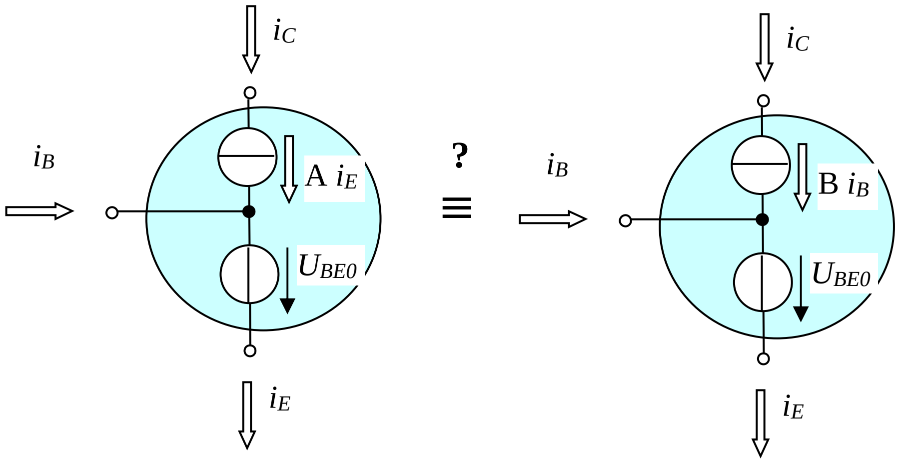
$$U_{ü} = U(U_0, I_0 = 0) + U(I_0, U_0 = 0) = $$
$$= \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_0 + (R_2 * R_3) I_0$$

$$R_{Th} = R_{No} = R_{be}\Big|_{dezaktíválás} = (R_1 + (R_2 * R_3))$$

Ellenőrzés: $\boxed{R_{be} I_r = U_{ü}}$ azaz,

$$(R_1 + (R_2 * R_3))\left(\frac{R_3}{R_1 + R_3}\frac{U_0}{R_2 + R_1 * R_3} + \frac{R_2 * R_3}{R_1 + R_2 * R_3} I_0\right) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_0 + (R_2 * R_3) I_0$$

Példa: Adott két hárompólusú lineáris hálózati modell, melyek azonos független feszültség forrást (U_{BE0}) és különböző vezérelt áramforrást tartalmaznak. A két modellben a független feszültség források (U_{BE0}) azonosak, a vezérelt áramforrások különböznek (i_C = A i_E és i_C = B i_B). Az A és B áramerősítési paramétereikre vonatkozó mely feltételek esetén lesznek ekvivalensek, azaz kívülről megkülönbözhetetlenek ezek a modellek?



Az áram egyenletek:

Nyílván mindkettőre igaz, hogy $i_E = i_B + i_C$

ezenkívül, itt: i_C = A i_E , itt pedig i_C = B i_B

Mindkét modell három áramára két-két egyenlet adott, így mindkét esetben az egyik áramot választva, az meghatározza a másik kettőt. Az összefüggéseket az alábbi két táblázatban foglalhatjuk össze:

	i_B	i_C	i_E
i_B	1	(1-A)/A	1-A
i_C	A/(1-A)	1	A
i_E	1/(1-A)	1/A	1

	i_B	i_C	i_E
i_B	1	1/B	1/(1+B)
i_C	B	1	B/(1+B)
i_E	1+B	(1+B)/B	1

Az ekvivalencia feltétele a két táblázatbeli összefüggések azonossága:
Tehát, pl.

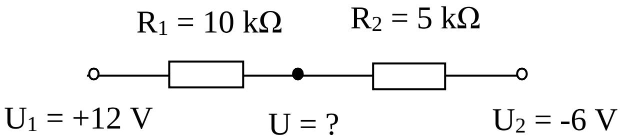
A = B/(1+B) ill. B=A/(1-A), stb.

A két modell feszültség egyenletei nyílván azonosak:

$u_{BE} = U_{BE0}$, u_{CB} = *indefinit !* u_{CE}= *indefinit !*

Megjegyzés: A vizsgált két modell bipoláris rétegtranzisztor (BJT) legegyszerűbb, lineáris, kétparaméteres modelljei a tranzisztorok normál aktív üzemi tartományában.

Példa: Soros kapcsolás végein lévő (a közös föld-csomóponthoz képest értelmezett) feszültségektől egy belső pont feszültsége hogyan függ?



Kapásból felírható különböző elvű, konkrét (számszerű) megoldási lehetőségek:

1. $I = \dfrac{12-(-6)}{10+5} = {}^{18}\!/_{15}\, mA$, $U = 12 - \dfrac{18}{15}\cdot 10 = 0V$ vagy $U = -6 + \dfrac{18}{15}\cdot 5 = 0V$

vagy $I = \dfrac{(-6)-12}{10+5} = -{}^{18}\!/_{15}\, mA$, $U = 12 + \left(-\dfrac{18}{15}\cdot 10\right) = 0V$ vagy $U = -6 - \left(-\dfrac{18}{15}\cdot 5\right) = 0V$

2. Az $\dfrac{12-U}{10} = \dfrac{U-(-6)}{5}$ egyenlet megoldása: $\dfrac{U}{5} + \dfrac{U}{10} = \dfrac{12}{10} - \dfrac{6}{5} \rightarrow U = \dfrac{\dfrac{12}{10} - \dfrac{6}{5}}{\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10}} = \dfrac{12-12}{10+5} = 0V$

3. $U = \dfrac{5}{10+5}12 + \dfrac{10}{10+5}(-6) = 4 - 4 = 0V$

A megoldások általánosított (paraméteresen számolt) gondolatmenetei:

1. módszer:
Az egyik végpont feszültségéhez (a felvett áramiránytól függően) hozzáadjuk vagy levonjuk a hozzá közelebb álló ellenálláson eső feszültséget:

Pélául: $I = \dfrac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2}$, $U = U_1 - R_1 I$ vagy $U = U_2 + R_2 I$

2. módszer: a soros kapcsolásra **csomóponti egyenlet** felírása

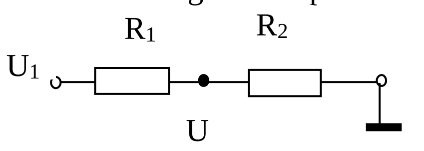
$$I_1 = I_2 \text{ azaz } \frac{U_1 - U}{R_1} = \frac{U - U_2}{R_2} \rightarrow U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}$$

$$U = \frac{R_2}{R_1 + R_2}U_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2}U_2$$

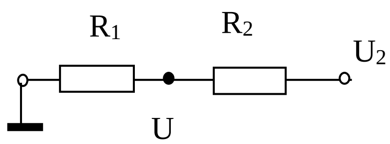
3. módszer: **szuperpozíció**

$U = K_1 U_1 + K_2 U_2$, ahol K_1 és K_2 két terheletlen feszültségosztó képlet:

$$K_1 = \left.\frac{U}{U_1}\right|_{U_2 = 0} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



$$\text{és } K_2 = \left.\frac{U}{U_2}\right|_{U_1 = 0} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



A három módszer, természetesen ugyan azt az eredményt adja.
Hogy ki, mikor, melyiket alkalmazza? Tessék gyakorolni és a megszerzett rutin alapján adott esetben a leggyorsabban célravezetőt választani, egy másik módszerrel pedig ellenőrizni lehet, nem számoltunk-e el valamit! Dimenziók, mértékegységek, nagyságrendek mindig ellenőrizendőek!