Az átviteli (transzfer) függvény, átviteli karakterisztika, Bode diagrammok

1.) Tipikus feladat: Számítsuk ki adott lezárások mellett egy lineáris hálózat (operátor tartományi) $T(s)=\frac{u_2}{u_0}$ transzfer függvényét és frekvencia függő $T(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ karakterisztikáit!

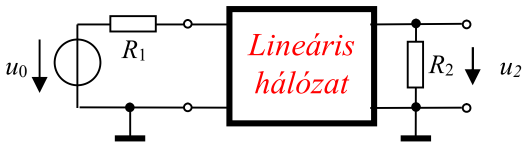
2.) A motiváció: Szinuszos gerjesztést választva, a könnyen megmérhető amplitúdó- és fázis-karakterisztika alapján **minősíteni tudjuk a hálózatot a jelátvitel szempontjából**.

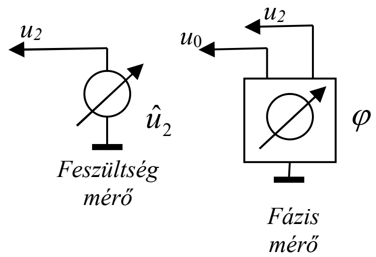
$$u_0(t)=\hat{u}_0\sin(\omega t) \qquad \rightarrow \qquad u_2(t)=\hat{u}_2\sin(\omega t+\varphi)$$

Két valós függvény:

$$A(\omega)=\frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_0} \qquad \varphi(\omega)=arc\{u_2\}-arc\{u_0\}$$

A komplex értékű (de valós változójú (ω)) átviteli függvény: $T(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$





Ha minősíteni szeretnénk a megtervezett hálózatot még az áramkör megépítése előtt, akkor a megfelelő *Kirchoff-egyenletek* felírásával ki is tudjuk számítani a T transzfer függvényt, sőt az $A(\omega)$ és $\varphi(\omega)$ függvényeket ***kvalitatíve*** ábrázolni is tudjuk a *Bode-diagramok* segítségével.
(Bode diagramok, törtvonalas közelítés) (lásd később).

3.) A módszer:

A frekvencia fogalom általánosításával bevezettük a komplex frekvencia (s) fogalmát. Hasonlóan a szinuszos gerjesztésű hálózatokhoz, a komplex frekvenciával az u.n. *operátoros impedanciát* definiáltuk: ($j\omega \rightarrow s$)

Imp. elem impedanciája	Szinuszos gerj. hál.	Komplex frekv. tart.
Induktivitás	$j\omega L$	sL
Kapacitás	$1/j\omega C$	$1/sC$

A komplex frekvencia-változó bevezetésének a jelölés rövidülésén túlmutató előnyei is vannak, ami a hálózat szintézis feladataiban nélkülözhetetlenek, de ezekre mi most nem hivatkozunk.

(Az s változó a *Laplace-transzformáció* változójával egyezik meg. Tudjuk, hogy a Laplace transzformáció differenciál-egyenleteket algebrai egyenletekbe transzformál, így egy egyszerűbb feladat osztályba sorolható problémát oldhatunk meg a segítségével. Ebben a tantárgyban azonban tipikusan **nem fogunk** idő-tartománybeli problémákat megoldani.)

4.) A módszer lépései:

1. Az operátoros impedanciákkal felírjuk a Kirchoff-egyenleteket.
2. Az egyenlet-rendszerből kifejezzük a $T(s)=\dfrac{u_2}{u_0}=\dfrac{N(s)}{D(s)}$ transzfer függvényt. Koncentrált elemes hálózatokban $N(s)$ és $D(s)$ polinomok.
3. Megkeressük az $N(s)$ és $D(s)$ polinomok gyökeit

   Zérusok: $N(s)=0 \;\rightarrow\; z_i \quad i=1,2,3,\dots,M$

   Pólusok). $D(s)=0 \;\rightarrow\; p_i \quad i=1,2,3,\dots,L$
4. Gyöktényezős alakban írjuk fel a polinomokat:

$$T(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=k_L\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{L}(s-p_i)}$$

   Ahol: k_L a két polinom legmagasabb fokszámú tagjai együtthatójának hányadosa
5. *Bode-normált* alakra hozzuk a kifejezést (kimaradhat a 4. lépés)

$$T(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=k_0\frac{\prod_{i=1}^{M}\left(1-\frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{i=1}^{L}\left(1-\frac{s}{p_i}\right)}$$

   Ahol: k_0 az $N(s)$ és a $D(s)$ polinomok nullad-fokú tagjainak hányadosa

6. Az $s\leftarrow j\omega$ helyettesítés után megrajzoljuk a Bode-diagramok törtvonalas közelítését a kétszer logaritmikus koordináta rendszerben.

$$a(\omega)=20\lg\left|T(j\omega)\right|=a_0+a_{N1}(\omega)+a_{N2}(\omega)+\dots-a_{D1}(\omega)-a_{D2}(\omega)-\dots$$
$$\varphi(\omega)=\varphi_0+\varphi_{N1}(\omega)+\varphi_{N2}(\omega)+\dots-\varphi_{D1}(\omega)-\varphi_{D2}(\omega)-\dots$$

Az itt szereplő tényezőket hívjuk *Bode-építőkockáknak.*

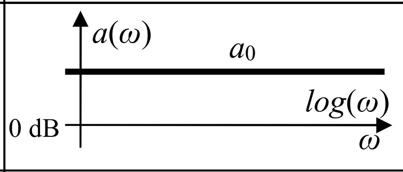
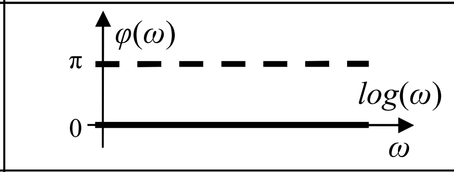
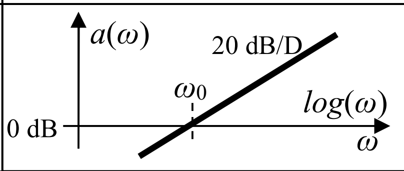
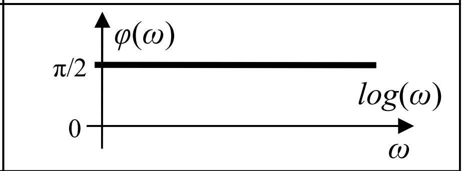
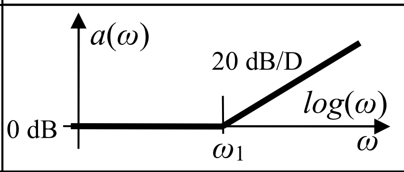
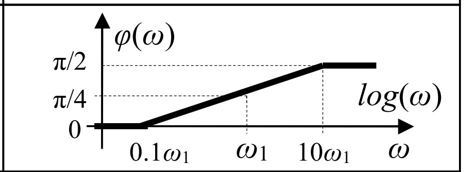
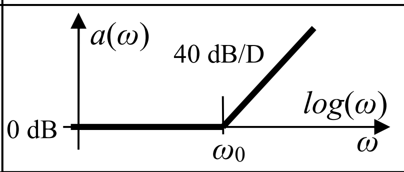
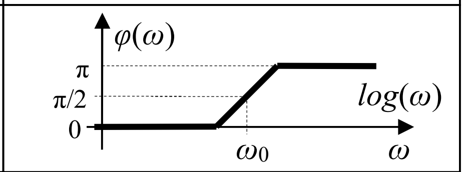
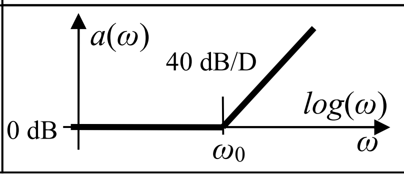
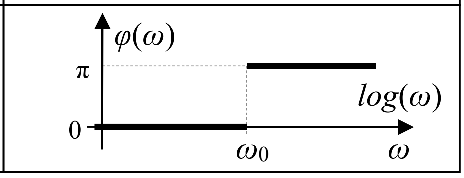
Ahol: $a_0=20\lg|k_0| \qquad a_i(\omega)=20\lg\left|1+\dfrac{j\omega}{\omega_i}\right| \qquad a_{i12}(\omega)=20\lg\left|1+2\zeta\dfrac{j\omega}{\omega_i}-\dfrac{\omega^2}{\omega_i^2}\right|$

$\varphi_0=\begin{cases}0\\ \pi\end{cases} \qquad \varphi_i(\omega)=arc\left(1+\dfrac{j\omega}{\omega_i}\right) \qquad \varphi_{i12}(\omega)=arc\left(1+2\zeta\dfrac{j\omega}{\omega_i}-\dfrac{\omega^2}{\omega_i^2}\right)$

A fő tulajdonságok:

- A szorzat (tört) alakban felírt transzfer függvény logaritmusa a tényezők logaritmusainak összege (különbsége).
- A szorzat (tört) alakban felírt transzfer függvény fázisa a számláló és a nevező fázisának különbsége. A számláló és a nevező fázisa a tényezők fázisának összege.
- A kétszer logaritmikus koordináta rendszerben a hatványfüggvények egyenesek
- A Bode-építőkockák aszimtotái 0-ad, 1-ső fokú ill. 2-od fokú hatványfüggvények
- Grafikusan egyeneseket tudunk összeadni

A Bode-építőkockák összefoglaló (Töréspontos közelítés)

Bode tényező	*Amplitúdó kar.*	*Fázis karakterisztika*
k_0		
$\left(\frac{s}{\omega_0}\right)$		
$\left(1+\frac{s}{\omega_1}\right)$		
$\left(1+2\zeta\frac{s}{\omega_0}+\frac{s^2}{\omega_0^2}\right)$		
$\left(1+\frac{s^2}{\omega_0^2}\right)$		

1.) A konstans

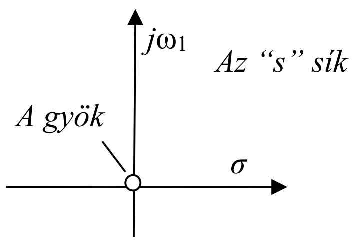
Az amplitúdó karakterisztika $a_0 = 20\log|k_0|$

A fázis: konstans, 0 vagy π

2.) Gyök (zérus) **az origóban:**

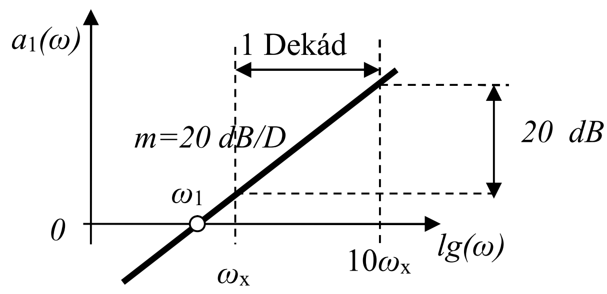
Bode alak: $T_1(j\omega)=\left(\frac{j\omega}{\omega_1}\right)$ $A_1(\omega)=\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$

$$a_1(\omega)=20\log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)=20\log\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$$



…

A fázis karakterisztika: konstans: π / 2

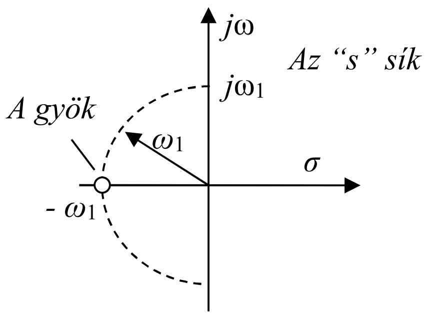


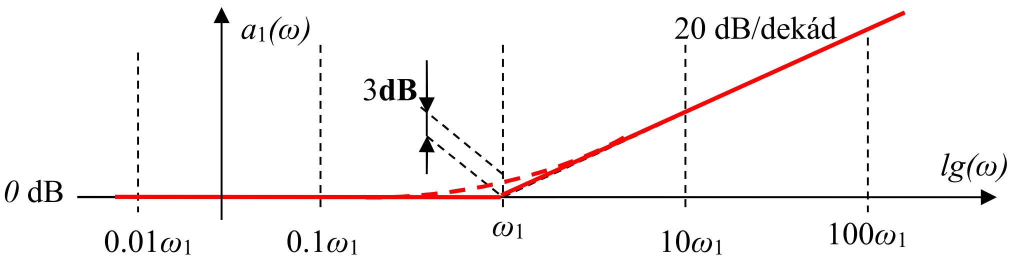
3.) Valós gyök (zérus)

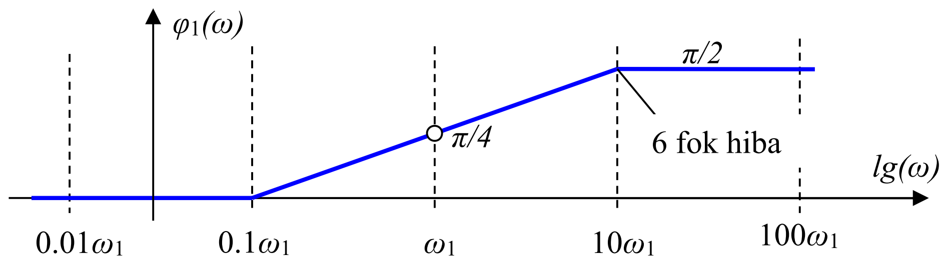
Bode alak: $T_1(s)=\left(1+\frac{s}{\omega_1}\right) \quad \rightarrow \quad T_1(j\omega)=1+\frac{j\omega}{\omega_1}$

$$A_1(\omega)=\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

$$a_1(\omega)=20\lg\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}=\begin{cases} 0dB & ha \quad \omega \ll \omega_1 \\ 3dB & ha \quad \omega=\omega_1 \\ 20\lg\frac{\omega}{\omega_1} & ha \quad \omega \gg \omega_1 \end{cases}$$





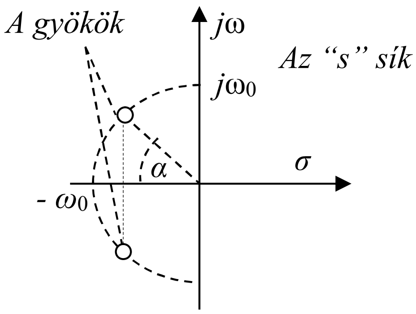


4.) Konjugált komplex gyök-pár (zérusok) $0<\zeta<1$

Bode alak: $T_2(s)=1+2\zeta\frac{s}{\omega_0}+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2$

$$T_2(j\omega)=1+2\zeta\frac{j\omega}{\omega_0}+\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2=\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)+j\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

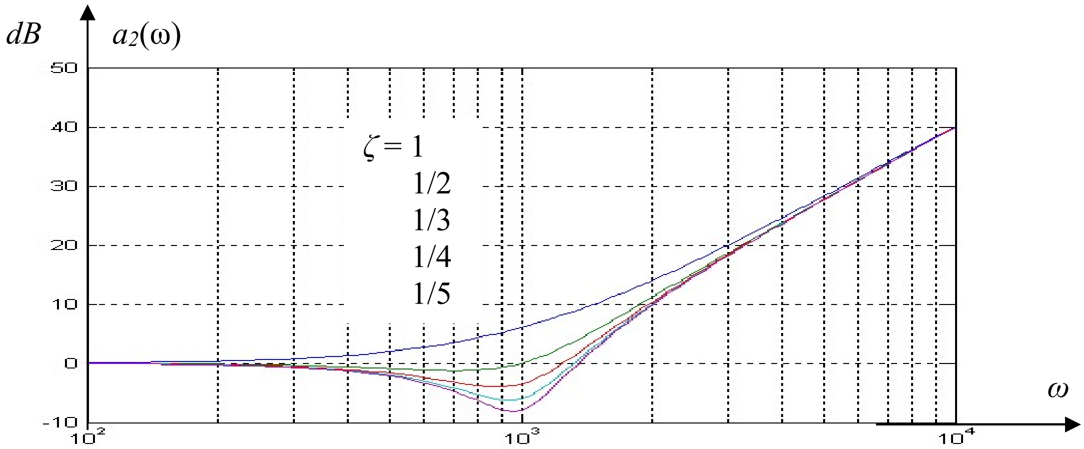
$$A_2(\omega)=\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$



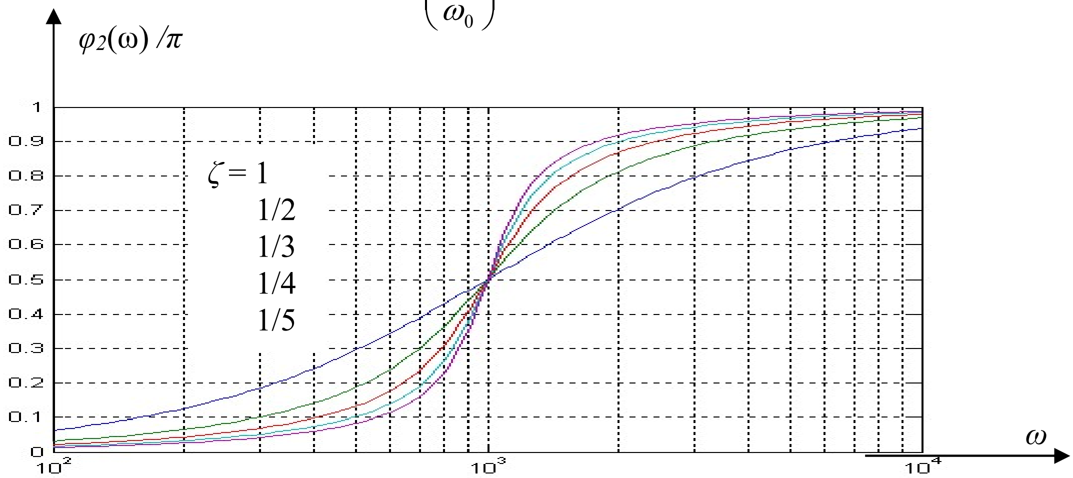
$$\boxed{\zeta=\cos(\alpha)}$$

$$a_2(\omega)=20\lg\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}=\begin{cases} 0dB & ha \quad \omega \ll \omega_0 \\ 20\lg 2\zeta & ha \quad \omega=\omega_0 \\ 40\lg\frac{\omega}{\omega_0} & ha \quad \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

A függvények alakja erősen függ ζ értékétől:

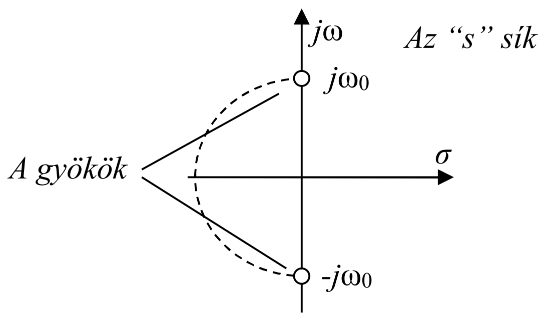


$$\varphi_2(\omega) = arctg\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. = \begin{cases} 0. & ha \quad \omega << \omega_0 \\ \pi/2 & ha \quad \omega = \omega_0 \\ \pi & ha \quad \omega >> \omega_0 \end{cases}$$



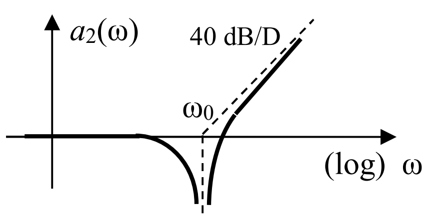
4. Konjugált gyökök a jω tengelyen Elfajuló eset: amikor $\zeta = 0$.

Bode alak: $T_2(s) = 1 + \frac{s^2}{\omega_0^2}$



$$T_2(j\omega) = 1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \quad \text{valós}$$

$$a_2(\omega) = 20\lg\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2} = \begin{cases} 0dB & ha \quad \omega << \omega_0 \\ -\infty & ha \quad \omega = \omega_0 \\ 40\lg\frac{\omega}{\omega_0} & ha \quad \omega >> \omega_0 \end{cases}$$



$$\varphi_2(\omega) = \begin{cases} 0. & ha \quad \omega << \omega_0 \\ ? & ha \quad \omega = \omega_0 \\ \pi & ha \quad \omega >> \omega_0 \end{cases}$$

Példák:

Adott egy négypólus feszültség transzfer függvénye: $K(s)=\dfrac{2+200s}{20+10s+5s^2}$.

Rajzolja fel a töréspontos Bode diagrammokat!

Megoldás: a $K(s)$ transzfer függvényt Bode-normált gyöktényezős alakra kell alakítani, aaz

$$K(s)=\frac{2+200s}{20+10s+5s^2}=\begin{cases} k\dfrac{1+\dfrac{s}{\omega_z}}{\left(1+\dfrac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1+\dfrac{s}{\omega_{p2}}\right)}, & \text{ha minden gyök valós} \\[2ex] k\dfrac{1+\dfrac{s}{\omega_z}}{\left(1+2\xi\dfrac{s}{\omega_p}+\left(\dfrac{s}{\omega_p}\right)^2\right)}, & \text{ha konjugált komplex gyökpár van} \end{cases}.$$

A Bode-normált gyöktényezős alak paraméterei:

- a zérusokhoz (számláló) és a pólusokhoz (nevező) töréspontí frekvenciák (ω_z, ω_{p1}, ω_{p2}),
- komplex gyökpár esetén ω_p töréspontí frekvencia és ξ csillapítási paraméter
- k erősítés.

Tehát:

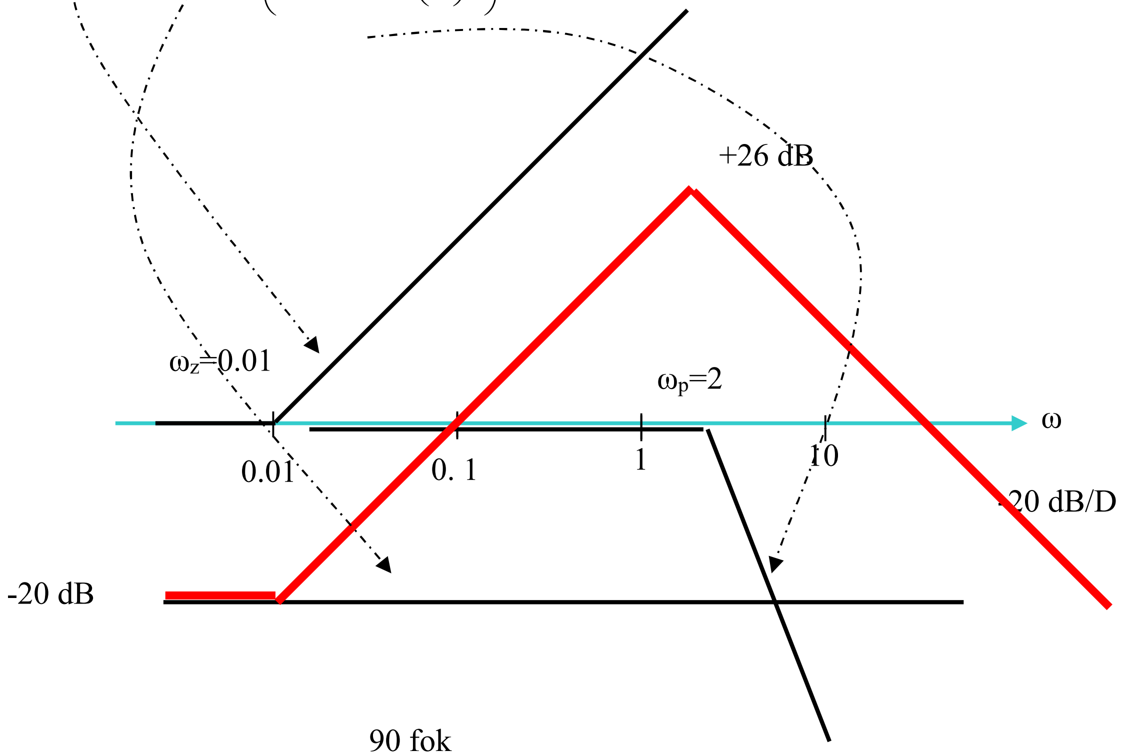
$$K(s)=\frac{2+200s}{20+10s+5s^2}=\frac{2(1+100s)}{20\,(1+0{,}5s+0{,}25s^2)}=0{,}1\frac{\left(1+\dfrac{s}{0{,}01}\right)}{\left(1+2\dfrac{1}{2}\dfrac{s}{2}+\left(\dfrac{s}{2}\right)^2\right)}$$

konjugált komplex gyökpár:
$\xi = 1/2$, $\omega_p = 2$

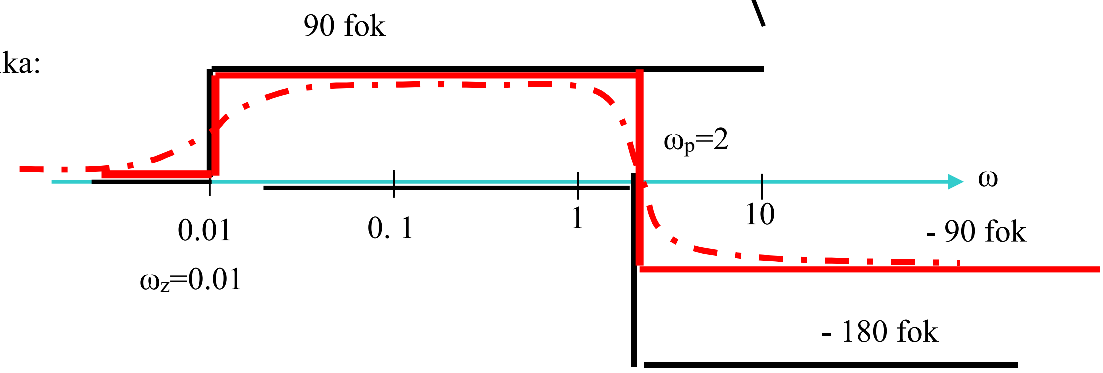
Az eredő Bode diagramm az egyes gyöktényezőkhöz tartozó Bode-diagramm építőkockák grafikus öszege:

$$0{,}1\frac{\left(1+\frac{s}{0{,}01}\right)}{\left(1+2\frac{1}{2}\frac{s}{2}+\left(\frac{s}{2}\right)^{2}\right)}$$

Ampltúdó:

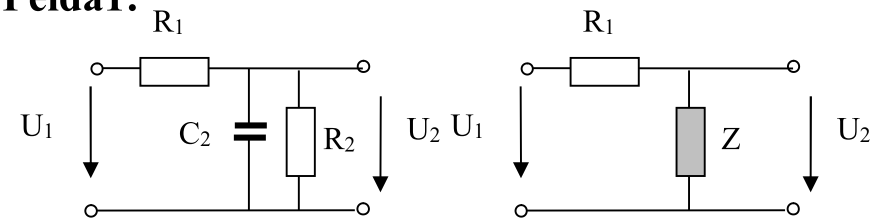


Fázis karakterisztika:



Áramköri példák

Példa1:



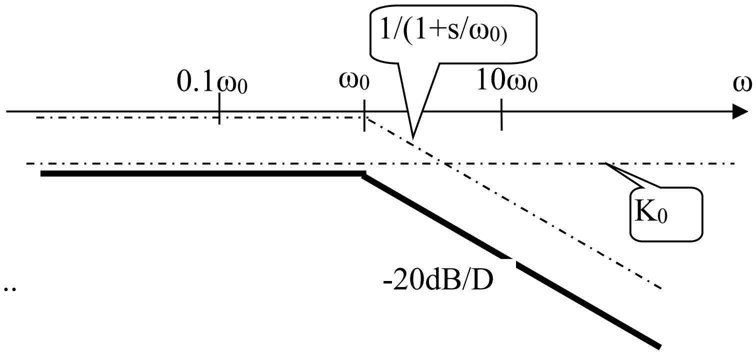
$$Z = \frac{1}{sC_2} * R_2 = \frac{R_2}{1 + sR_2C_2}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2}{U_1}(s) = K(s) = \frac{Z}{R_1 + Z} = \frac{R_2}{R_1 + sR_1R_2C_2 + R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\frac{1}{1 + s(R_1 * R_2)C_2}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = K(s) = K_0\frac{1}{1 + s\tau_0} = K_0\frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}}, \qquad \mathrm{K}_0 = \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{(\mathrm{R}_1 * \mathrm{R}_2)\mathrm{C}_2}$$

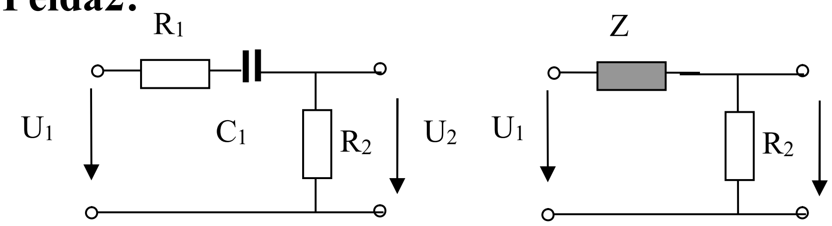
Bode diagaram:

Aplitúdó-frekvencia
karakterisztika:



Fázis-frekvencia karakterisztika: .....

Példa2:



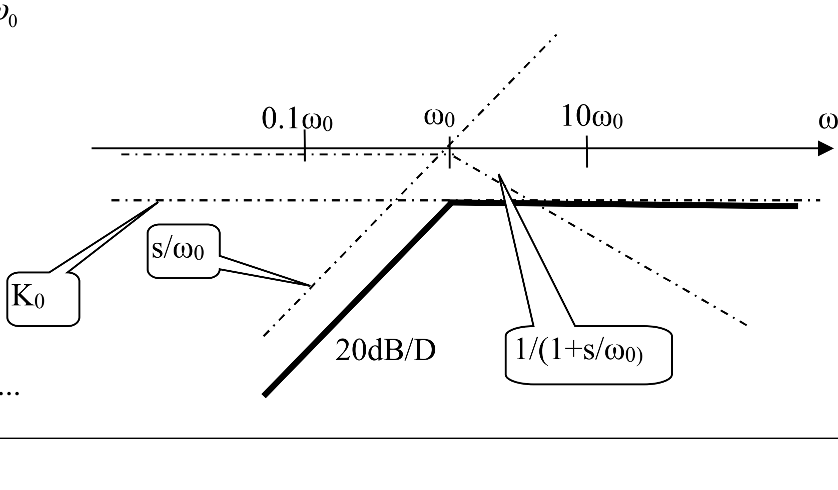
$$Z = R_1 + \frac{1}{sC_1} = \frac{1 + sR_1C_1}{sC_1}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_2}{U_1}(s) = K(s) = \frac{R_2}{R_2 + Z} = \frac{sR_2C_1}{sR_2C_1 + 1 + sR_1C_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\frac{s(R_1 + R_2)C1}{1 + s(R_1 + R_2)C_1}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = K(s) = K_0\frac{s\tau_0}{1 + s\tau_0} = K_0\frac{\frac{s}{\omega_0}}{1 + \frac{s}{\omega_0}}, \qquad \mathrm{K}_0 = \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{(\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)\mathrm{C}_1}$$

Bode diagaram:

Aplitúdó-frekvencia
karakterisztika:



Fázis-frekvencia karakterisztika: .....

További gyakorló feladatok:

Az alábbi áramkörökre végezze el az operátor tartományi analízist: $\frac{U_2}{U_1}(s)=?$

Határozza meg a pólus-zérus képet, Bode-normált gyöktényezőket és paramétereiket,

rajzolja fel a frekvencia tartományi jellemzőket, azaz a Bode diagramokat!