

Híradástechikai jelfeldolgozás

2. előadás 2015. február 16.

Dr. Gaál József
BME Hálózati Rendszerek és SzolgáltatásokTanszék
gaal@hit.bme.hu

2015. február 16.
Budapest

Műveletek valós modellekkel (függvények, sorozatok, vektorok)

Művelet	egy operandus	több operandus	paraméteres	típus váltó	további megjegyzés
Skalárral szorzás	✓		c		
Összeadás,		✓			
lineár kombináció		✓	$c_1, c_2, \dots c_n$		
Szorzás		✓			✓
Eltolás	✓		d		✓
Megfordítás	✓				
Konvolúció		✓			✓
Periodikus kiterjesztés	✓		P	✓	✓
Ablakolás	✓		$w(x), w_n$	✓	✓
Mintavételezés	✓		D	✓	✓
Interpolálás	✓		$s(x)$	✓	✓

Megjegyzések a modell műveletekhez

- Szozás: vektoroknál elemenkénti szorzás
- Eltolás: vektoroknál ciklikus (cirkuláris) eltolás:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \dots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \overset{d}{\Rightarrow} \underline{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \dots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{y}_{\mathrm{i}} = x_{(i-d)\bmod N}, i = 1 \dots N-1$$

- Megfordítás:
  - vektornál cirkuláris $y_i = x_{(-i)\bmod N}$, $\mathrm{i} = 0,\dots\mathrm{N} - 1$
  - páros: azonos a megfordítottal $y(t)_e = y_e(-t)$
  - páratlan: azonos a megfordított mínusz egyszeresével $y(t)_o = -y_o(-t)$
  - páros-páratlan dekompozíció:

$$y_e(t) = \frac{1}{2}\left(y(t) + y(-t)\right)$$

$$y_o(t) = \frac{1}{2}\left(y(t) - y(-t)\right)$$

$$y(t) = y_e(t) + y_o(t)$$

Műveletek valós modellekkel (függvények, sorozatok, vektorok)

Művelet	egy operandus	több operandus	paraméteres	típus váltó	további megjegyzés
Skalárral szorzás	✓		c		
Összeadás,		✓			
lineár kombináció		✓	$c_1, c_2, \dots c_n$		
Szorzás		✓			✓
Eltolás	✓		d		✓
Megfordítás	✓				
Konvolúció		✓			✓
Periodikus kiterjesztés	✓		P	✓	✓
Ablakolás	✓		$w(x), w_n$	✓	✓
Mintavételezés	✓		D	✓	✓
Interpolálás	✓		s(x)	✓	✓

Konvolúció (megjegyzések 1)

- Folytonos lineáris konvolúció:

$$y(x) * v(x) = w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y(u)\, v(x-u)\, du$$

- Folytonos periodikus konvolúció:

$$\tilde{y}_P(x) * \tilde{v}_P(x) = \tilde{w}_P(x) = \frac{1}{P} \int_{u_0}^{u_0+P} \tilde{y}_P(u)\, \tilde{v}_P(x-u)\, du$$

- Diszkrét lineáris konvolúció:

$$y_n * v_n = w_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \cdot v_{n-k}, \quad n = -\infty \ldots \infty$$

- Diszkrét periodikus konvolúció:

$$\tilde{y}_n * \tilde{v}_n = \tilde{w}_n = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{m=m_0}^{m_0+N-1} \tilde{y}_m \cdot \tilde{v}_{n-m}, \quad n = -\infty \ldots \infty$$

- Ciklikus (cirkuláris) konvolúció:

$$\underline{y} * \underline{v} = \underline{w}, \quad w_n = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cdot v_{(n-k)\mathrm{mod}N}, \; n = 0 \ldots N-1$$

, i=0,1,...(N-1)

Konvolúció (megjegyzések 2)

- Számítási konstrukció:
  - Megfordítás
  - Eltolás
  - Skalár szorzat: szorzás és integrálás vagy összeadás

- Azonosságok:

1. y(x) * v(x) = v(x) * y(x) (kommutativitás)
2. (y(x) * v(x)) * z(x) = y(x) * (v(x) * z(x)) (asszociativitás)
3. y(x) * (v(x) + z(x)) = y(x) * v(x) + y(x) * z(x) (disztributivitás)
4. Ha y(x) * v(x) = z(x), akkor

   y(x) * v(x-u) = z(x-u),

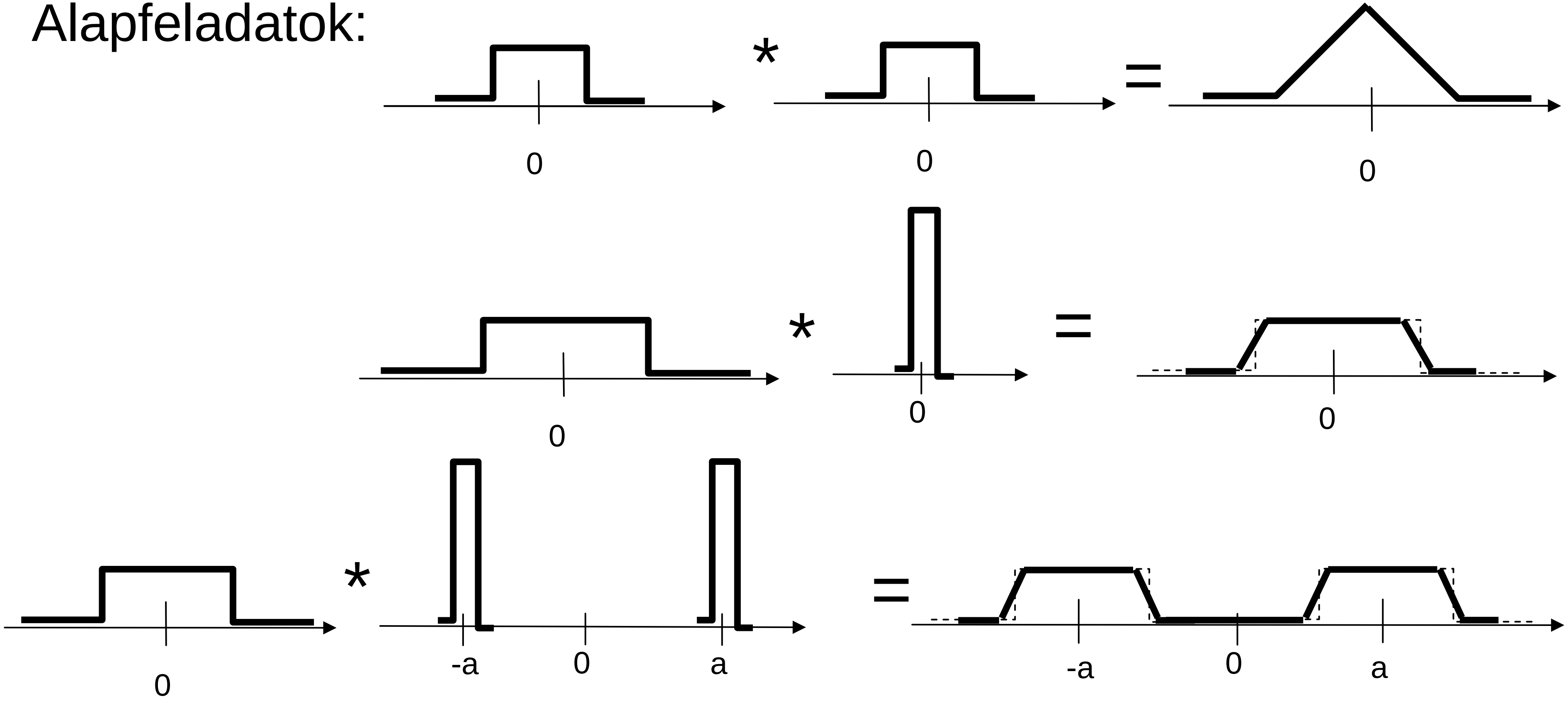
   y(x-u) * v(x) = z(x-u),

   $y(x-u_1) * v(x-u_2) = z(x-u_1-u_2)$ (eltolási tulajdonságok)

5. $$\int_{-\infty}^{\infty} y(u)\, v(x-u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} y\left(\frac{x}{2}+u\right) v\left(\frac{x}{2}-u\right) du$$

Konvolúció (megjegyzések 3)

Alapfeladatok:



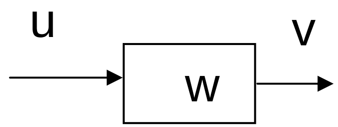
Konvolúció (megjegyzések 4)

- Speciális sorozatok, függvények, vektorok
  - Egység elem:

    Létezik-e olyan e (vektor, sorozat, függvény), hogy minden x-re:

    $\underline{y} * \underline{e} = \underline{y}$, $y_n * e_n = y_n$, $y(x) * e(x) = y(x)$?

  - Létezik-e olan függvény, melynek önmagával vett konvolúciója önmagát adja vissza?
  - Gauss függvény
- Invariáns, lineáris transzformációk (eltolás invariáns)



V = w * u

- Hilbert transzformáció:

$$H\{u(x)\} = u(x) * \frac{1}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

- Korreláció: $r_{u,v}(t) = u(t) * v(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) v(t+\tau) d\tau$

Műveletek valós modellekkel

Művelet	egy operandus	több operandus	paraméteres	típus váltó	további megjegyzés
Skalárral szorzás	✓		c		
Összeadás,		✓			
lineár kombináció		✓	c_1, c_2, ... c_n		
Szorzás		✓			✓
Eltolás	✓		d		✓
Megfordítás	✓				
Konvolúció		✓			✓
Periodikus kiterjesztés	✓		P	✓	✓
Ablakolás	✓		w(x), w_n	✓	✓
Mintavételezés	✓		D	✓	✓
Interpolálás	✓		s(x)	✓	✓

Megjegyzések a modell-műveletekhez

Típus váltó műveletek és paraméterei:

- Periódikus kiterjesztés:
  - átlapolódásos (általában)
  - átlapolódás mentes (speciális esetben)

$$y(t) \overset{P}{\Rightarrow} \tilde{y}_P(t), \qquad \tilde{y}_P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t-nP)$$

- Ablakolás: véges tartójú ablakkal szorzás

  véges idejű megfigyelés vagy

  spektrum sávhatárolás modellje

  triviális példa: rektanguláris ablak

$$y(t) \overset{w_T(t)}{\Rightarrow} y_{w,T}(t), \quad y_{w,T}(t) = w_T(t)\, y(t)$$

- Mintavételezés:

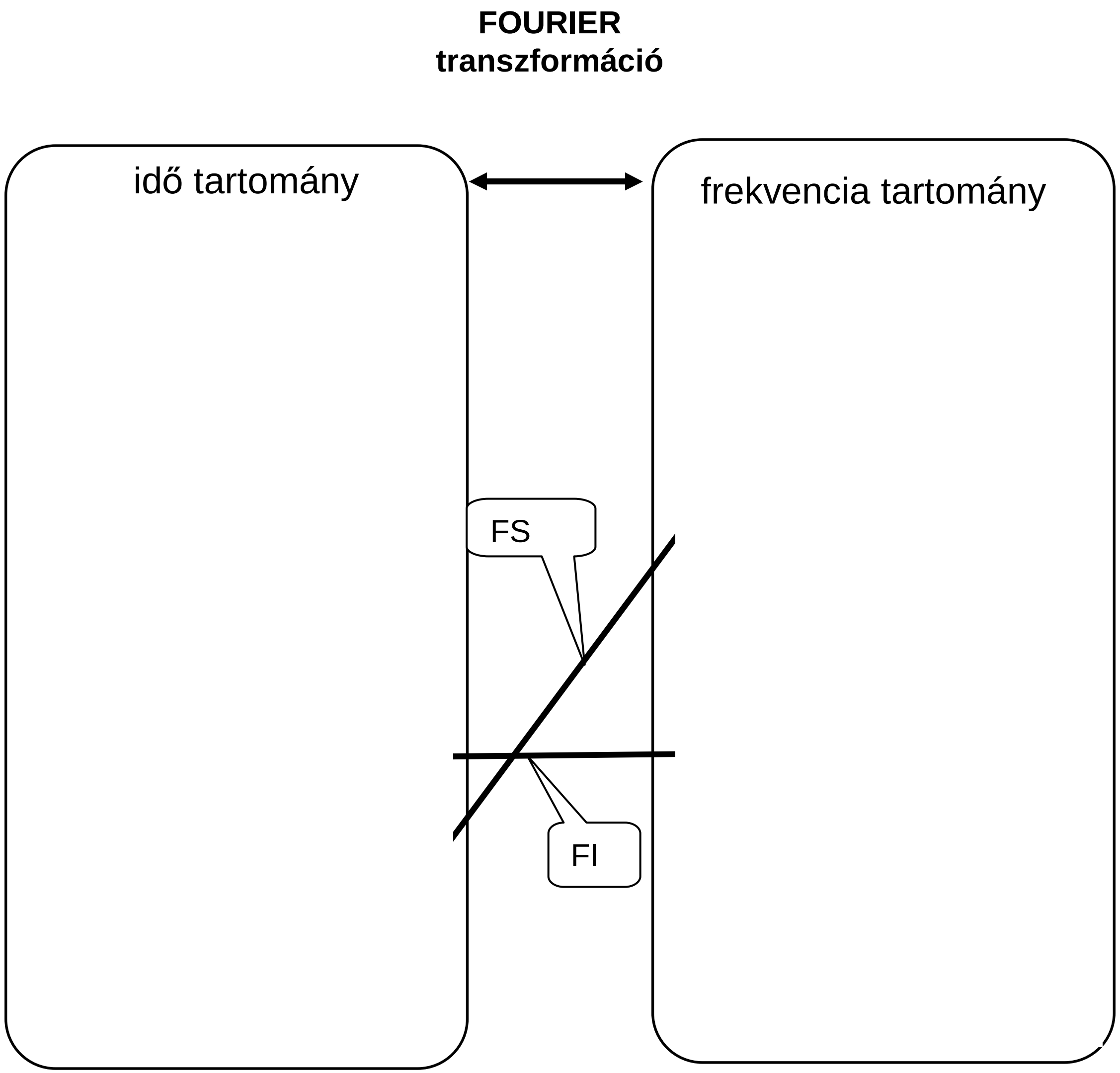
$$y(t) \overset{\mathrm{T}}{\Rightarrow} \mathrm{y_n}, \qquad \mathrm{y_n} = y(t = nT)$$

- Interpolálás:

  Speciális interpoláló függvények
  - négyszög: nulladrendű tartó
  - háromszög: egyenesmenti interpoláció
  - sinc(x): sávhatárolt

$$\mathrm{y_{nT}} \overset{\mathrm{s(t)}}{\Rightarrow} y(t), \qquad \mathrm{y(t)} = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \mathrm{y_n}\, s(t-nT)$$

Fourier transzformáció



FI: Fourier integrál

$$\mathcal{F}\{x(t), f\} = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(f), t\} = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

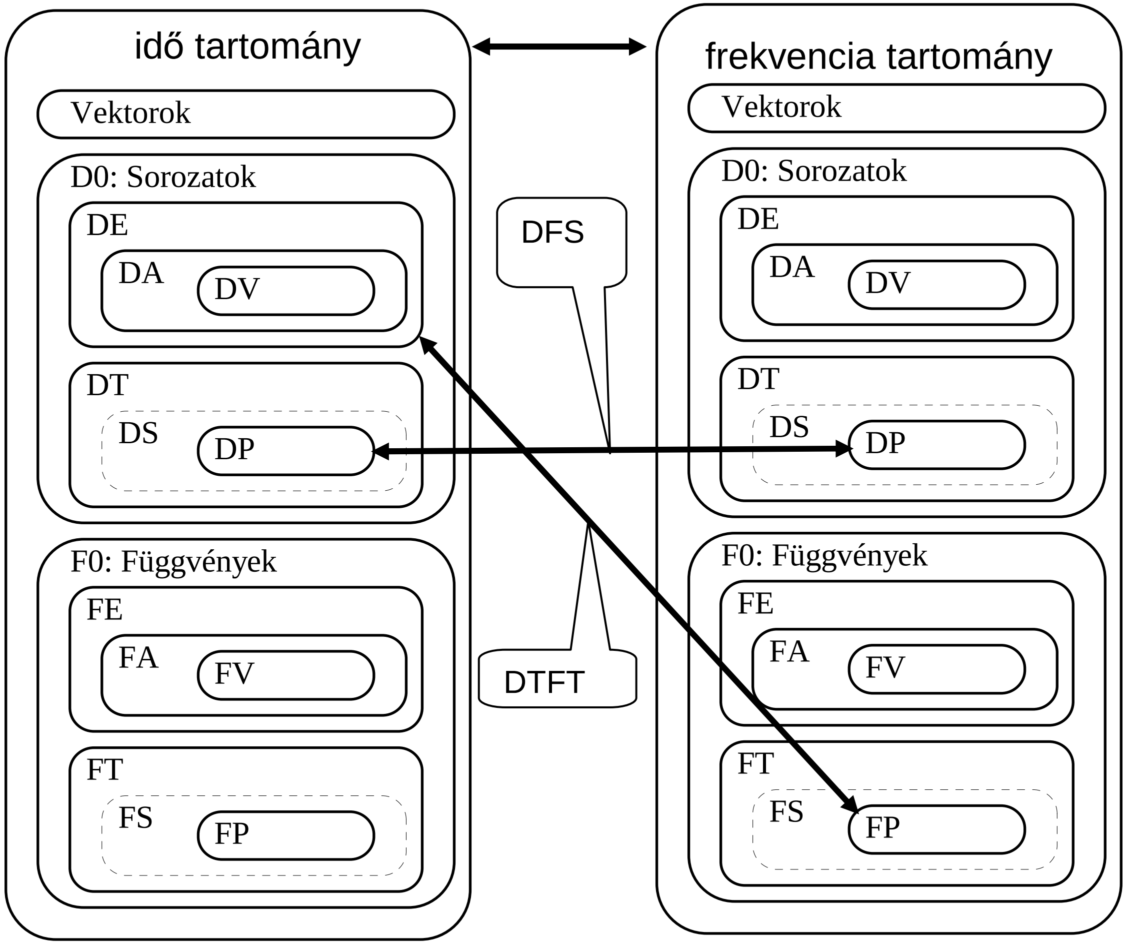
FS: Fourier sor

$$\mathcal{F}^{-1}\{X_{nF}, t\} = \tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi nFt}$$

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t), nF\} = X_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \tilde{x}(t) e^{-j2\pi tnF} dt$$

Fourier transzformáció

FOURIER transzformáció



DTFT: **Diszkrét idejű Fourier transzformáció**

$$F\{x_{nT}, f\} = \tilde{X}_F(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2n\pi\frac{f}{F}}$$

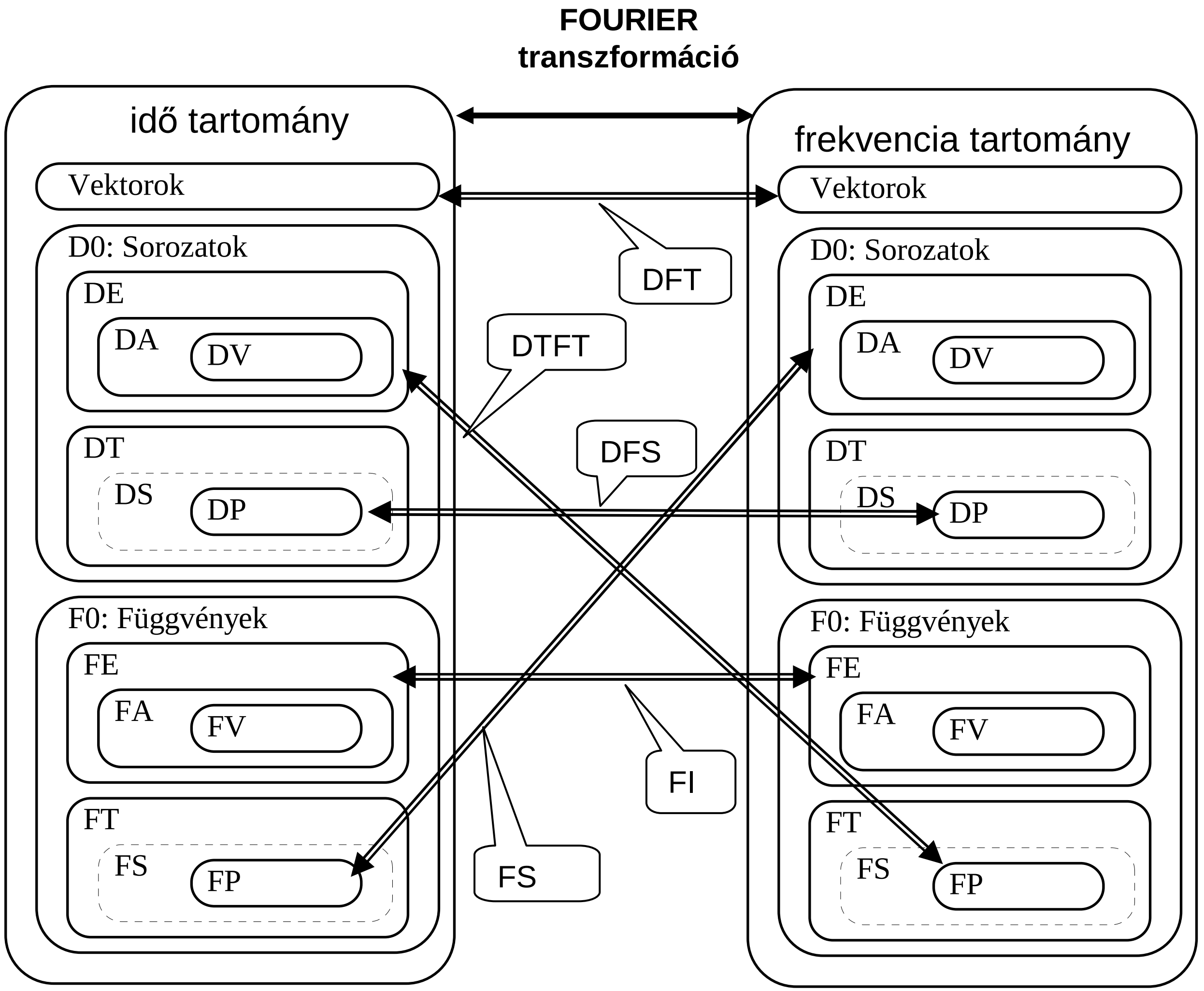
$$F^{-1}\{\tilde{X}_F(f), nT\} = x_n = \frac{1}{F}\int_{f_0}^{f_0+F} \tilde{X}(f) e^{j2n\pi\frac{f}{F}} df$$

DFS: **Diszkrét Fourier sor**

$$F\{\tilde{x}_{nT}, m\} = \tilde{X}_{mF} = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \tilde{x}_{nT} e^{-j2\pi m\frac{n}{N}}$$

$$F^{-1}\{\tilde{X}_{nF}, mT\} = \tilde{x}_{mT} = \frac{1}{N}\sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \tilde{X}_{nF} e^{j2\pi m\frac{n}{N}}$$

Fourier transzformáció



Fourier integrál (FI)

$$x(t) \to X(f)$$

Fourier sor (FS)

$$\tilde{x}(t) \to X_n$$

Diszkrét idejű Fourier transzformáció (DTFT)

$$x_n \to \tilde{X}(f)$$

Diszkrét fourier sor (DFS)

$$\tilde{x}_n \to \tilde{X}_n$$

Diszkrét Fourier transzformáció (DFT, FFT)

$$\underline{x} \to \underline{X}$$

Formális Fourier transzformációk

transzformáció	FI	FS	DTFT	DFS	DFT
input→ output	$x(t) \rightarrow X(f)$	$\tilde{x}(t) \rightarrow X_n$	$\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{X}_n$	$x_n \rightarrow \tilde{X}(f)$	$\underline{x} \rightarrow \underline{X}$

FI: Fourier integrál

$$\boldsymbol{F}\{x(t), f\} = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \qquad \boldsymbol{F}^{-1}\{X(f), t\} = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

FS: Fourier sor

$$\boldsymbol{F}\{\tilde{x}(t), nF\} = X_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \tilde{x}(t) e^{-j2\pi t n F} dt \qquad \boldsymbol{F}^{-1}\{X_{nF}, t\} = \tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$$

DTFT: Diszkrét idejű Fourier transzformáció

$$F\{x_{nT}, f\} = \tilde{X}_F(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2n\pi \frac{f}{F}} \qquad F^{-1}\{\tilde{X}_F(f), nT\} = x_n = \frac{1}{F} \int_{f_0}^{f_0+F} \tilde{X}(f) e^{j2n\pi \frac{f}{F}} df$$

DFS: Diszkrét Fourier sor

$$\boldsymbol{F}\{\tilde{x}_{nT}, m\} = \tilde{X}_{mF} = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \tilde{x}_{nT} e^{-j2\pi m \frac{n}{N}} \qquad \boldsymbol{F}^{-1}\{\tilde{X}_{nF}, mT\} = \tilde{x}_{mT} = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \tilde{X}_{nF} e^{j2\pi m \frac{n}{N}}$$

DFT: Diszkrét Fourier transzformáció (FFT)

$$\boldsymbol{F}\{\underline{x}\} = \underline{X} = \underline{\underline{W}}_N \cdot \underline{x} \qquad \underline{\underline{W}}_N = \left\{ w_N^{kn}, k, n = 0, \ldots N-1 \right\}, w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \qquad \underline{\underline{W}}_N^{-1} = \frac{1}{N} \underline{\underline{W}}_N^{*}$$