Híradástechikai jelfeldolgozás

3. előadás 2015. február 20.

Dr. Gaál József
BME Hálózati Rendszerek és SzolgáltatásokTanszék
gaal@hit.bme.hu

2015. február 20.
Budapest

Fourier transzformáció

transzformáció	FI	FS	DTFT	DFS	DFT
input→ output	$x(t) \to X(f)$	$\tilde{x}(t) \to X_n$	$\tilde{x}_n \to \tilde{X}_n$	$x_n \to \tilde{X}(f)$	$\underline{x} \to \underline{X}$

FI: Fourier integrál

$$\boldsymbol{F}\{x(t), f\} = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \qquad \boldsymbol{F}^{-1}\{X(f), t\} = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

FS: Fourier sor

$$\boldsymbol{F}\{\tilde{x}(t), nF\} = X_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \tilde{x}(t) e^{-j2\pi t n F} dt \qquad \boldsymbol{F}^{-1}\{X_{nF}, t\} = \tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$$

DTFT: Diszkrét idejű Fourier transzformáció

$$F\{x_{nT}, f\} = \tilde{X}_F(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2n\pi \frac{f}{F}} \qquad F^{-1}\{\tilde{X}_F(f), nT\} = x_n = \frac{1}{F} \int_{f_0}^{f_0+F} \tilde{X}(f) e^{j2n\pi \frac{f}{F}} df$$

DFS: Diszkrét Fourier sor

$$\boldsymbol{F}\{\tilde{x}_{nT}, m\} = \tilde{X}_{mF} = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \tilde{x}_{nT} e^{-j2\pi m \frac{n}{N}} \qquad \boldsymbol{F}^{-1}\{\tilde{X}_{nF}, mT\} = \tilde{x}_{mT} = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \tilde{X}_{nF} e^{j2\pi m \frac{n}{N}}$$

DFT: Diszkrét Fourier transzformáció (FFT)

$$\boldsymbol{F}\{\underline{x}\} = \underline{X} = \underline{\underline{W}}_N \cdot \underline{x} \qquad \underline{\underline{W}}_N = \{w_N^{kn}, k, n = 0, \dots N-1\}, w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \qquad \underline{\underline{W}}_N^{-1} = \frac{1}{N} \underline{\underline{W}}_N^{*}$$

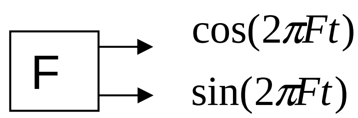
Megjegyzések a Fourier magfüggvényhez

A kétváltozós folytonos Fourier magfüggvény: $$x(f,t)=e^{j2\pi ft}$$

Mint folytonos idő függvény:

f = F frekvenciájú oszcillátor komplex harmónikus jele:

$$x_F(t)=e^{j2\pi Ft}=\cos(2\pi Ft)+j\sin(2\pi Ft)$$

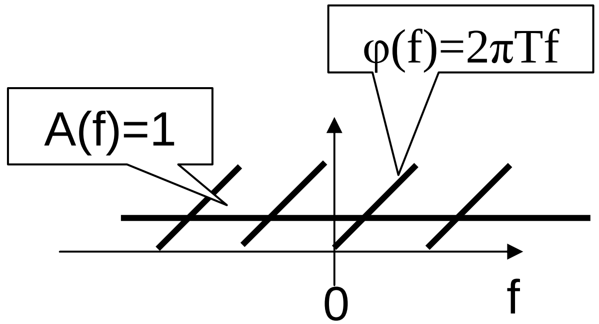


Mint frekvencia függvény:

t = T konstans futási idejű, lineáris fázisú,

konstans amplitúdójú spektrum vagy karakterisztika

$$X_T(f)=e^{j2\pi Tf}=A(f)e^{j\varphi(f)}$$



Az idő és frekvencia tengely koherens diszkretizálása:

- f=mF, t=nT, F.T=1/N
- az N darab N-ed rendű egységgyök kétdimenziós ciklikus sokasága:

$$x_{m,n}=e^{2\pi ft}=e^{j2\pi mFnT}=\left(e^{j\frac{2\pi}{N}}\right)^{nm}$$

Komplex értékű spektrum valós értékű részfüggvényei

Valós- és képzetes rész:

$$X(\mathrm{f}) = R(\mathrm{f}) + \mathrm{j}I(\mathrm{f})$$

Amplitúdó és fázis:

$$X(\mathrm{f}) = A(\mathrm{f})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\mathrm{f})} = \mathrm{e}^{a(f)+\mathrm{j}\varphi(\mathrm{f})}$$

Többértelműség!

Futásiidő spektrum:

$$\tau(\mathrm{f}) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{d}{d\mathrm{f}}\varphi(\mathrm{f})$$

Energia spektrum:

$$\left|X(\mathrm{f})\right|^2 = \left|A(\mathrm{f})\right|^2 = E(\mathrm{f})$$

A Fourier transzformációk tulajdonságai

- Inverz szimmetria
- Konjugált komplex szimmetria
- Eltolás, moduláció
- Szorzás, konvolúció
- Lépték váltás
- Parseval és energia tétel
- Derivált, integrál
- egyéb

A Fourier transzformációk tulajdonságai (2)

- Inverz szimmetria

$$F\{x(t), f\} = X(f)$$

$$F^{-1}\{F\{x(t), f\}, t\} = x(t)$$

$$F\{F^{-1}\{X(f), t\}, f\} = X(f)$$

$$F\{F\{x(t), f\}, t\} = ? \; x(-t)$$

Példa: DFT

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{vmatrix}^2 = ? \; \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Vektor megfordítása: permutáció mátrix

A Fourier transzformációk tulajdonságai (3)

Konjugált komplex szimmetria:

$$F\{x(t), f\} = X(f)$$

$$F\{x^*(t), f\} = X^*(-f)$$

Következmények:

- Valós jel esete: $x^*(t) = x(t) \Longrightarrow X(f) = X^*(-f)$

aplitúdó, valósrész: páros

Fázis, képzetes rész: páratlan

Futási-idő: páros

valós – képzetes, páros páratlan felbontás:

$$x(t) = r(t) + ji(t) \quad = r_e(t) + r_o(t) + ji_o(t) + ji_e(t)$$

$$X(f) = R(f) + jI(f) = R_e(f) + R_o(f) + jI_o(f) + jI_e(f)$$

Sorozatok, vektorok esetén is!

A Fourier transzformációk tulajdonságai (4)

$$F\{x(t), f\} = X(f)$$

- Eltolás, $F\{x(t-T), f\} = e^{-j2\pi Tf} X(f)$

Aplitúdó: változatlan

Fázis: lineáris fázisú tag adódik hozzá

Futási-idő: konstans T adódik hozzá

- moduláció: $F\left\{e^{j2\pi f_0 t} x(t), f\right\} = X(f - f_0)$
- Valós eset: $F\{\cos(2\pi f_0 t) x(t), f\} = \frac{1}{2}\left(X(f - f_0) + X(f + f_0)\right)$

$$F\{\sin(2\pi f_0 t) x(t), f\} = \frac{1}{2j}\left(X(f - f_0) - X(f + f_0)\right)$$

Sorozatok, vektorok esetén is!

A Fourier transzformációk tulajdonságai (5)

$$x_1(t) \Leftrightarrow X_1(f) \qquad x_2(t) \Leftrightarrow X_2(f)$$

- Szorzás, $$F\{x_1(t)x_2(t), f\} = X_1(f) * X_2(f)$$
- Konvolúció, $$F\{x_1(t) * x_2(t), f\} = X_1(f).X_2(f)$$

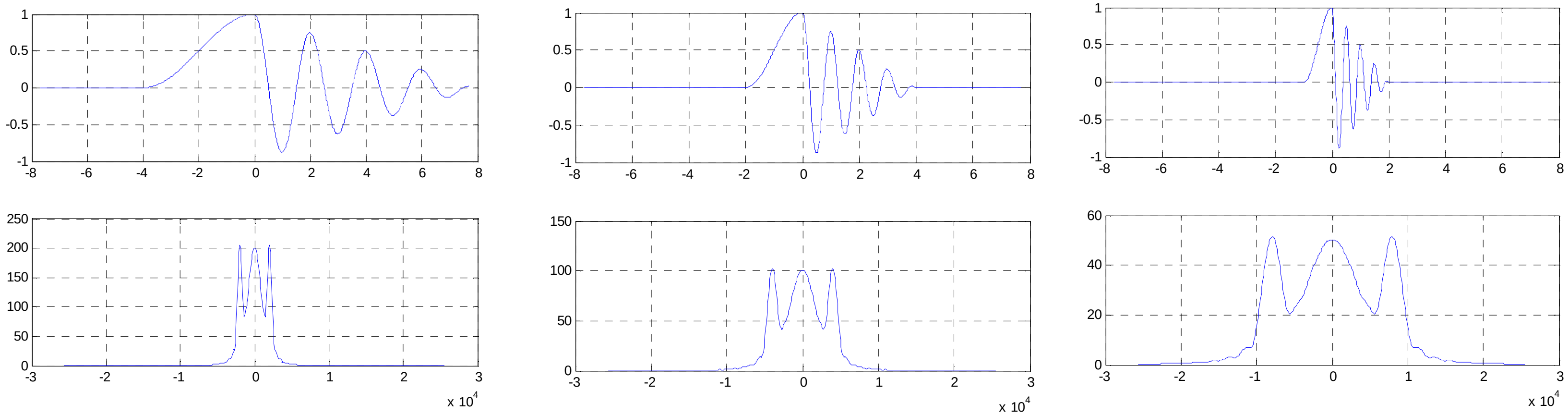
Sorozatok, vektorok esetén is!

- Léptékváltás: $$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$x(t/2) \qquad x(t) \qquad x(2t)$$

Idő:

Frekvencia:



A Fourier transzformációk tulajdonságai (6)

- Parseval
  és energia tétel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\cdot x_2^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f)\cdot X_2^*(f)df$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

DFT esetén: $$|\underline{x}|^2 = \tfrac{1}{N}|\underline{X}|^2$$

- Derivált, integrál:

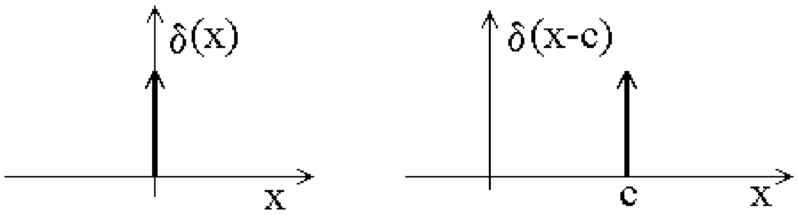
$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \overset{F}{\Leftrightarrow} (j2\pi f)^n X(f) \qquad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$$

- Egyéb:

Egy függvény és Fourier transzformáltja nem lehet egyidejűleg véges tartójú!

Dirac delta, periódikus Dirac delta

$\delta(x)$: olyan valós és integrálható függvény,
amely mindenhol 0 kivéve a 0 helyen, ahol nem korlátos.

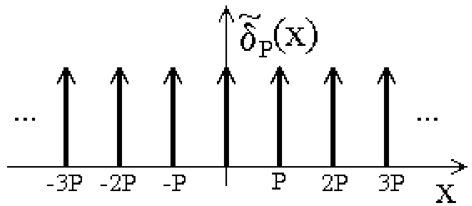


$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

Szorzás: minta kiemelés $y(x)\cdot\delta(x-c) = y(c)\cdot\delta(x-c)$

Konvolúció: eltolás $y(x) * \delta(x-c) = y(x-c)$

Periódikus kiterjesztése: $\tilde{\delta}_P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nP)$



Szorzás: mintavételezés $y(x)\cdot\tilde{\delta}_P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nP)\cdot\delta(x-nP)$

Konvolúció: periódikus kiterjesztés $y(x) * \tilde{\delta}_P(x) = \tilde{y}_P(x)$

Dirac delta és Fourier tranformáció

Idő tartomány: időbeli jel

(Inverz Fourier tr.)

Frekvencia tartomány: Spektrum

(Fourier tr.)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \qquad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df \qquad 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{+j2\pi(t-t_0)f} df \qquad e^{-j2\pi ft_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$e^{j2\pi f_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{+j2\pi ft} df \qquad \delta(f - f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt$$

$$\tilde{\delta}_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} \qquad \frac{1}{T} \tilde{\delta}_F(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi nfT}$$

$$\boxed{\tilde{\delta}_T(t) \Leftrightarrow \frac{1}{T} \tilde{\delta}_F(f)}$$

Fontos tények:

- szorzás $\tilde{\delta}_P(x)$ -val = mintavételezés
- konvolúció $\tilde{\delta}_P(x)$ -val = periódikus kitrjesztés

Szorzás	Fourier tr.	Konvolúció
Konvolúció	Fourier tr.	Szorzás
$\tilde{\delta}_P(x)$	Fourier tr.	$\tilde{\delta}_P(x)$

mintavételezés	Fourier tr.	periódikus kiterjesztés
periódikus kiterjesztés	Fourier tr.	mintavételezés