Híradástechikai jelfeldolgozás

4. előadás 2015. február 27.

Dr. Gaál József
BME Hálózati Rendszerek és SzolgáltatásokTanszék
gaal@hit.bme.hu

2015. február 27.
Budapest

Egységes Fourier transzformáció

- Fourier sor (FS) → Fourier integrál
- Diszkrét idejű F. transzformáció (DTFT) → Fourier integrál
- Diszkrét F. sor (DFS) → Fourier integrál
- Diszkrét Fourier transzformáció (DFT) → Fourier integrál

Jel műveletek összefoglalás

Művelet	Időtartomány	Frekvenciatartomány
Lineár kombináció	Lineár kombináció	Lineár kombináció
Modulálás, keverés	Szorzás (vivővel)	Konvolúció (eltolás)
Ablakolás (időben)	Szorzás (ablakkal)	Konvolúció (elkenődés, áttevődés)
Szűrés	Konvolúció (tranziensek)	Szorzás (ablakkal)
Mintavételezés	Szorzás (Dirac δ sorozatal)	Periódikus kiterjesztés
Interpolálás	Kovolúció (elemi jelalak)	Szorzás (ablakolás)
Spektrum mintavételezés	Periódikus kiterjesztés	Szorzás (Dirac δ sorozatal)

Z-transzformáció

sorozat x_n $\xleftrightarrow{\text{z-transzformáció}}$ analitikus függvény $X(z)$

Formális definició: $\mathcal{Z}\{x_n, z\} = X(z), z \in R$ $\qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$

Egzisztencia vizsgálat:

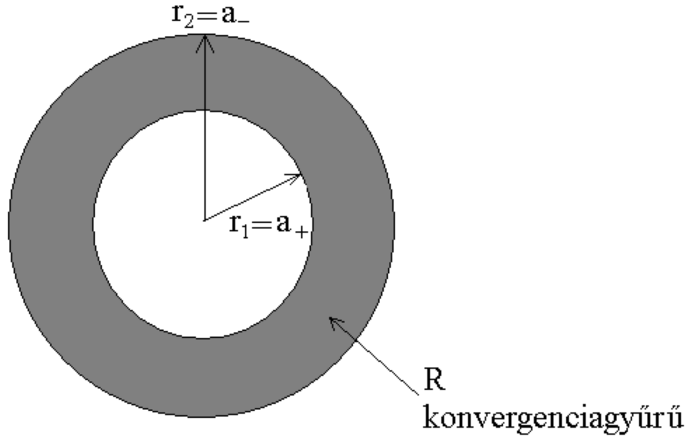
- Sor összeg akkor létezik, ha a sor abszolút összegezhető

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty} x_{-m} z^{m} + \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$$

- konvergencia sugarak

$$|z| > \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = a_+ \qquad |z| < \frac{1}{\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|x_{-m}|}} = a_-$$

- konvergencia gyűrű
  - speciális esetek:
    - belépő jel
    - csak múlttal rendelkező jel



Inverz Z-transzformáció

Laurent sorfejtés: minden R körgyűrű felett analitikus X(z) függvény egyértelmű és konvergens hatványsorba fejthető:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$$

A Laurent sorfejtés együtthatói, mint számsorozat, az inverz Z-transzformáió eredménye:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z), z \in R\} = x_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c \in R} X(z) \cdot z^{n-1} dz, \quad n = -\infty \ldots \infty$$

Számítás residuumokkal:

Ha az X(z) függvény reguláris a konvergencia sugarakon belüli körön– a belsejében lévő véges számú z_1, z_2,..., z_n szinguláris pont kivételével, akkor:

$$\boxed{x_n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_i}\{X(z) \cdot z^{n-1}\}}$$

Komplex függvénytani emlékeztető

- A H(z) komplex függvénynek a $z_0 \in R$ *izolált szinguláris pont*ja, ha H(z) a z_0 pont (egy "átszúrt") környezetében reguláris (vagyis Laurent sorba fejthető).

- Ha létezik a $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m H(z) = A < \infty$ véges határérték, akkor z_0-t

  a H(z) *megszüntethető* izolált szingularitási pontjának nevezzük.

- A H(z) függvény a $z = z_0$ izolált szingularitási pontja körüli Laurent sorának –1-edik együtthatóját a H(z) függvény z_0 ponthoz tartozó *residuum*ának nevezzük:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}\{H(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c \in R} H(z)\,dz$$

ahol *c* olyan pozitív körüljárású rektifikálható Jordan görbe, amely benne van a $z=z_0$ pont átszúrt környezetében.

Komplex függvénytani emlékeztető

Ha a z = $z_0 \neq \infty$ pont a H(z) függvény *m*-edrendű pólusa, akkor

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}\{H(z)\} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\left(z-z_0\right)^m \cdot H(z)\right]$$

A Z-transzformáció tulajdonságai

Linearitás $$\sum_i \lambda_i \cdot x_n^{(i)} \xleftrightarrow{z} \sum_i \lambda_i \cdot X^{(i)}(z)$$

Eltolás $$x_{n-n_0} \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} \cdot X(z)$$

Megfordítás $$x_{-n} \xleftrightarrow{z} X(1/z)$$

Konjugálás $$x_n^* \xleftrightarrow{z} X^*(z^*)$$

Szorzás exponencális sorozattal $$a^n \cdot x_n \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{a}\right)$$

A Z-transzformáció tulajdonságai

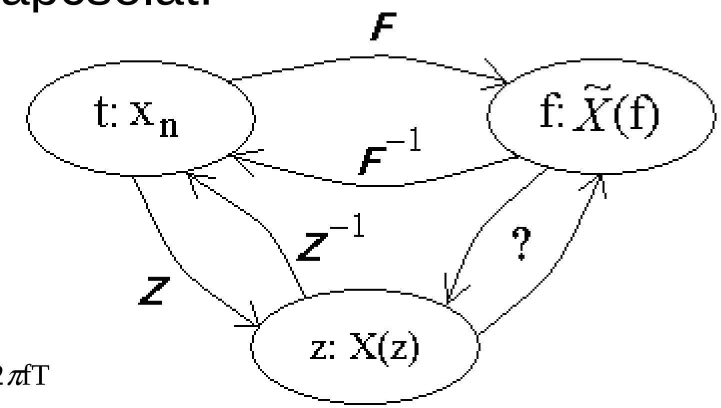
Konvolúció – szorzás:

$$x_n * y_n \xleftrightarrow{Z} X(z)\cdot Y(z)$$

Szorzás – (komplex)konvolúció:

$$x_n \cdot y_n \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{2\pi j}\cdot \oint_{c\in R_x \cap R_y} X(\nu)\cdot Y(z/\nu)\cdot \nu^{-1} d\nu$$

A Z-transzformáció és a a DTFT közötti kapcsolat:



Kontúrfüggvény:

$$\tilde{X}(f) = X(z)\Big|_{z=e^{j2\pi fT}}$$

Analitikus kiterjesztés:

egységkörön analitikus valós fv. $\longrightarrow$ körgyűrűn analitikus komplex fv.

Inverz Z-transzformáció

- Általános
  - Kontúr integrál

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z), z \in R\} = x_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c \in R} X(z) \cdot z^{n-1} dz, \quad n = -\infty \ldots \infty$$

  - Residuum számítás

$$\boxed{x_n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_i} \{X(z) \cdot z^{n-1}\}}$$

- Racionális tört esetén
  - Residuum számítás speciális esete
  - Parciális törtekre bontás
  - Polinom osztás

Racionális tört inverz Z-transzformáltja

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_M z^M + a_{M-1} z^{M-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \ldots + b_1 z + b_0}$$

$$A(z) = \sum_{i=0}^{M} a_i \cdot z^i = a_M \cdot \prod_{i=1}^{M} (z - z_i)$$

$$B(z) = \prod_{j=1}^{N} (z - z_j)$$

$$\boxed{x_n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_i} \left\{ \frac{A(z)}{B(z)} \cdot z^{n-1} \right\}}$$

Egyszeres pólus esetén:

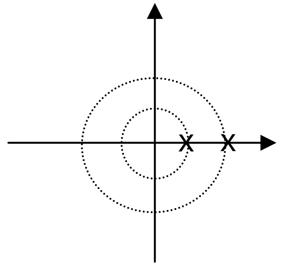
$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \left\{ \frac{A(z)}{B(z)} \right\} = \left. \frac{A(z)}{B'(z)} \right|_{z=z_0} \qquad B'(z) = \frac{dB(z)}{dz}$$

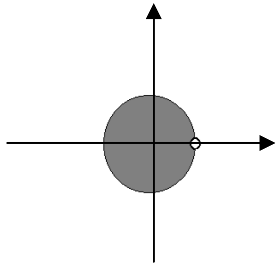
m-szeres pólus esetén:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \left\{ \frac{A(z)}{B(z)} \right\} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m \cdot \frac{A(z)}{B(z)} \right]$$

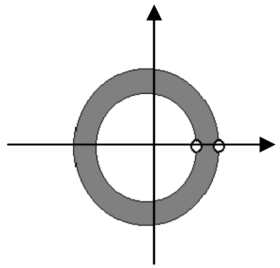
Példa

$$X(z)=\frac{z+1}{z^2-2{,}5z+1}=\frac{z+1}{(z-2)\cdot(z-0{,}5)}$$

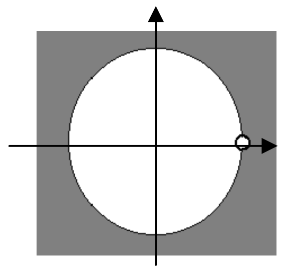




$$x_n^{(1)}=\operatorname*{res}_{z=0}\left\{\frac{(z+1)\cdot z^n}{(z^3-2{,}5z^2+z)}\right\}$$



$$x_n^{(2)}=x_n^{(1)}+\operatorname*{res}_{z=0.5}\left\{\frac{(z+1)\cdot z^n}{(z^3-2{,}5z^2+z)}\right\}$$



$$x_n^{(3)}=x_n^{(2)}+\operatorname*{res}_{z=2}\left\{\frac{(z+1)\cdot z^n}{(z^3-2{,}5z^2+z)}\right\}$$