Híradástechikai jelfeldolgozás

4. előadás:

Inverz Z-transzformáció,

Diszkrét idejű input-output rendszerek

2015. március 2.

Dr. Gaál József

BME Hálózati Rendszerek és SzolgáltatásokTanszék

gaal@hit.bme.hu

2015. március 3.
Budapest

Inverz Z-transzformáció

- Általános
  - Kontúr integrál

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z), z \in R\} = x_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c \in R} X(z) \cdot z^{n-1} dz, \quad n = -\infty \ldots \infty$$

  - Residuum számítás

$$\boxed{x_n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}_{z=z_i}\{X(z) \cdot z^{n-1}\}}$$

- Racionális tört esetén
  - Residuum számítás speciális esete
  - Parciális törtekre bontás
  - Polinom osztás

Racionális tört inverz Z-transzformáltja

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_M z^M + a_{M-1} z^{M-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \ldots + b_1 z + b_0}$$

$$A(z) = \sum_{i=0}^{M} a_i \cdot z^i = a_M \cdot \prod_{i=1}^{M} (z - z_i)$$

$$B(z) = \prod_{j=1}^{N} (z - z_j)$$

$$\boxed{x_n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_i} \{ \frac{A(z)}{B(z)} \cdot z^{n-1} \}}$$

Egyszeres pólus esetén:

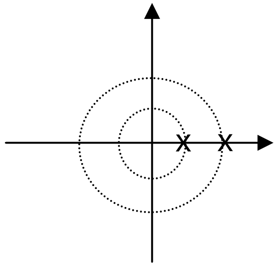
$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \left\{ \frac{A(z)}{B(z)} \right\} = \left. \frac{A(z)}{B'(z)} \right|_{z=z_0} \qquad B'(z) = \frac{dB(z)}{dz}$$

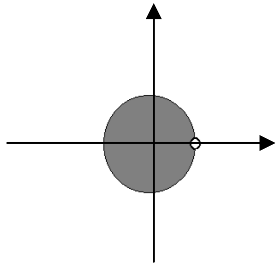
m-szeres pólus esetén:

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \left\{ \frac{A(z)}{B(z)} \right\} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m \cdot \frac{A(z)}{B(z)} \right]$$

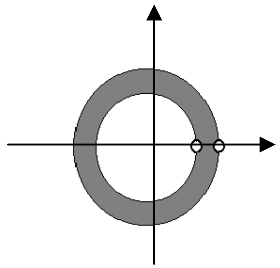
Példa

$$X(z)=\frac{z+1}{z^2-2{,}5z+1}=\frac{z+1}{(z-2)\cdot(z-0{,}5)}$$

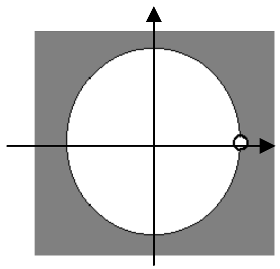




$$x_n^{(1)}=\operatorname*{res}_{z=0}\left\{\frac{(z+1)\cdot z^n}{(z^3-2{,}5z^2+z)}\right\}$$



$$x_n^{(2)}=x_n^{(1)}+\operatorname*{res}_{z=0.5}\left\{\frac{(z+1)\cdot z^n}{(z^3-2{,}5z^2+z)}\right\}$$

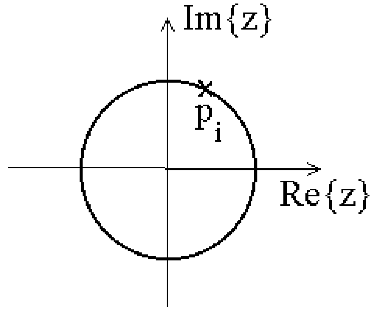


$$x_n^{(3)}=x_n^{(2)}+\operatorname*{res}_{z=2}\left\{\frac{(z+1)\cdot z^n}{(z^3-2{,}5z^2+z)}\right\}$$

Hatványsor és egy pólus

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \bigg|_{|q|<1} = \frac{1}{1-q}$$

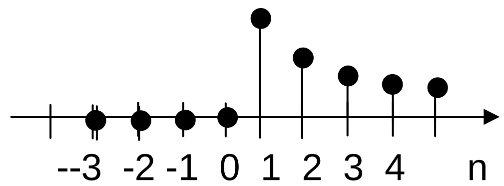
$$X(z) = \frac{r_i}{z-p_i}$$



$$\mathbf{Z}^{-1}\left\{\frac{r_i}{z-p_i}, |z| > |p_i|\right\} = \mathbf{Z}^{-1}\left\{\frac{r_i}{p_i}\cdot\frac{\frac{p_i}{z}}{1-\frac{p_i}{z}}, \left|\frac{p_i}{z}\right| < 1\right\}$$

$$= \frac{r_i}{p_i}\cdot \mathbf{Z}^{-1}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p_i}{z}\right)^n\right\} = \begin{cases}\left(\frac{r_i}{p_i}\right)\cdot p_i^n, \text{ha n} > 0 \\ 0, \quad \text{ha n} \le 0\end{cases}$$

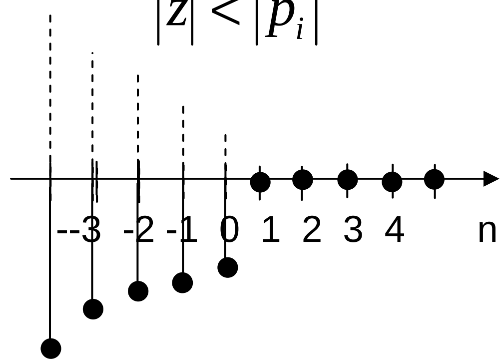
$|z| > |p_i|$



$$\mathbf{Z}^{-1}\left\{\frac{r_i}{z-p_i}, |z| < |p_i|\right\} = Z^{-1}\left\{\left(-\frac{r_i}{p_i}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{p_i}}, \left|\frac{z}{p_i}\right| < 1\right\}$$

$$= \left(-\frac{r_i}{p_i}\right)\cdot \mathbf{Z}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{p_i}\right)^n\right\} = \begin{cases}\left(-\frac{r_i}{p_i}\right)\cdot p_i^{-n}, \text{ha n} \le 0 \\ 0, \quad \text{ha n} > 0\end{cases}$$

$|z| < |p_i|$



Parciális törtekre bontás

Egyszeres pólusok esetén

$$X(z)=\frac{A(z)}{B(z)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{r_i}{z-p_i} \qquad r_i=\underset{z=p_i}{\mathrm{res}}\left\{X(z)\right\}=\frac{A(p_i)}{B'(p_i)}$$

Konjugált komplex póluspár esete:

$$x_n^{(1)}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\left(\frac{r}{z-p}+\frac{r^*}{z-p^*}\right),|z|>|p|\right\}=\begin{cases}\frac{r}{p}\cdot p^n+\frac{r^*}{p^*}\cdot\left(p^*\right)^n, & \text{ha } n>0\\ 0, & \text{ha } n\le 0\end{cases}$$

Legyen $p=a\cdot e^{j\varphi}$ és $r=b\cdot e^{j\gamma}$

$$x_{n,}^{(1)}=\frac{r\cdot p^*\cdot p^n+r^*\cdot p\cdot\left(p^*\right)^n}{|p|^2}=\quad\ldots$$

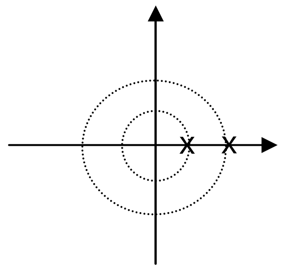
$$\ldots\quad=\frac{b}{a}\cdot a^n\cdot\left(e^{j(n\varphi-\varphi+\gamma)}+e^{-j(n\varphi-\varphi+\gamma)}\right)=2ba^{n-1}\cos\left(n\varphi+\gamma-\varphi\right)$$

Exponenciális amplitúdójú, f frekvenciájú szinusz T-vel mintavételezve:

$$n\varphi=2\pi fnT\ \Rightarrow\ f=\frac{\varphi}{2\pi}F\ ,\ F=\frac{1}{T}$$

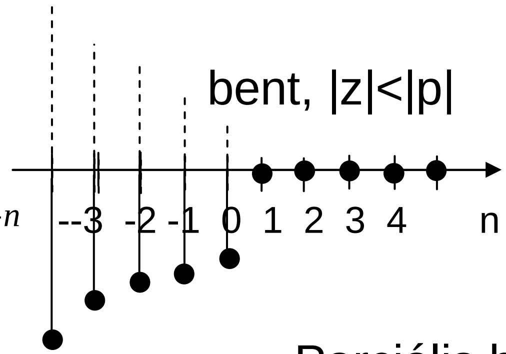
Példa

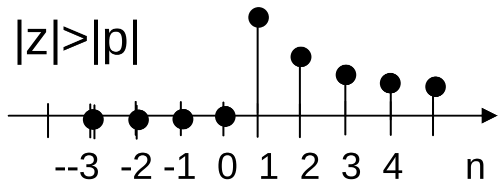
$$X(z)=\frac{z+1}{z^2-2{,}5z+1}=\frac{z+1}{(z-2)\cdot(z-0{,}5)}=\frac{2}{(z-2)}-\frac{1}{(z-0{,}5)}$$



Az egyes pólusok (parciális) hatásai:

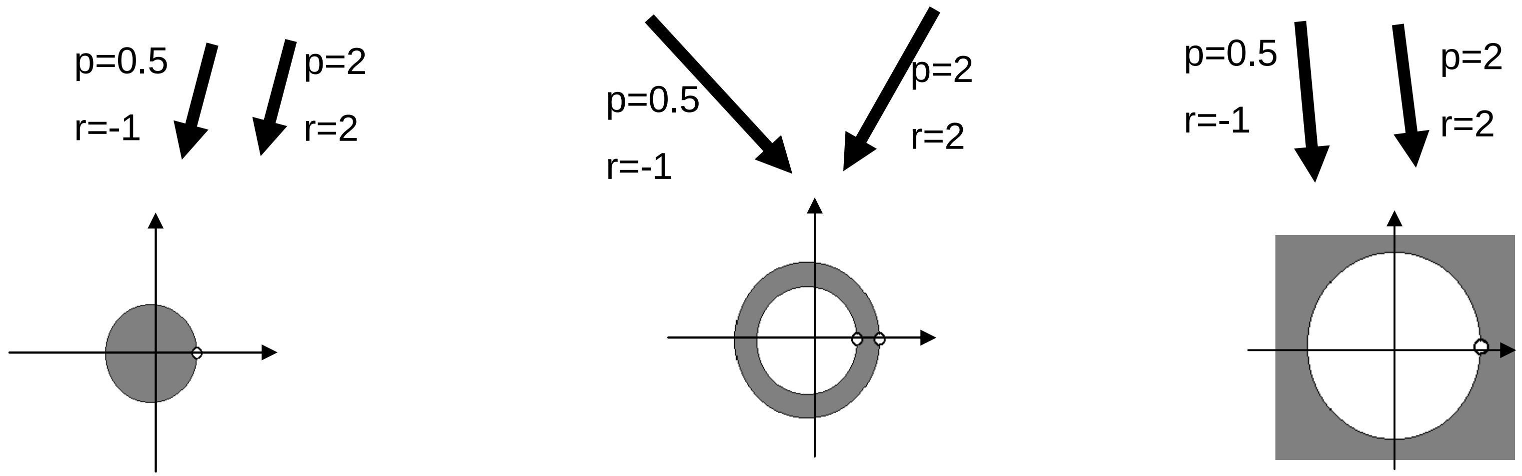
$$\left(-\frac{r_i}{p_i}\right)\cdot p_i^{-n}$$





$$\left(\frac{r_i}{p_i}\right)\cdot p_i^{n}$$

Parciális hatások összeválogatása:



Polinom osztás

$$X(z) = \frac{z+1}{z^2 - 2{,}5z + 1} \qquad = \frac{1+z}{1 - 2{,}5z + z^2}$$

$(z+1) : (z^2 - 2{,}5z + 1) = \quad z^{-1} - 3{,}5z^{-2} - 9{,}75\, z^{-3} \; \ldots$

$z - 2{,}5 + z^{-1}$

z = ∞hez tartozó sorfejtés

$-3{,}5 - z^{-1}$

$-3{,}5 + 8{,}75\, z^{-1} - z^{-2}$

$- 9{,}75\, z^{-1} + z^{-2}$

$(1+z) : (1 - 2{,}5z + z^2) = \quad 1 \quad + 3{,}5z \; \ldots$

$(1 - 2{,}5z + z^2)$

z = 0-hoz tartozó sorfejtés

$3{,}5z - z^2$

Tartalom

- A híradástechnikai jelfeldolgozás két alap modellje:
  - Analóg jel átvitele digitális csatornán
  - Digitális jel átvitele analóg csatornán
- Jel-, rendszer- és hálózatelméleti összefoglalás
  - Jelek
  - Rendszerek
  - Hálózatok
- Véletlen jelek
- Sebességkonverziós jelfeldolgozás
- Jeldigitalizálás és rekonstrukció
- Modemek

Rendszer

Rendszer: {bemeneti jeltér} $\rightarrow$ {kimeneti jeltér}

$$
\begin{array}{c} x_{nT_1} \\ \tilde{X}_{F_1}(f) \\ X(z_1) \end{array}
\longrightarrow \boxed{\text{RENDSZER}} \longrightarrow
\begin{array}{c} y_{nT_2} \\ \tilde{Y}_{F_2}(f) \\ Y(z_2) \end{array}
$$

Rendszeregyenlet:

$$R_t\{x_{mT1}\} = y_{nT2}$$

$$R_f\{X(f)\} = Y(f)$$

$$R_z\{X(z_1)\} = Y(z_2)$$

Rendszer jellemzők

Rendszerek

Tulajdonságok, rendszer osztályok:

Lineáris↔nemlineáris

memóriamentes↔memóriás

Invariáns↔Variáns

Valós↔komplex

Kauzális↔nem kauzális

Stabil↔Labilis

FIR↔IIR

lineáris fázisú↔nem lineáris fázisú

ARMA↔nem ARMA

minimál fázisú↔nem minimál fázisú

Lineáris rendszer

Definició: Lineáris a **rendszer**, ha a rendszer által megvalósított leképezés homogén és additív

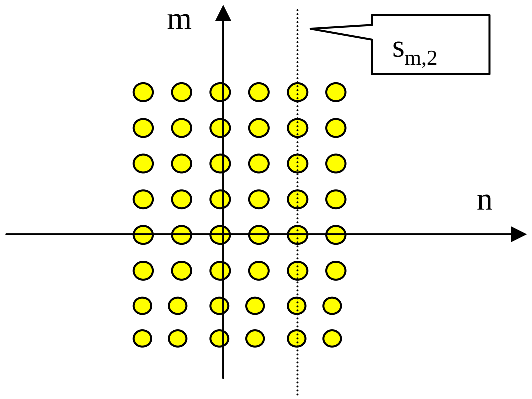
Pl. az idő tartományban: $\boldsymbol{R}\left\{\sum_i \lambda_i \mathrm{x}_\mathrm{m}^{(i)}\right\} = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{R}\left\{\mathrm{x}_\mathrm{m}^{(i)}\right\}$

Az időtartományi rendszer egyenlet:

$$\boxed{\mathrm{y}_\mathrm{m} = R\{\mathrm{x}_\mathrm{n}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{s}_{\mathrm{m,n}} \cdot \mathrm{x}_\mathrm{n}}$$

ahol a rendszer jellemző:

$$\mathrm{s}_{\mathrm{m,n}} = R\{\delta_{\mathrm{k-n}}\}, \mathrm{n}, \mathrm{m} = -\infty \ldots \infty$$



Lineáris rendszer

A frekvencia tartományi rendszer egyenlet:

$$\boxed{\widetilde{Y}_{F_2}(f_2) = T_1 \cdot \int_0^{F_1} S(-f_1, f_2) \cdot \widetilde{X}_{F_1}(f_1)\, df_1}$$

ahol a rendszer jellemző:

$$S(f_1, f_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{m,n} e^{-j2\pi(nf_1T_1 + mf_2T_2)}$$

$$= \mathcal{F}_m\{\mathcal{F}_n\{s_{m,n}, f_1\}, f_2\}$$

Az operátor (z) tartományi rendszer egyenlet:

$$\boxed{Y(z_2) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c S(z_1^{-1}, z_2) \cdot X(z_1) \cdot z_1^{-1} dz_1}$$

ahol a rendszer jellemző kétdimenziós Z-transzformált:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{m,n} \cdot z_1^{n} \cdot z_2^{-m} = S(z_1^{-1}, z_2)$$

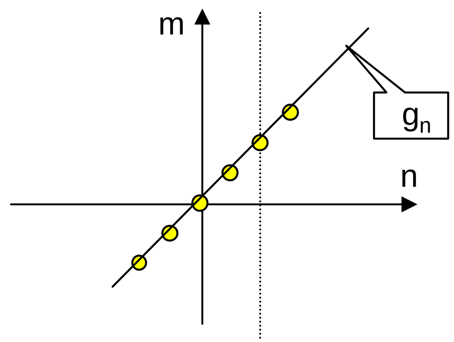
Memóriamentesség

<u>Definíció az időtartományban:</u> **Memóriamentes** a rendszer, ha a kimenőjel m-edik időpontban vett értéke csak a bemenet m-edik időpontbeli értékétől függ:

$$y_m \equiv R\left(x_n, n = -\infty\ldots\infty\right) = R\left(x_n, n = m\right)$$

Lineáris és memóriamentes:

$$s_{m,n} = \begin{cases} g_n, & \text{ha } m = n \\ 0, & \text{ha } m \neq n \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{m,n} \cdot x_n = g_m \cdot x_m}$$



$$\boxed{\tilde{Y}(f) = F_1 \int_0^{F_1} G(\varphi) \cdot \tilde{X}(f-\varphi)\,d\varphi = G(f) * \tilde{X}(f)}$$

$$\boxed{Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c G(\nu) \cdot X\left(\frac{z}{\nu}\right) \cdot \nu^{-1} d\nu = G(z) * X(z)}$$