

# Híradástechikai jelfeldolgozás

*7. előadás:*
*FIR, ARMA rendszerek*

*2015. március 13.*

Dr. Gaál József
BME Hálózati Rendszerek és SzolgáltatásokTanszék
gaal@hit.bme.hu

2015. március 13.
Budapest

# Rendszerek

## Tulajdonságok, rendszer osztályok:

Lineáris↔nemlineáris ✓

memóriamentes↔memóriás ✓

Invariáns↔Variáns ✓

Valós↔komplex ✓

Kauzális↔nem kauzális ✓

Stabil↔Labilis ✓

FIR↔IIR

lineáris fázisú↔nem lineáris fázisú

ARMA↔nem ARMA

minimál fázisú↔nem minimál fázisú

# FIR, IIR

- FIR:
  - Véges tartójú bemenetre véges tartójú válasz

- Lineáris, invariáns, FIR (szűrők):
  - polinom, zérusok, gyöktényezők
  - amplitúdó és fáis karakterisztika (frekvencia szelektivitás)
  - gyöktényezők amplitúdó- és fázis karakterisztika összetevői
  - gyökinverzió hatásai
  - minimál fázis
  - lineáris fázis

# Lineáris, invariáns, FIR

$x_n \rightarrow \boxed{h_n} \rightarrow y_n$

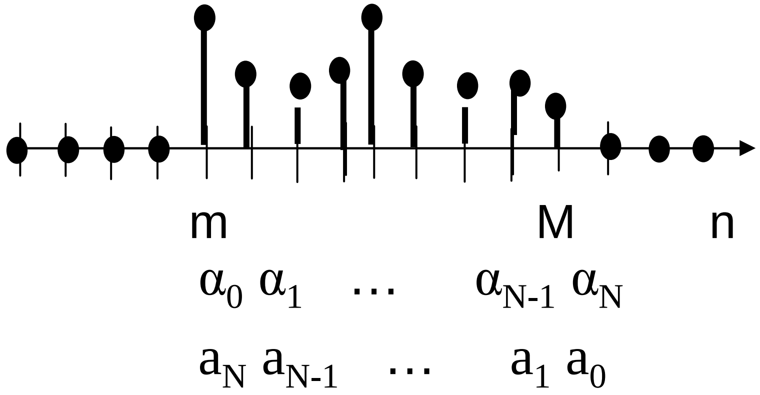
$\mathcal{X}(f)\;\; X(z) \qquad \mathcal{H}(f)\;\; H(z) \qquad \mathcal{Y}(f)\;\; Y(z)$

$y_n = h_n * x_n$

$\mathcal{X}(f) = \mathcal{H}(f)\, \mathcal{X}(f)$

$Y(z) = H(z)\, X(z)$

$$h_n = \begin{cases} 0, & n < m \\ h_n = \alpha_{n-m} = a_{M-n}, & m \le n \le M = n + N \\ 0, & n > M = m + N \end{cases}$$




$$H(z) = h_m z^{-m} + h_{m+1} z^{-(m+1)} + \ldots + h_M z^{-M} =$$

$$= z^{-m}\left(\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \ldots + \alpha_N z^{-N}\right) = z^{-m}\alpha(z^{-1}) \;\; = z^{-m}\alpha_0\left(1 - \frac{q_1}{z}\right)\left(1 - \frac{q_2}{z}\right)\ldots\left(1 - \frac{q_N}{z}\right)$$

$$= z^{-M}\left(a_0 + a_1 z^{1} + \ldots + a_N z^{N}\right) = z^{-M}A(z) \qquad = z^{-M} a_n (z - q_1)(z - q_2)\ldots(z - q_N)$$

# FIR rendszer (frekvencia tart.)

FIR rendszer zérus elrendezése és amplitúdó- és fáziskarakterisztikája közötti kapcsolat:

$$H(z = e^{j2\pi fT}) = H(f) = A(f)\cdot e^{j\varphi(f)} \qquad A(f) = \left|H(f)\right| \qquad \varphi(f) = \mathrm{arc}\left(H(f)\right)$$

$$H(z) = z^{-M} a_M A(z) = z^{-M} a_M \prod_k (z - q_k)$$

$$A(f) = \left|H\left(z = e^{j2\pi fT}\right)\right| = \left|a_M\right|\cdot\left|e^{j2\pi fT} - q_1\right|\cdot\left|e^{j2\pi fT} - q_2\right|\cdot\ldots\cdot\left|e^{j2\pi fT} - q_M\right|$$

$$\varphi(f) = \mathrm{arc}\left(a_M\right) - 2\pi\, MTf + \sum_{i=1}^{M} \mathrm{arc}\left(e^{j2\pi fT} - q_i\right)$$

# FIR rendszerek

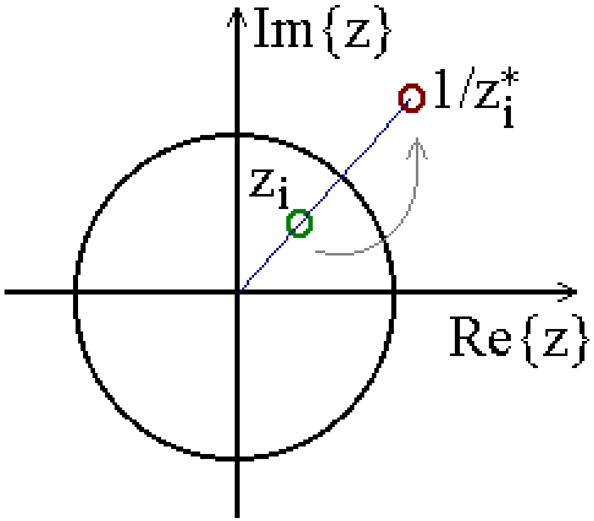
Gyökinverzióra vonatkozó invariancia:

A FIR rendszerek amplitúdó karakterisztikája a gyökinverzió esetén (egy konstans szorzótól eltekintve) nem változik.

$$\mathrm{H}_1(z) = \alpha(z) = (z - q)\cdot\alpha'(z)$$

$$\mathrm{H}_2(z) = (z - 1/q^*)\cdot\alpha'(z)$$

$$\left|\mathrm{H}_1(z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}})\right| \overset{?}{=} K\cdot\left|\mathrm{H}_2(z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}})\right|$$




$$K = |z_i|$$

# FIR rendszerek

Gyökinverzióra vonatkozó invariancia:

A FIR rendszerek amplitúdó karakterisztikája a gyökinverzió esetén (egy konstans szorzótól eltekintve) nem változik.

$$\mathrm{H}_1(z) = \alpha(z) = (z - q)\cdot\alpha'(z)$$

$$\mathrm{H}_2(z) = (z - 1/q^*)\cdot\alpha'(z)$$

$$\left|\mathrm{H}_1(z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f T})\right| \overset{?}{=} K\cdot\left|\mathrm{H}_2(z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f T})\right|$$

---

$$\frac{A_1(f)}{A_2(f)} = \frac{\left|e^{j2\pi fT} - q\right|}{\left|e^{j2\pi fT} - 1/q^*\right|} = \frac{\overline{FQ}}{\overline{FP}} = r = \left|z_i\right|$$

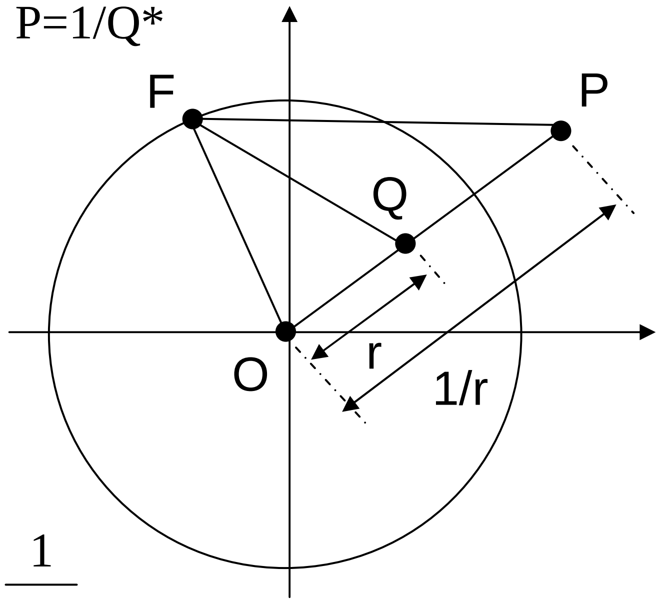
$$\frac{1}{r} = \frac{\overline{FO}}{\overline{Q0}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{F0}} = \frac{1/r}{1}$$

$$\frac{\overline{FQ}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{PO}} = \frac{1}{1/r}$$

$$\boxed{\mathrm{FQO}\ \Delta \ \approx\ \mathrm{PFO}\ \Delta}$$

$F=e^{j2\pi fT}$

$P=1/Q^*$



# ARMA rendszer

Definició (az operátor tartományban)

- lineáris és invariáns rendszer, amelynek H(z) átviteli függvénye racionális törtfüggvény

$$H(z) = \frac{z^{-m}\,\alpha(z^{-1})}{\beta(z^{-1})} = \frac{\sum_{i=m}^{M} \alpha_{m-i} z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} \beta_i z^{-i}} = \frac{z^{-m} \sum_{i=0}^{M-m} \alpha_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} \beta_i z^{-i}}$$

$\alpha_i$ : mozgó átlagú (MR) együtthatók

$\beta_i$ : autoregressziós (AR) együtthatók

$\beta_0 = 1$, $N \geq 0$, $M \geq m$.

$$H(z) = z^{N-M} \frac{A(z)}{B(z)} = z^{N-M} \frac{\sum_{j=0}^{M-m} a_j z^j}{\sum_{i=0}^{N} b_i z^i}$$

$N \geq 0$, $M \geq m$

ahol $b_i = \beta_{N-i} / \beta_N$ , $i = 0 \ldots N$ és $a_i = \alpha_{N-i} / \beta_N$ , $i = 0 \ldots (M-m)$

# ARMA rendszer (operátor tart.)

Pólusok, zérusok:

$$H(z) = z^{N\text{-}M}\frac{A(z)}{B(z)} = z^{N\text{-}M}\frac{a_M}{b_N}\frac{\cdot\prod_{i=1}^{M}(z-q_i)}{\cdot\prod_{j=1}^{N}(z-p_j)}$$

$$H(z) = \frac{\alpha(z^{-1})}{\beta(z^{-1})} = \alpha_0\frac{\cdot\prod_{i=1}^{M}(1-q_i\cdot z^{-1})}{\prod_{j=1}^{N}(1-p_j\cdot z^{-1})}$$

# ARMA rendszer (időtartomány)

ARMA szűrő időtartományi rendszer egyenlete

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=m}^{M} \alpha_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} \beta_i z^{-i}} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{N} \beta_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=m}^{M} \alpha_i z^{-i} X(z)$$

$\beta_0 = 1, \quad N \geq 0, \quad M \geq m.$

Lineáris, homogén differencia egyenlet:

$$\sum_{i=0}^{N} \beta_i y_{n-i} = \sum_{i=m}^{M} \alpha_i x_{n-i}$$

Rekurzív differencia egyenlet:

$$y_n = \sum_{i=m}^{M} \alpha_i x_{n-i} - \sum_{i=1}^{N} \beta_i y_{n-i}$$

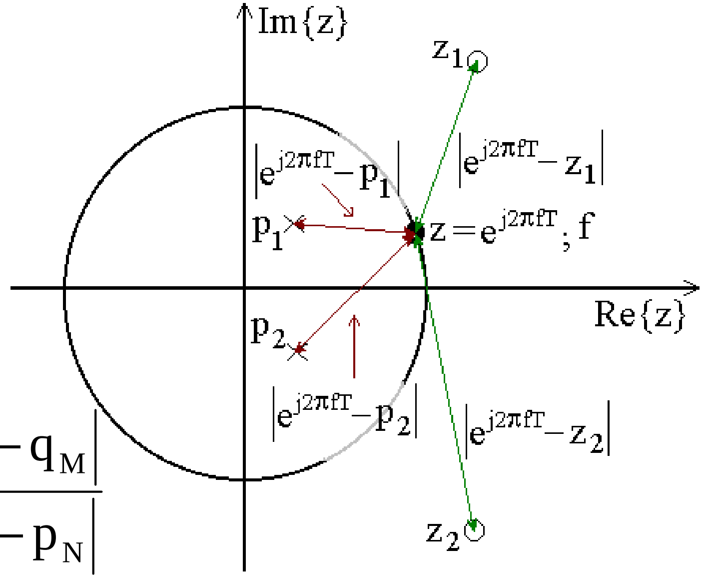
$N \geq 0, \quad M \geq m.$

# ARMA rendszer (frekvencia tart.)

ARMA rendszer pólus-zérus elrendezése és amplitúdó- és fáziskarakterisztikája közötti kapcsolat:

$$H(z=e^{j2\pi fT}) = H(f) = A(f)\cdot e^{j\varphi(f)} \qquad A(f)=\left|H(f)\right| \qquad \varphi(f)=\mathrm{arc}\big(H(f)\big)$$

$$H(z)=z^{N-M}\frac{a_M}{b_N}\frac{A(z)}{B(z)}=z^{N-M}\frac{a_M}{b_N}\frac{\prod_k (z-q_k)}{\prod_l (z-p_l)}$$




$$A(f)=\left|H\left(z=e^{j2\pi fT}\right)\right|=\left|\frac{a_M}{b_N}\right|\cdot\frac{\left|e^{j2\pi fT}-q_1\right|\cdot\left|e^{j2\pi fT}-q_2\right|\cdot\ldots\cdot\left|e^{j2\pi fT}-q_M\right|}{\left|e^{j2\pi fT}-p_1\right|\cdot\left|e^{j2\pi fT}-p_2\right|\cdot\ldots\cdot\left|e^{j2\pi fT}-p_N\right|}$$

$$\varphi(f)=\mathrm{arc}\left(\frac{a_M}{b_N}\right)-2\pi\,(N-M)Tf+\sum_{i=1}^{M}\mathrm{arc}\left(e^{j2\pi fT}-q_i\right)-\sum_{j=1}^{M}\mathrm{arc}\left(e^{j2\pi fT}-p_j\right)$$

# AR és MA rendszerek

Speciális ARMA rendszerek:

- AR rendszer, all-pole modell

$$\mathrm{H}(z)=\frac{\mathrm{A}(z^{-1})}{\mathrm{B}(z^{-1})}=\frac{a_0}{1+b_1\cdot z^{-1}+\ldots+b_N\cdot z^{-N}}=\frac{a_0\cdot z^{N}}{z^{N}+b_1\cdot z^{N-1}+\ldots+b_N}$$

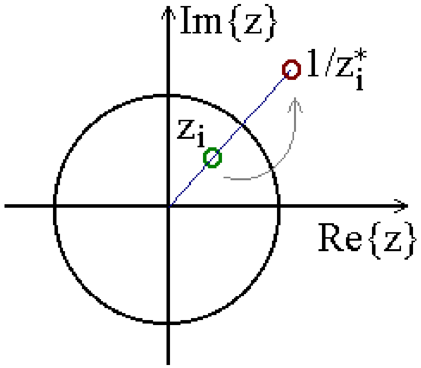
- MA rendszer, all-zero modell (FIR)

$$\mathrm{H}(z)=\mathrm{A}(z^{-1})=a_0+a_1\cdot z^{-1}+\ldots+a_M\cdot z^{-M}=\frac{a_0\cdot z^{M}+a_1\cdot z^{M-1}+\ldots+a_M}{z^{M}}$$

# ARMA rendszerek

Gyökinverzióra vonatkozó invariancia:

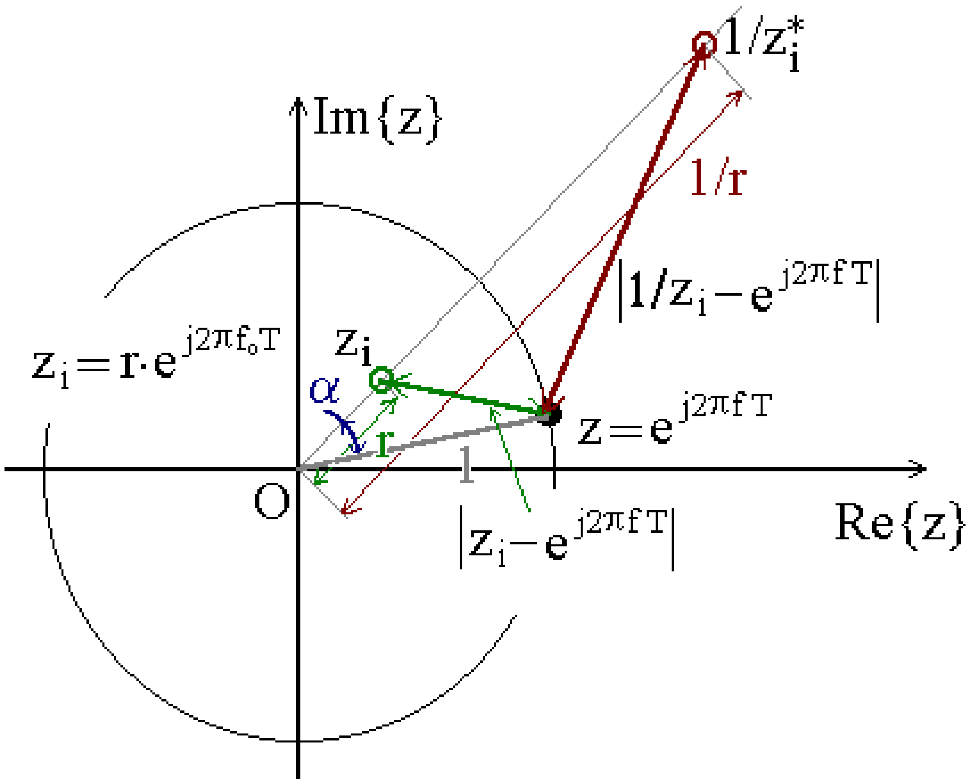
Az ARMA rendszerek amplitúdó karakterisztikája a gyökinverzió esetén (egy konstans szorzótól eltekintve) nem változik.



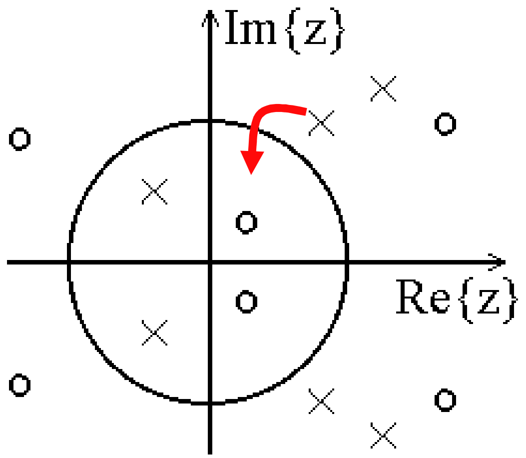

$$H_1(z) = \frac{\alpha(z)}{\beta(z)} = \frac{(z - z_i)\cdot\alpha'(z)}{\beta(z)}$$

$$H_2(z) = \frac{(z - 1/z_i^*)\cdot\alpha'(z)}{\beta(z)}$$

$$\left|H_1(z = e^{j2\pi fT})\right| \overset{?}{=} K\cdot\left|H_2(z = e^{j2\pi fT})\right|$$



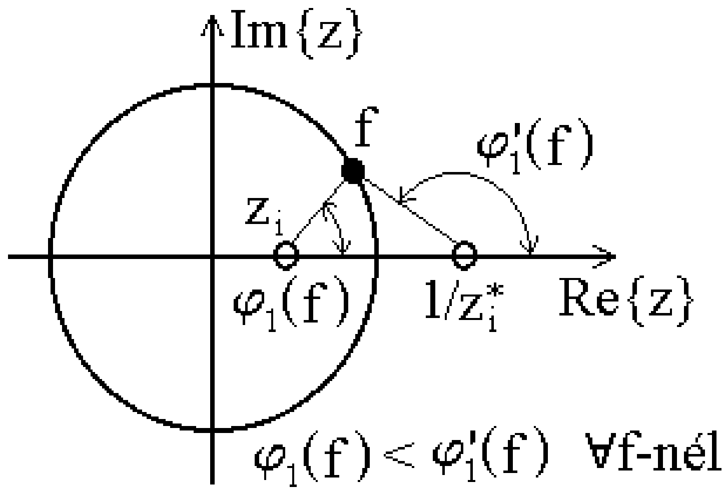
# Kauzális, stabil, minimál fázusú ARMA



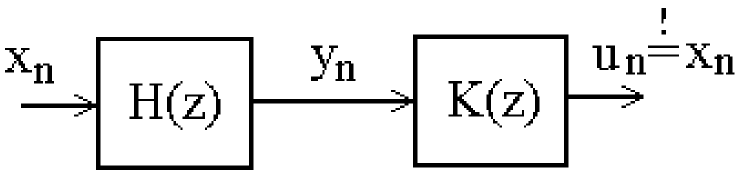

Minden ARMA szűrőhöz létezik azonos amplitúdó karakterisztikájú stabil ARMA szűrő (pólus inverzió)

Zérus inverzió hatása:

Minimál fázisú ARMA




## Invertálhatóság:




Invertálhatóság ↔ minimálfázisúság

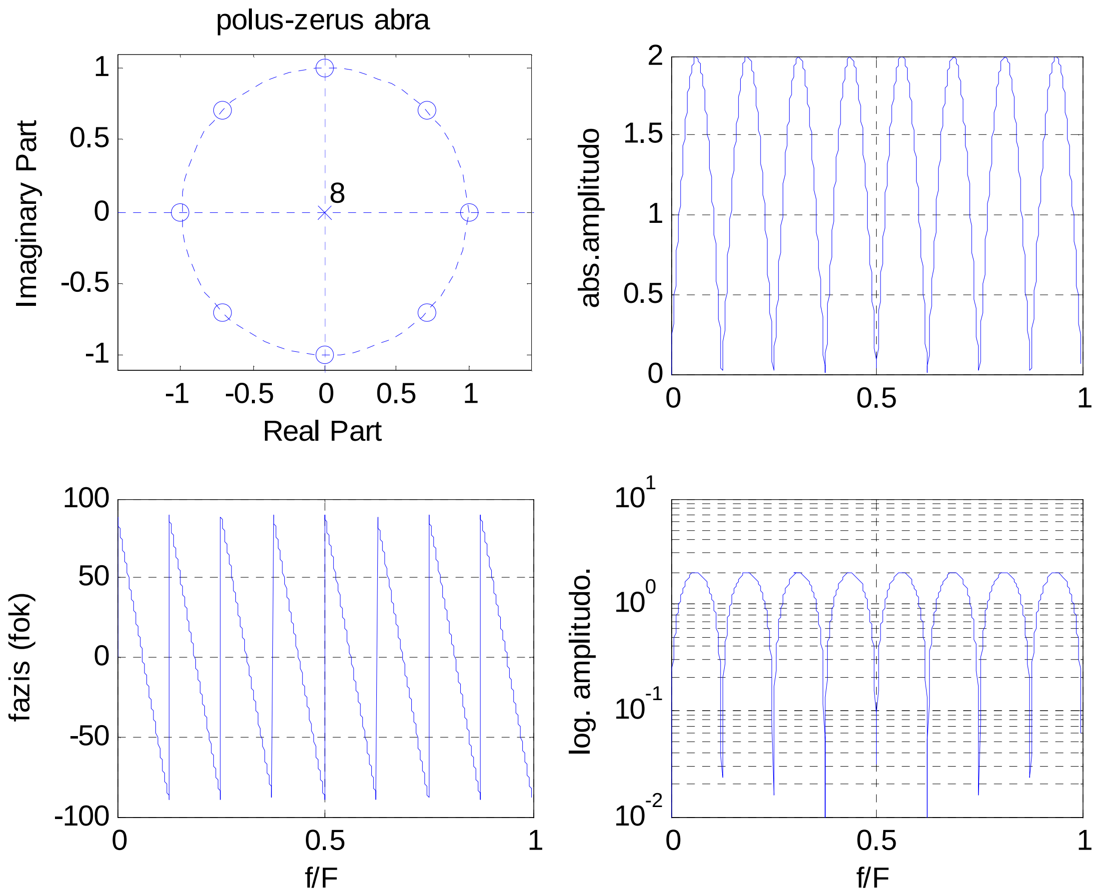
# ARMA szűrő példák: Comb filter


Időtartomány:

$$y_n = x_n - x_{n-N}$$

Operátor tartomány:

$$H(z) = 1 - z^{-N}$$



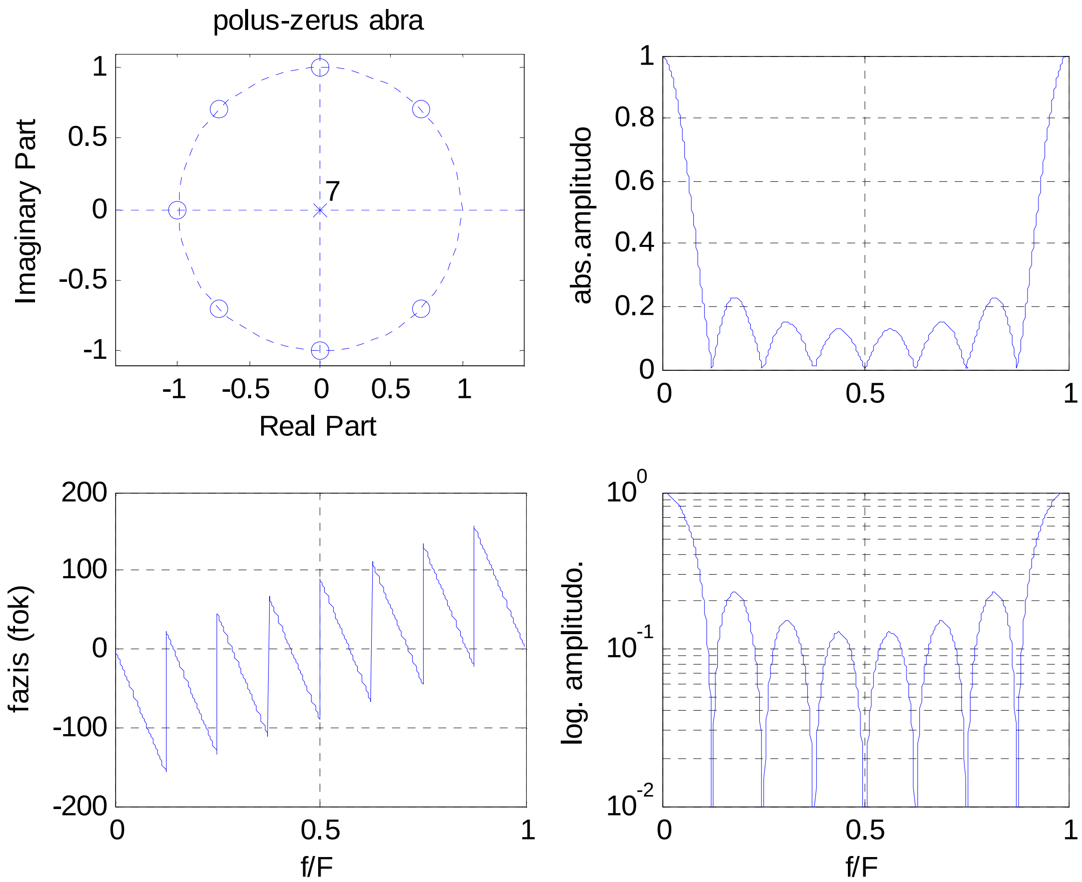
# ARMA szűrő példák: Blokkos átlagolás

Időtartomány: $y_n = \frac{1}{N}(x_n + +x_{n-1} + x_{n-2} \ldots + x_{n-(N-1)})$

Operátor tartomány:

$$H(z) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} =$$

$$= \frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$



# ARMA szűrő példák: Exponenciális átlagolás

Időtartomány:

$$y_n = \frac{1}{1-w}(x_n + wx_{n-1} + w^2 x_{n-2} \ \ldots) = \frac{1}{1-w}\sum_{i=0}^{\infty} w^i x_{n-i}$$

rekurzív alak:

$$y_n = (1-w)\ x_n + w\ \ y_{n-1}$$

Operátor tartomány:

$$H(z) = (1-w)\frac{1}{1-wz^{-1}}$$