

Híradástechnikai jelfeldolgozás

8. Előadás

Hálózatok

2015. 02. 16.

Dr. Gaál József
docens

BME Hálózati Rendszerek és Szolgáltatások Tanszék

gaal@hit.bme.hu

2015. március 17.
Budapest

- A híradástechnikai jelfeldolgozás két alap modellje:
 - Analóg jel átvitele digitális csatornán
 - Digitális jel átvitele analóg csatornán
- Jel-, rendszer- és hálózatelméleti összefoglalás
 - Jel : adott ponton egy mintasorozat, spektrum vagy analitikus fv.
 - Rendszer: input-output doboz (jelből- jelet állít elő)
 - **Hálózat** : rendszerek (input-output dobozok) összeköttetése
: rendszer implementálása részrendszerek összekötésével
- Véletlen jelek
- Sebességkonverziós jelfeldolgozás
- Jeldigitalizálás és rekonstrukció
- Modemek

Hálózat = elemkészlet + összekötési szabály

Jelfolyam hálózat:

Elemkészlet: input-output dobozok

Összekötési szabály: kimenetet kimenettel nem szabad összekötni.

Diszkrétidejű lineáris hálózat :

Elemkészlet:

- elemi alkatrészek:

összeadó

szorzó (konstanssal)

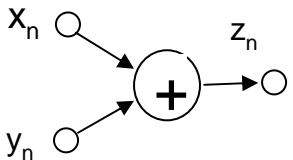
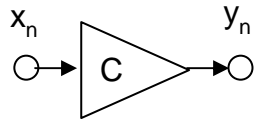
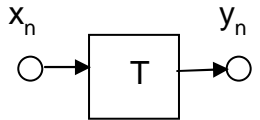
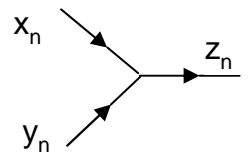
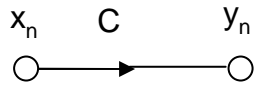
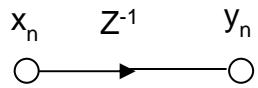
késleltető (órajelnyi)

- és minden olyan doboz, ami diszkrétidejű hálózattal létrehozható (rekurzív szabály)

Összekötési szabály:

- kimenetet kimenettel nem szabad összekötni.

Hálózati elemek és modelljeik

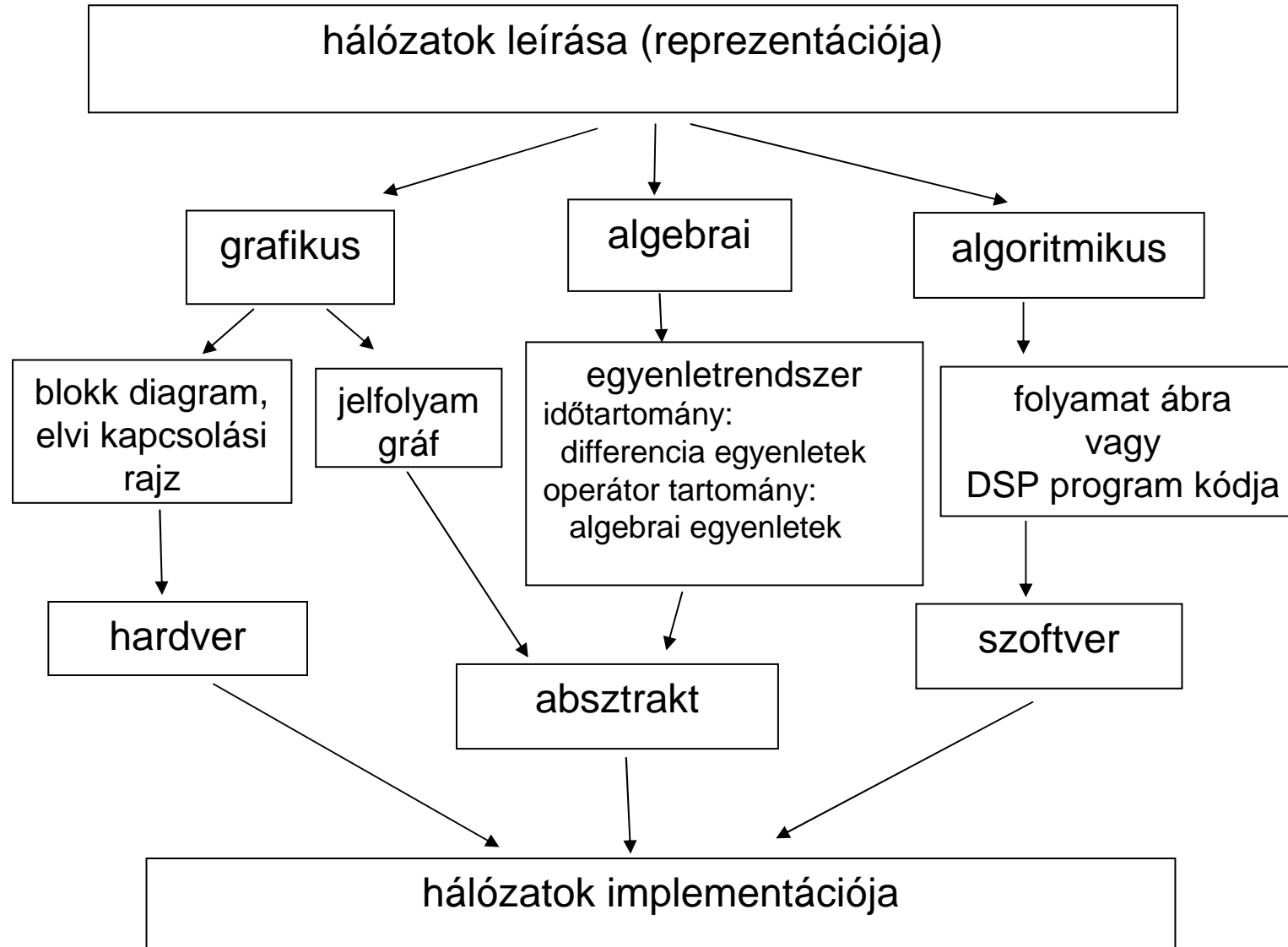
Elemek:	Összeadó	szorzó (erősítő)	késleltető
Blokk			
Gráf			
Egyenlet	$z_n = x_n + y_n$	$y_n = C x_n$	$y_n = x_{n-1}$

Hálózatokkal (input-output) rendszert implementálunk
Adott rendszer különböző, ekvivalens hálózatokkal
implementálható

Az alapfeladatok:

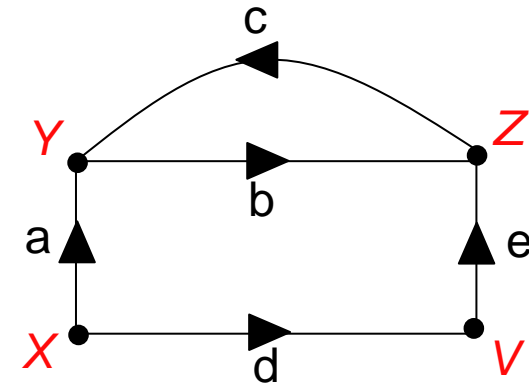
- **Hálózati modell transzformációk**
 - ekvivalens hálózat leírási (implementációs) modellek
- **Hálózat analízis**
 - adott egy hálózat teljes leírása (topológia, paraméterek),
 - meghatározandó az általa megvalósított input-output rendszer funkcionalitása (pl. transzfer függvénye)
- **Hálózat szintézis**
 - adott egy input-output rendszer követelmény (pl. transzfer függvény)
 - meghatározandó a rendszert implementáló hálózat (topológia, paraméterek)

Hálózatok reprezentációi, implementációi



Jelfolyamgráf (SFG)

- Irányított gráf: csomópontok és irányított élek (ágak) halmaza
- A gráf paraméterei az irányított ágak ágátvitelei (jelöletlen ágátvitel egységnyi)
- A gráf csomópontjaihoz tartozó értékek a gráf változói
- A gráf csomópontjai összegezik a befutó ágak kimenő értékeit,
 - az él bemenő értéke az él kiinduló csomópontjához tartozó változó értéke,
 - az él kimenő értéke a bemenő él ágátvitelszerese.



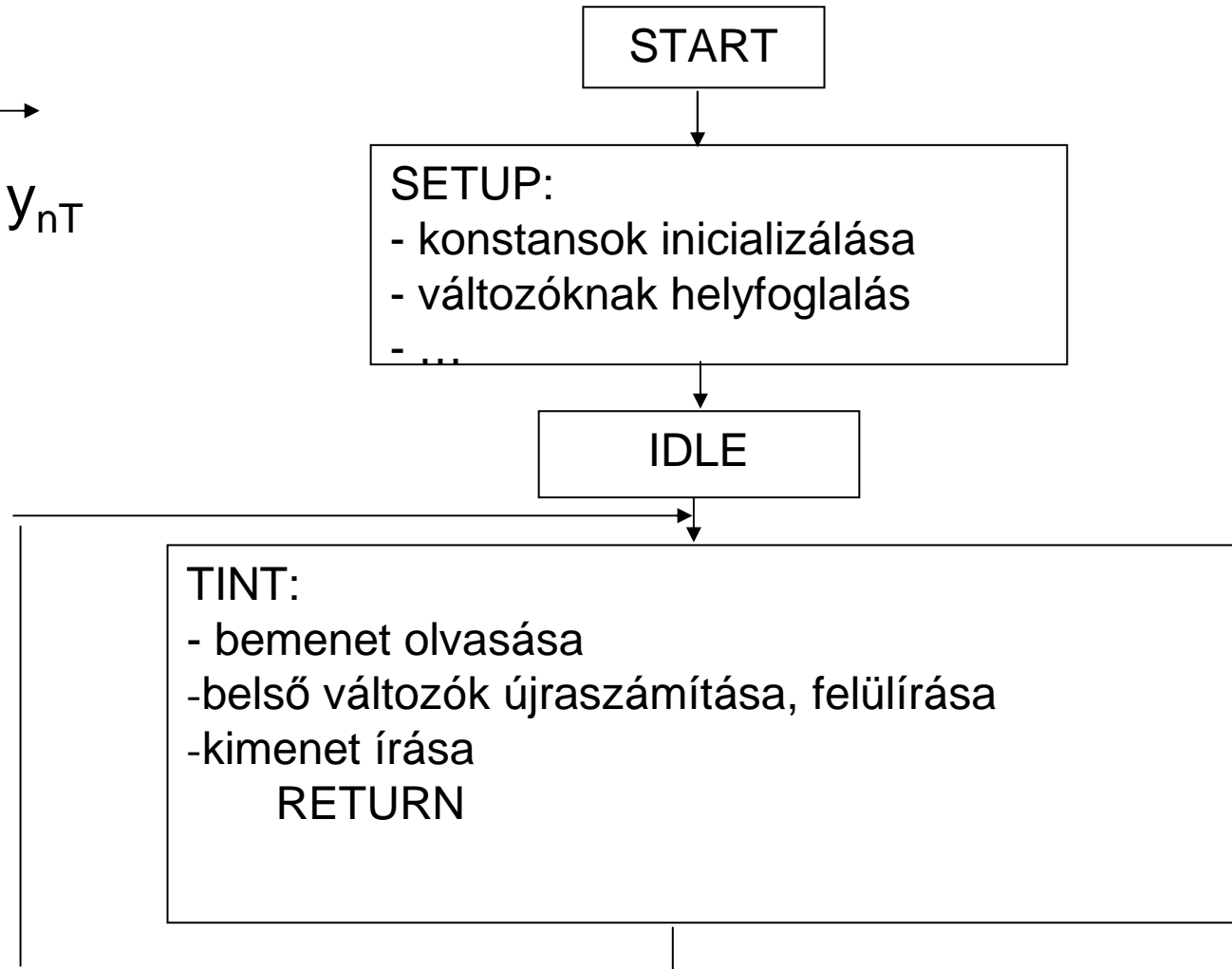
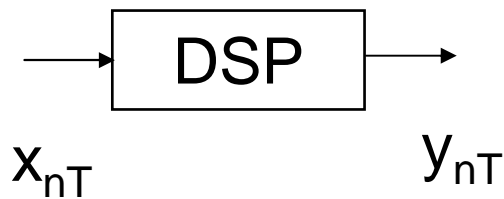
A SFG egyenletei:

$$Y = aX + cZ$$

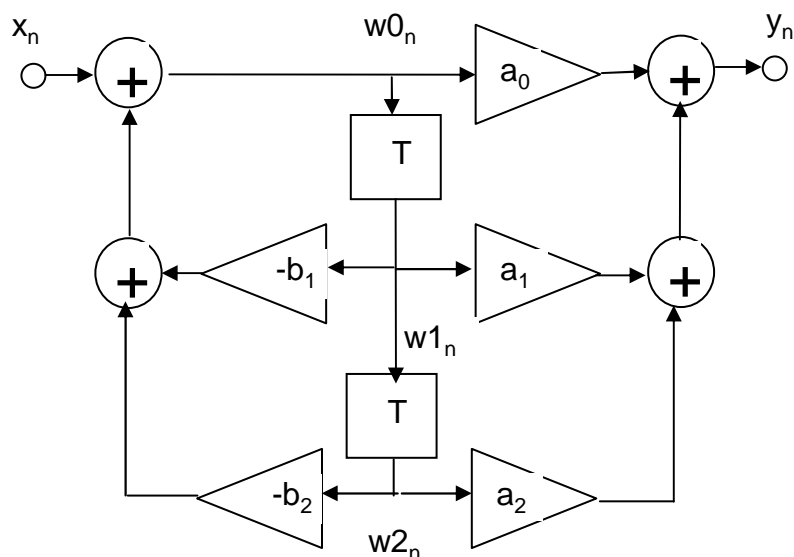
$$Z = bY + eV$$

$$V = dX$$

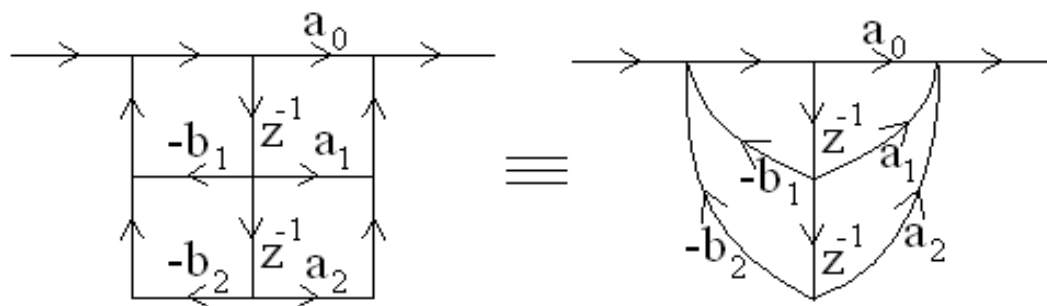
DSP program



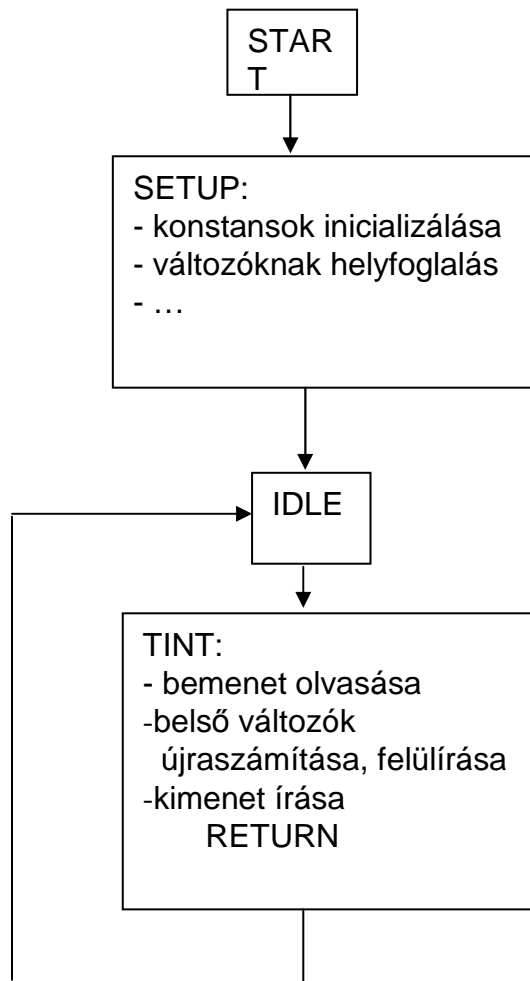
Modell transzformációk (1)



$$\begin{aligned}
 w0_n &= x_n - b_1 w1_n - b_2 w2_n \\
 y_n &= a_0 w0_n + a_1 w1_n + a_2 w2_n \\
 w2_n &= w1_{n-1} \\
 w1_n &= w0_{n-1}
 \end{aligned}$$



Modell transzformációk (2)



$$w0_n = x_n - b_1 w1_n - b_2 w2_n$$

$$y_n = a_0 w0_n + a_1 w1_n + a_2 w2_n$$

$$w2_n = w1_{n-1}$$

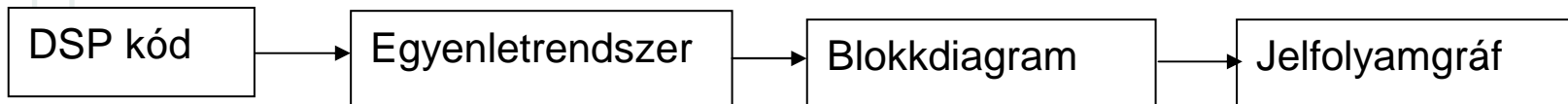
$$w1_n = w0_{n-1}$$

TINT: ; timer interrupt kezelő eljárás

```

IN   PORTAD, XN
LD   XN, A
MAC  MB1, W1N, A
MAC  MB2, W2N, A
ST   A, W0N
LD   #0, A
MAC  A0, W0N, A
MAC  A1, W1N, A
MAC  A2, W2N, A
ST   A, YN
OUT  YN, PORTDA
DELAY          W1N
DELAY          W0N
RET
  
```

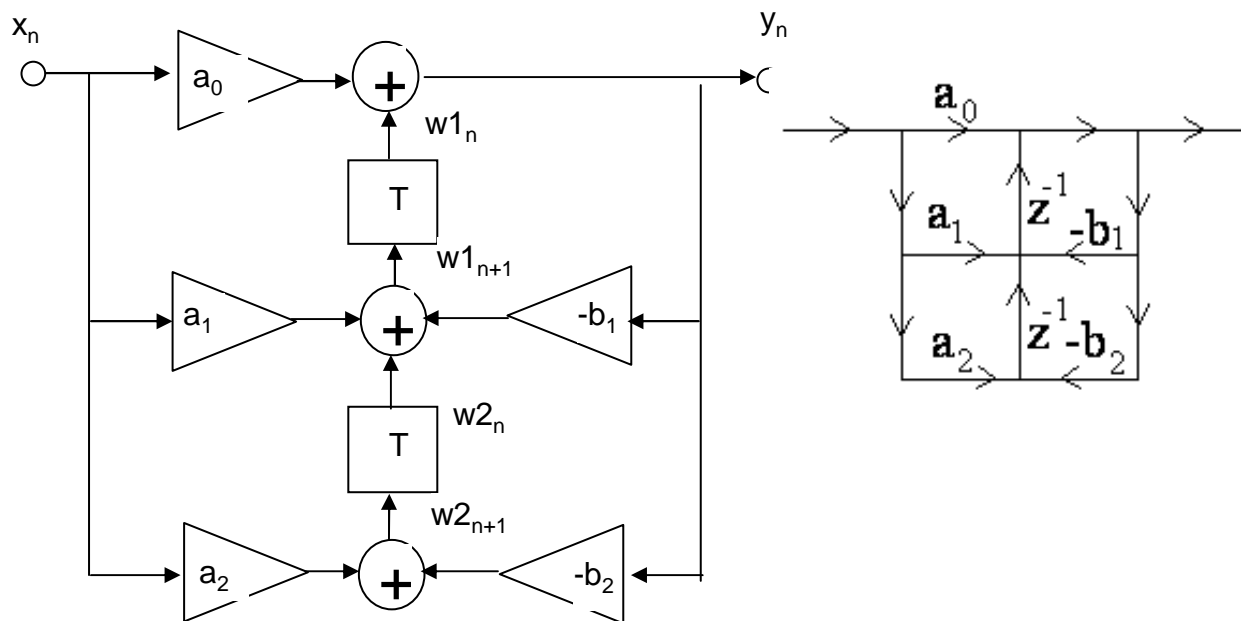
Modell transzformációk (3)



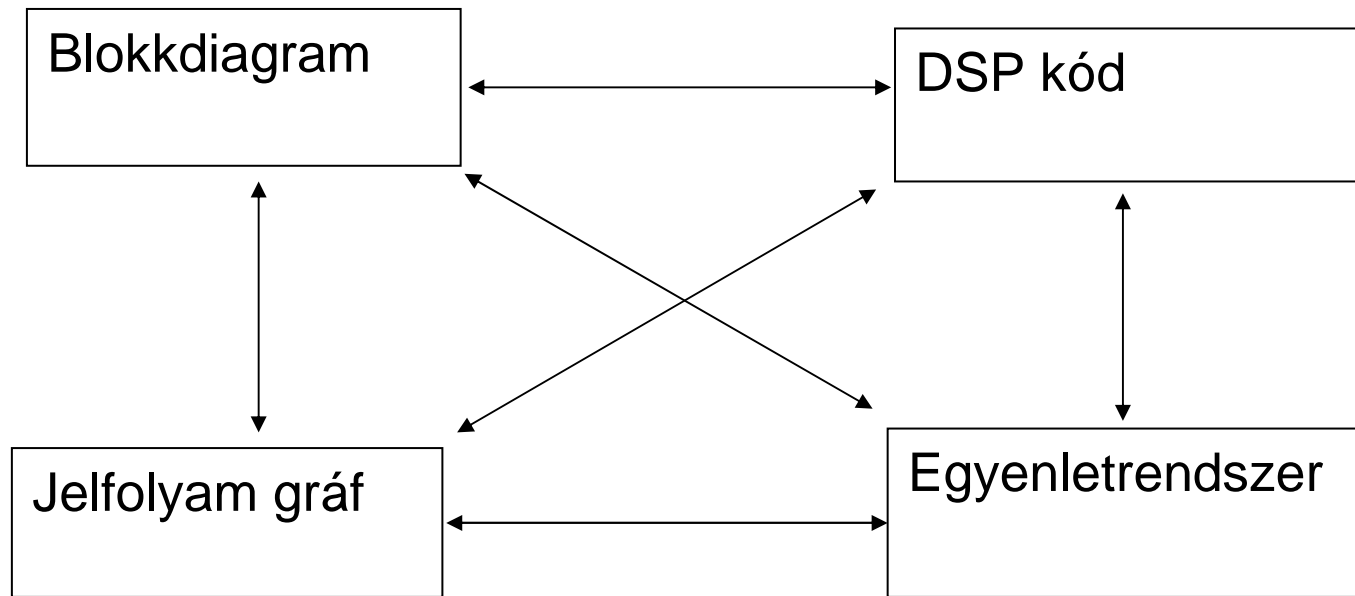
```

TINT:
IN      PORTAD, XN
LD      W1N, A
MAC     A0N, XN, A
ST      A, YN
OUT     YN, PORTDA
LD      W2N, A
MAC     A1N, XN, A
MAC     MB1, YN, A
ST      A, W1N
LD      #0, A
MAC     A2, XN, A
MAC     MB2, YN, A
ST      A, W2N
RET
  
```

$$\begin{aligned}
 y_n &= w1_n + a_0 x_n \\
 w1_{n+1} &= w2_n + a1 x_n - b1 y_n \\
 w2_{n+1} &= a_2 x_n - b2 y_n
 \end{aligned}$$



Modell transzformációk (3)

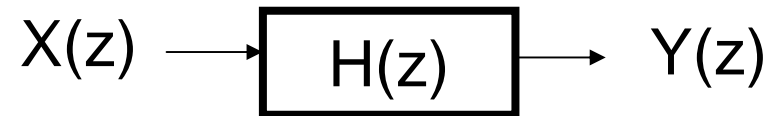
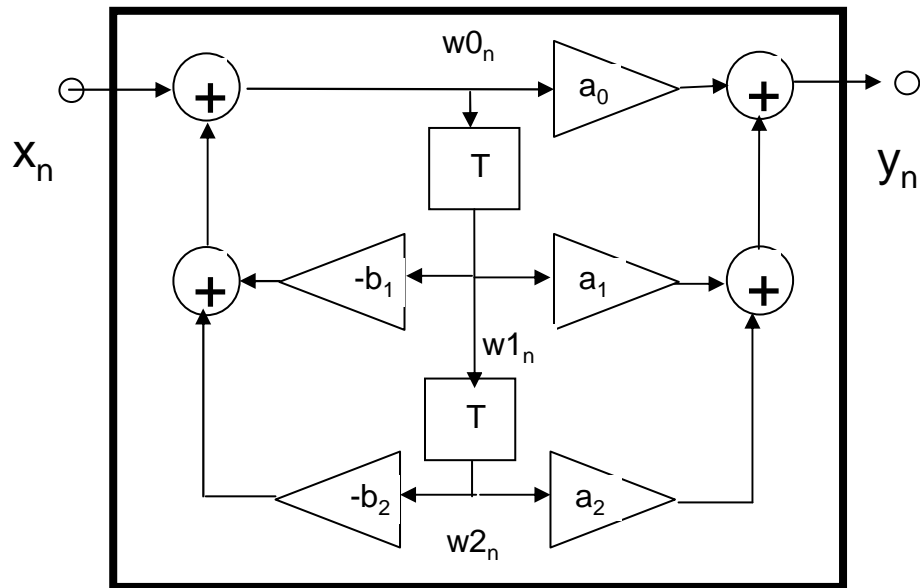


Két módszer:

- Egyenletrendszer felírása és megoldása
- Jelfolyamgráf felírása és megoldása

Hálózat analízis (1)

Egyenletrendszer felírása és megoldása

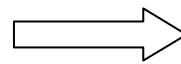


$$W_0(z) = X(z) - b_1 W_1(z) - b_2 W_2(z)$$

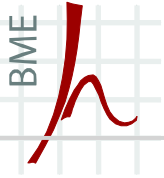
$$Y(z) = a_0 W_0(z) + a_1 W_1(z) + a_2 W_2(z)$$

$$W_1(z) = z^{-1} \cdot W_0(z)$$

$$W_2(z) = z^{-1} \cdot W_1(z)$$



$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$



Hálózat analízis (2)

Jelfolyamgráf felírása és megoldása

- ekvivalens átalakításokkal fokozatos egyszerűsítés
- direkt megoldás: Mason formula

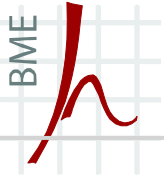
Nevezetes gráf-alkatrészek

- **Forrás csomópont:**
A jelfolyam gráf azon csomópontja, amelybe nem fut él.
- **Nyelő csomópont:**
A jelfolyam gráf azon csomópontja, amelyikből nem indul él.
- **Lánc csomópont:**
A jelfolyam gráf azon csomópontja, amelyből csak egy ág megy ki és csak egy megy be.

- Hurok:
A jelfolyam gráfnak az az összefüggő részgráfja, amely csak láncsomópontokból áll.
Két hurok különböző, ha legalább egy ágban különböznek.
- Hurokátvitel:
A hurokban lévő ágak átviteleinek szorzata.
- Független hurok pár:
Két hurok független hurok pár, ha közös csomópontjuk sincs.
- Független hurok N-es:
N darab különböző hurok független N-est alkot, ha közülük bármely kettőt kiválasztva független hurok párt kapunk.
- Független hurok N-es átvitele:
A független hurok N-esben levő hurokátvitelek szorzata.

Nevezetes gráf-alkatrészek

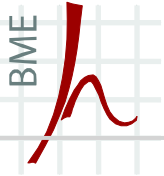
- Direkt út:
Az a részgráf, mely egy forrás és egy nyelő csomóponton kívül csak lánc csomópontokat tartalmaz.
Két direkt út különböző, ha legalább egy ágban különböznek.
- Direktátvitel:
A direkt útban lévő ágak átviteleinek szorzata.
- Direkt út maradék gráfja:
A direkt úthoz tartozó csomópontok és az ezekbe és –ből futó élek törlésével kapott maradék gráf.



Hálózat analízis (2)

Jelfolyamgráf felírása és megoldása

- ekvivalens átalakításokkal fokozatos egyszerűsítés
- direkt megoldás: Mason formula



Mason formula

A gráf átvitele:

$$H(z) = \frac{\sum_i D_i(z) \cdot \Delta_i(z)}{\Delta(z)}$$

A gráf determinánása:

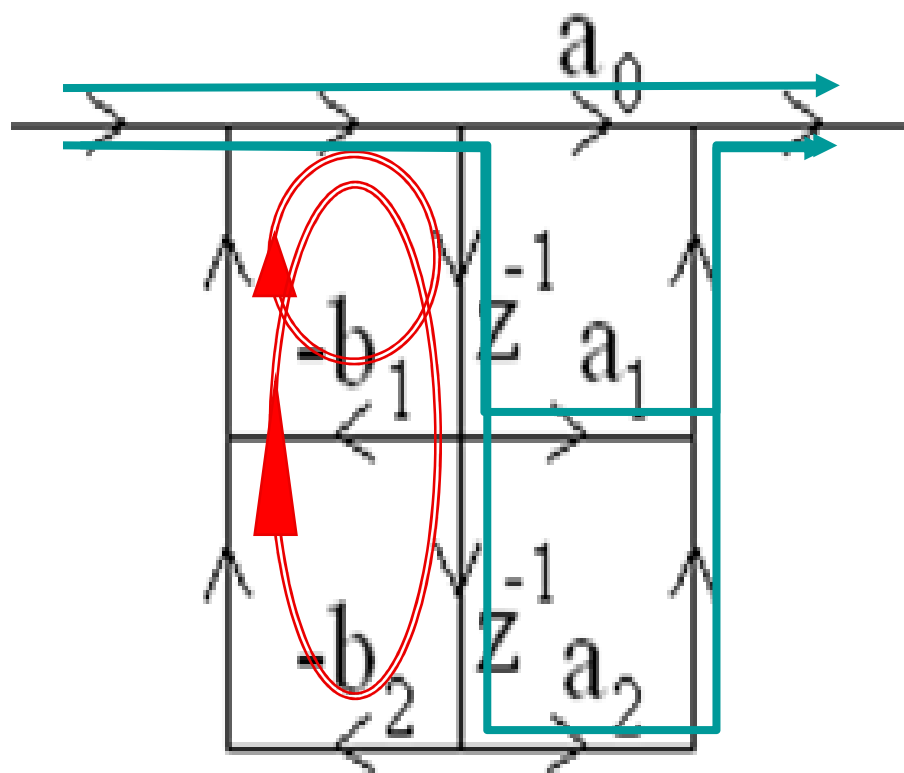
$$\Delta = 1 - \sum_{i=1}^{N_1} L_i^{(1)} + \sum_{i=1}^{N_2} L_i^{(2)} - \dots + \dots + \dots \sum_{i=1}^{N_N} L_i^{(N)}$$

$L_i^{(k)}$ Az i-edik független hurok k-as átvitele

$D_i(z)$: az i-edik direkt út átvitele

$\Delta_i(z)$: az i-edik direkt úthoz tartozó aldetermináns,
(a maradék gráf determinánása)

Mason formula példa:



Hurkok: $L_1^{(1)} = -b_1 z^{-1}$

$L_2^{(1)} = -b_2 z^{-2}$

determináns:

$$\Delta = 1 - (L_1^{(1)} + L_2^{(1)}) = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

Direkt utak és aldeterminánsai:

$$D_1 = a_0 \quad \Delta_1 = 1$$

$$D_2 = a_1 z^{-1} \quad \Delta_2 = 1$$

$$D_3 = a_2 z^{-2} \quad \Delta_3 = 1$$

Átvitel:
$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

Mason formula következményei

- Egy hálózat grájában a hurkokat és a direkt utakat felismerve közvetlenül felírhatóak a hálózat által megvalósított transzferfüggvények.
- Hurokmentes hálózat determinánása egységnyi, $\Delta = 1$.
- Diszkrét idejű, lineáris hálózat (összeadóból, szorzóból és késleltetőből felépíthető) determinánása, direkt átvitele (és természetesen aldeterminánása is) z^{-1} -nek (legfeljebb) polinomja lehet.
- Diszkrét idejű, lineáris, kiszámolható hálózattal megvalósított rendszer $H(z)$ transzferfüggvénye legfeljebb **racionális tört** lehet, azaz összeadóból, szorzóból és késleltetőből felépíthető hálózattal legfeljebb ARMA rendszer valósítható meg.

Mason formula következményei

- Hurokmentes hálózat mindig FIR (MA) rendszert valósít meg.
- ARMA rendszer pólusai a hálózat determinánsának gyökei.
- Pólust létrehozni csak rekurzív hálózattal lehet.
- ARMA rendszer stabilitását a hálózat determinánsa határozza meg (stabil a hálózat, ha determinánsának gyökei az egységkörön belül vannak).

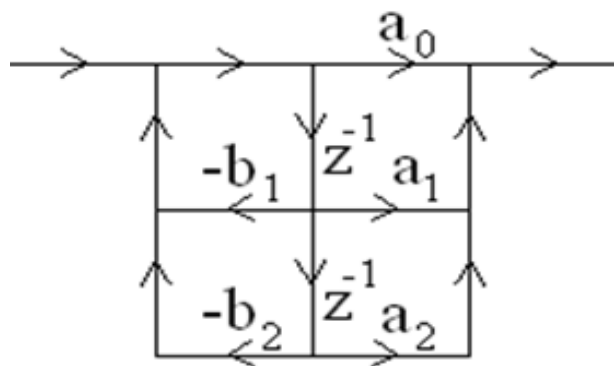
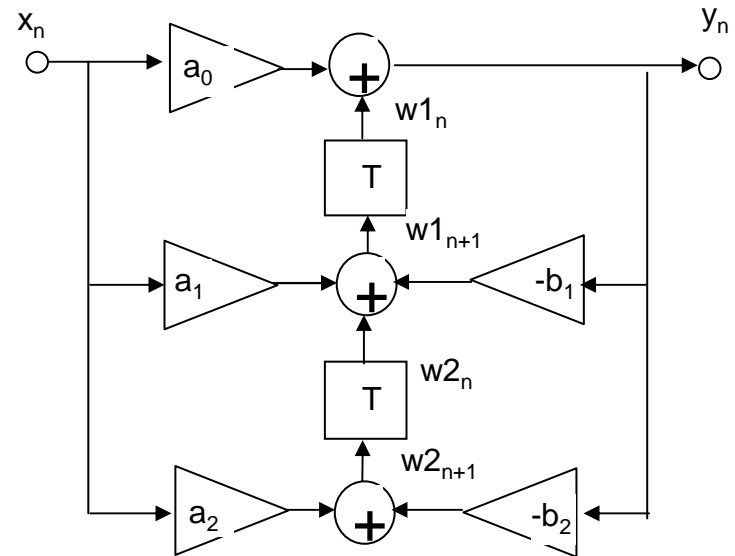
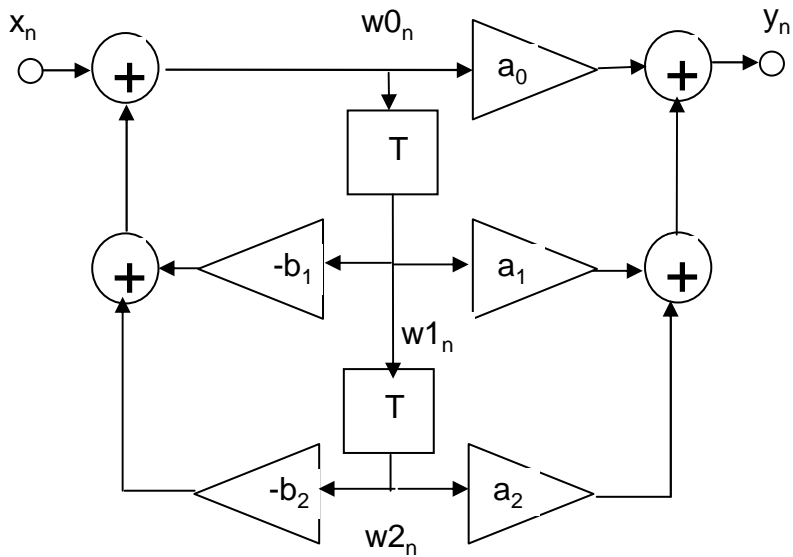
- **Kiszámíthatóság:**
Egy hálózat **kiszámítható** ha nem tartalmaz késleltetés mentes hurkot.
- **Rekurzív hálózat:**
Egy hálózatot **rekurzív**nek nevezzük, ha gráfja tartalmaz hurkot. Ha nem tartalmaz hurkot, akkor **non-rekurzív**nek nevezzük.
- **Kanonikus hálózat:**
Ha a hálózatban lévő késleltetők száma minimális, azaz egyenlő a hálózat által megvalósított transzferfüggvény fokszámával.

- **Transzponált gráf:**
Egy gráf **transzponált** gráfját a gráf minden éle irányának megfordításával kapjuk.
- **Transzponált hálózat:**
A transzponált gráfhoz tartozó hálózat.
- **Ekvivalens hálózat:**
Azonos transzfer függvényeket megvalósító hálózatok.

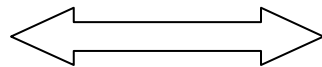
Állítás:

- Egy hálózat és transzponáltja ekvivalensek, azonos transzfer függvény valósítanak meg.

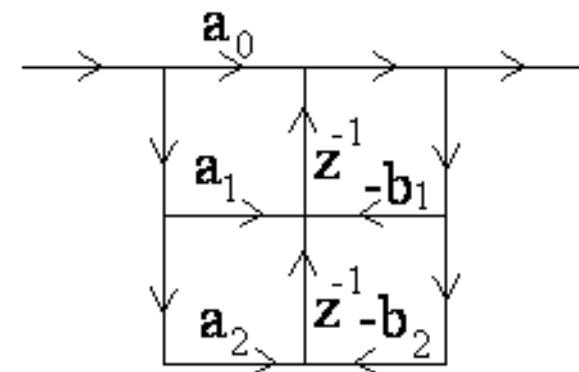
Példa



Tranzzponálás



$$H_1(z) = H_2(z)$$

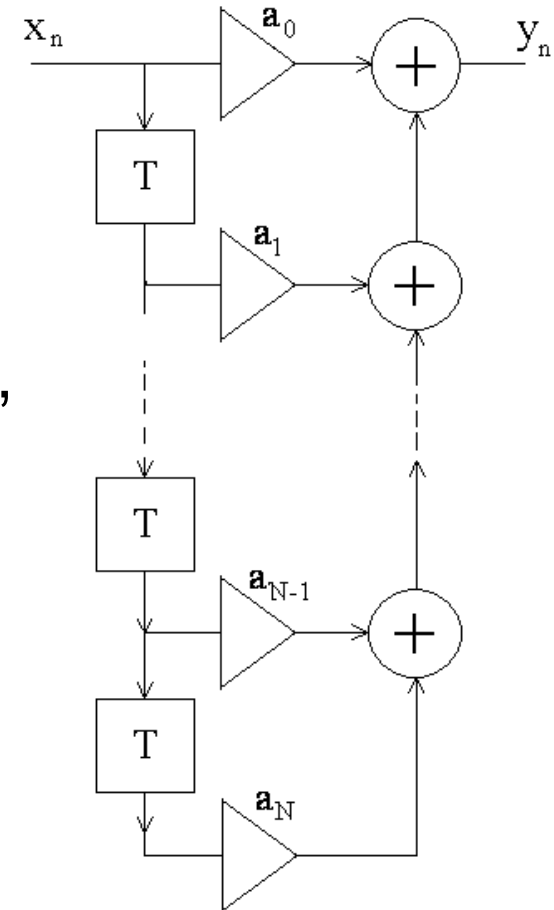


- Nem egyértelmű feladat
- Egy struktúra (topológia) kiválasztása
(Nevezetes struktúrák)
- Adott struktúra paraméterezése, a szorzók meghatározása

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \dots + a_N x_{n-N}$$

- nonrekurzív hálózat, struktúrálisan stabil, FIR rendszert valósít meg
- impulzus válasz sorozata az együtthatók a_0, a_1, \dots, a_N sorozatának véges tartójú sorozata
- direkt konvolúciós struktúrának is nevezik, a bemeneti x_n sorozatot a „tárolt” együtthatók a_n sorozatával konvolválva adja a kimeneti y_n sorozatot:

$$y_n = x_n * h_n, \text{ ahol } h_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n < 0 \wedge n > N \\ a_n, & \text{ha } 0 \leq n \leq N \end{cases}$$



- a transzfer függvény:

$$H(z) = A(z^{-1}) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}$$

mely MA rendszert valósít meg, csak nem-triviális zérusai vannak, all-zero modell.

- minden FIR (MA) szűrő megvalósítható transzverzális struktúrával
- minden non-rekurzív hálózathoz létezik ekvivalens transzverzális struktúra
- direkt, kanonikus struktúra
- A transzponált transzverzális struktúra:

