Híradástechikai jelfeldolgozás

9. Előadás

Hálózat szintézis

Véletlen jelek

2015. 03. 30.

Dr. Gaál József

docens

BME Hálózati Rendszerek és SzolgáltatásokTanszék

gaal@hit.bme.hu

2015. április 3.
Budapest

Hálózat szintézis

- Nem egyértelmű feladat

- Egy struktúra (topológia) kiválasztása

(Nevezetes struktúrák)

- Adott struktúra paraméterezése, a szorzók maghatározása

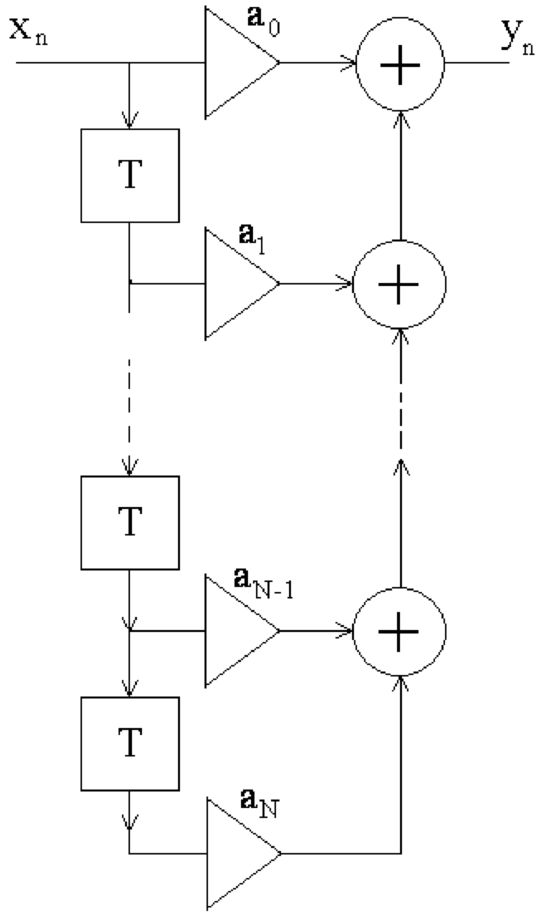
Transzverzális struktúra

$$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_N x_{n-N}$$

- nonrekurzív hálózat, struktúrálisan stabil, FIR rendszert valósít meg
- impulzus válasz sorozata az együtthatók a_0, a_1, ... a_N sorozatának véges tartójú sorozata
- direkt konvolúciós struktúrának is nevezik, a bemeneti x_n, sorozatot a „tárolt" együtthatók a_n, sorozatával konvolválva adja a kimeneti y_n, sorozatot:

$y_n = x_n * h_n$, ahol

$$h_n = \begin{cases} 0, \text{ ha } n < 0 \wedge n > N \\ a_n, \quad \text{ha } 0 \le n \le N \end{cases}$$



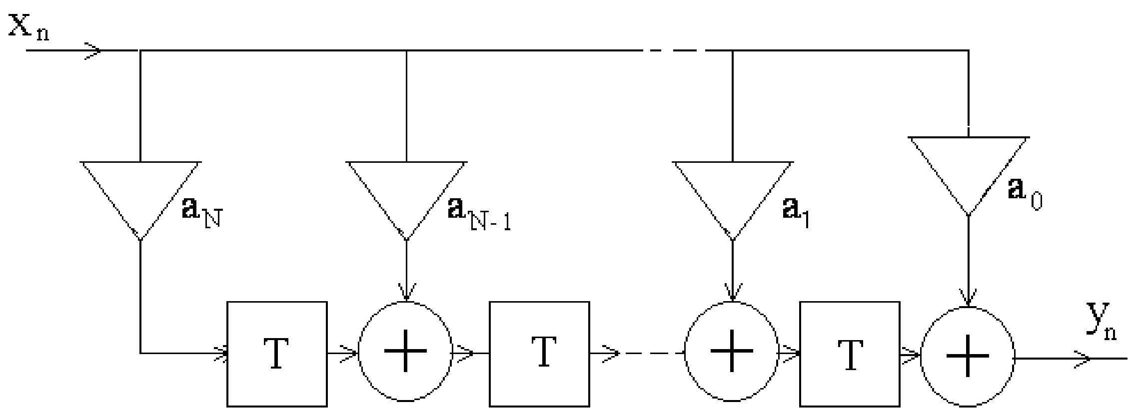
Transzverzális struktúra

- a transzfer függvény:

$$\mathrm{H}(z) = \mathrm{A}(z^{-1}) = a_0 + a_1 \mathrm{z}^{-1} + \ldots + a_N \mathrm{z}^{-N}$$

mely MA rendszert valósít meg, csak nem-triviális zérusai vannak, all-zero modell.

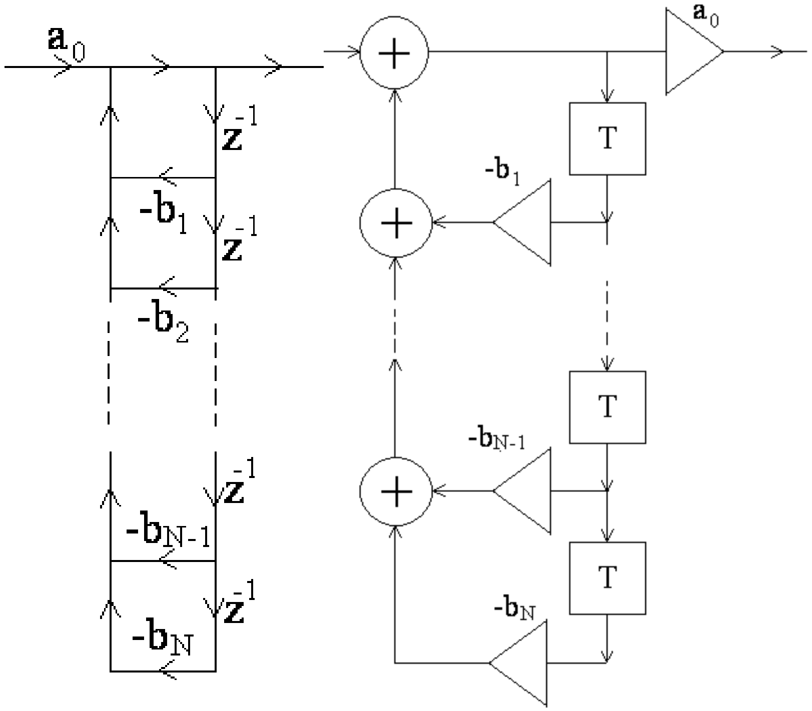
- minden FIR (MA) szűrő megvalósítható transzvezális struktúrával
- minden non-rekurzív hálózathoz létezik ekvivalens transzverzális struktúra
- direkt, kanonikus struktúra
- A transzponált transzverzális struktúra:



AR struktúra, all-pole modell

$$H(z) = \frac{a_0}{B(z^{-1})} = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}}$$

$$y_n = a_0 x_n - b_1 y_{n-1} - b_2 y_{n-2} - \ldots - b_N y_{n-N}$$



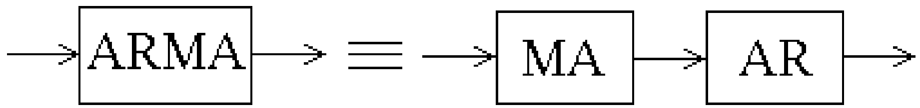
- rekurzív hálózat, IIR rendszert valósít meg
- stabilitása a b1, ... bN együtthatóktól függ
- csak nem-triviális pólusai vannak, all-pole modell.
- minden AR szűrő, azaz minden nevező polinom megvalósítható ezzel a struktúrával
- direkt, kanonikus struktúra
- ezen struktúrából is származtatható ekvivalens transzponált struktúra

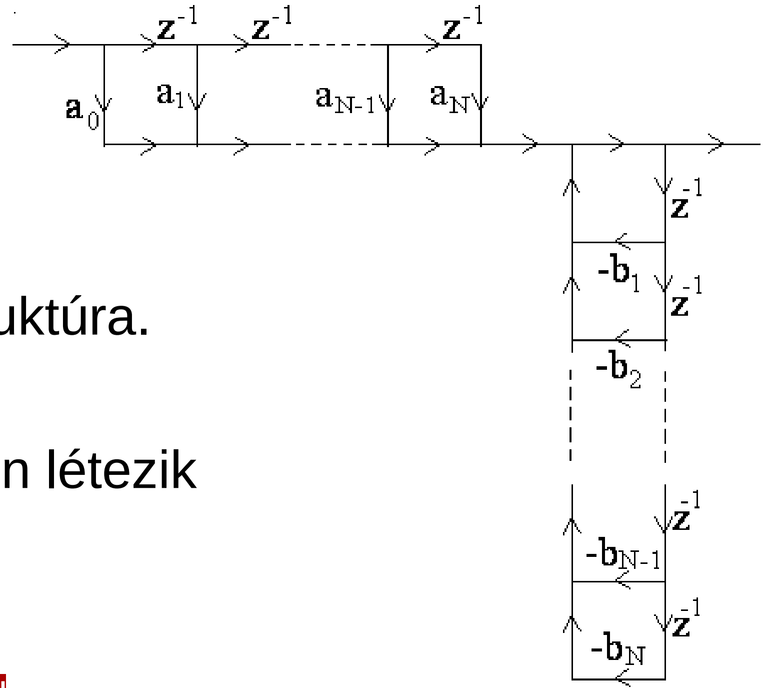
ARMA rendszerek direkt struktúrái (D0)

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}}$$

D0 struktúra:

$$H(z) = A(z^{-1}) \cdot \frac{1}{B(z^{-1})}$$

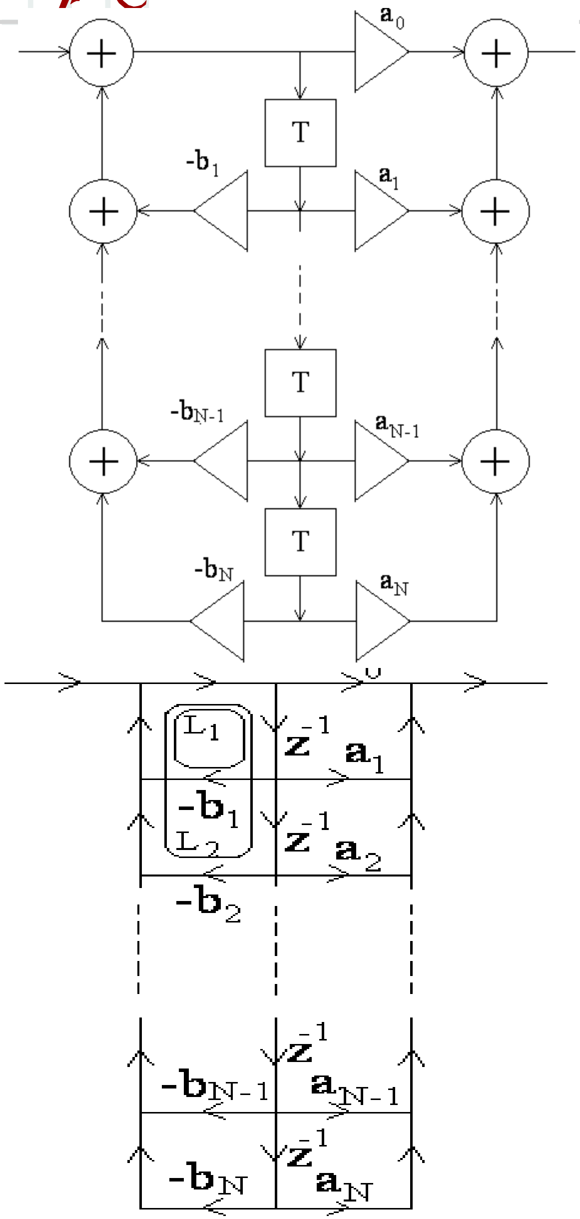




A D0 struktúra nem kanonikus, direkt struktúra.

Minden ARMA rendszerhez egyértelműen létezik D0 struktúrájú realizációs lehetőség.

ARMA rendszerek direkt struktúrái (D1)



N számú hurkot tartalmaz a gráf:

$L_1 = -b_1 \cdot z^{-1}$

$L_2 = -b_2 \cdot z^{-2}$

....

$L_N = -b_N \cdot z^{-N}$

tehát: $\Delta = 1 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \ldots + b_N \cdot z^{-N}$

N+1 db. direkt út van:

$D_1 = a_0$

$D_2 = a_1 \cdot z^{-1}$

$D_{N+1} = a_N \cdot z^{-N}$

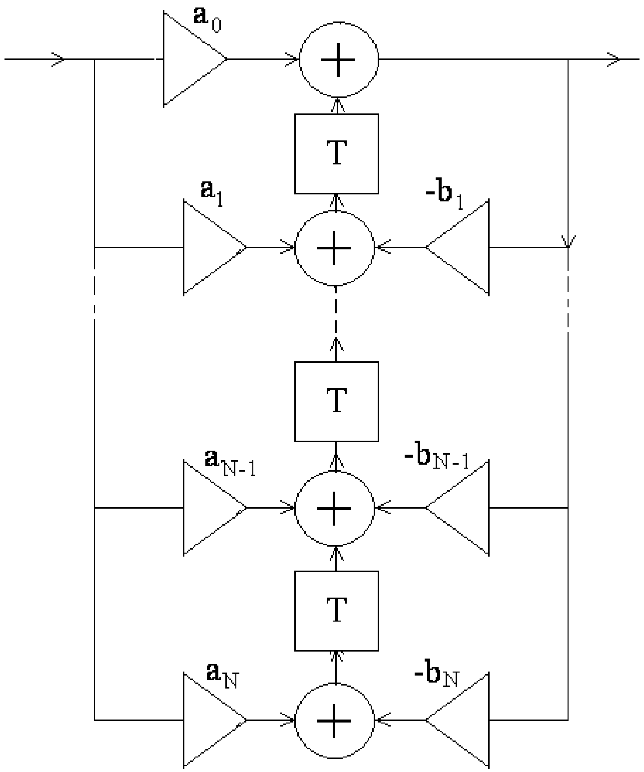
és minden aldeterminánsra: $\Delta_i = 1$, i = 1...N+1.

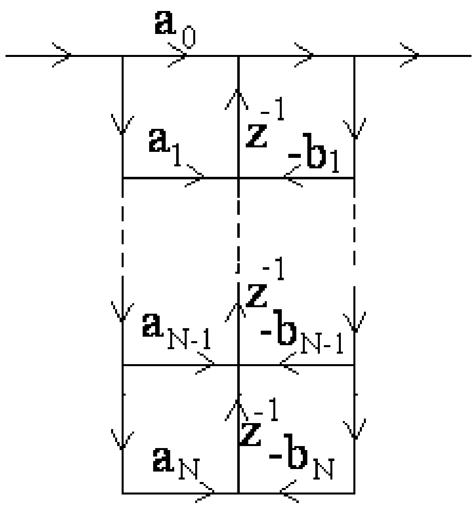
$$H(z) = \frac{\sum_i D_i(z) \cdot \Delta_i(z)}{\Delta(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}}$$

D1: egyértelmű, direkt, kannonikus

ARMA rendszerek direkt struktúrái (D2)

A D2 struktúra a D1 hálózat transzponáltja:





$$\mathrm{H}(z) = \frac{\sum_i D_i(z)\cdot\Delta_i(z)}{\Delta(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}}$$

D2: egyértelmű, direkt, kannonikus

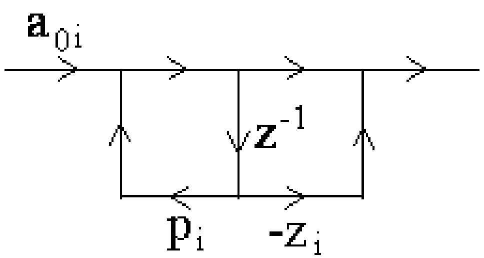
Kaszkád struktúra

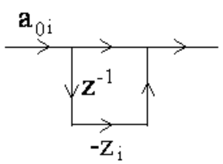
$$H(z)=\frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})}=\frac{a_0+a_1\cdot z^{-1}+\ldots+a_N\cdot z^{-N}}{1+b_1\cdot z^{-1}+\ldots+b_N\cdot z^{-N}}=\frac{a_0\cdot\prod_{i=1}^{N}(1-z_i\cdot z^{-1})}{\prod_{j=1}^{N}(1-p_j\cdot z^{-1})}=\prod_{i=1}^{N}a_{0i}\frac{1-z_i\cdot z^{-1}}{1-p_j\cdot z^{-1}}$$

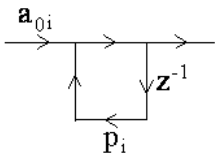
$$\xrightarrow{}\boxed{H(z)}\xrightarrow{}\ \equiv\ \xrightarrow{}\boxed{H_1(z)}\xrightarrow{}\boxed{H_2(z)}\xrightarrow{}\ \bullet\bullet\bullet\ \xrightarrow{}\boxed{H_N(z)}\xrightarrow{}$$

$$H(z)=\prod_{i=1}^{N}H_i(z)$$

$$H_i(z)=a_{0i}\frac{1-z_i\cdot z^{-1}}{1-p_j\cdot z^{-1}}$$







Kaszkád struktúra

- Kanonikus
- Nem direkt:

  paraméterei nem polinom együtthatók, hanem gyökök.
- Nem egyértelmű,
  - zérusok, és pólusok sokféle képpen párosíthatóak
  - az alaptagok többféle sorrendben összekapcsolhatók
  - az $a0$ erősítés többféleképpen szétosztható az $a0_i$-kre.

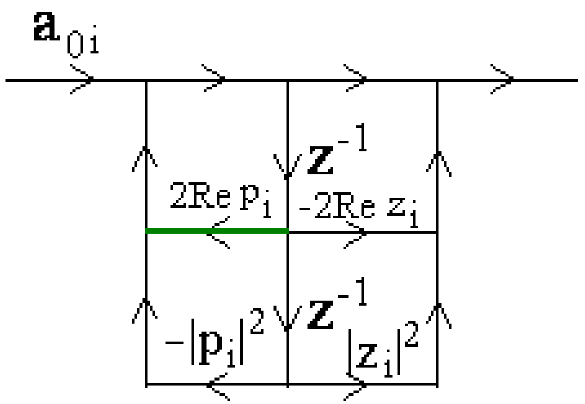
    - Az ekvivalens transzferfüggvényű lehetséges megoldások közül kiválasztható az egyéb szempontok (érzékenység, dinamika, zaj, stb.) szerint optimalizált változat.
    - Pl. adaptív rendszereknél igen előnyös megvalósítás

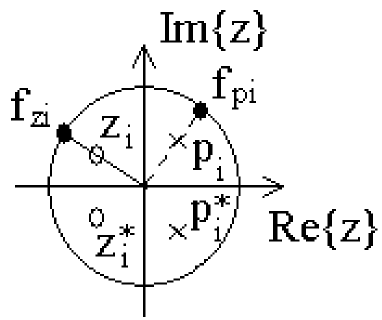
Kaszkád struktúra, másodfokú alaptagok

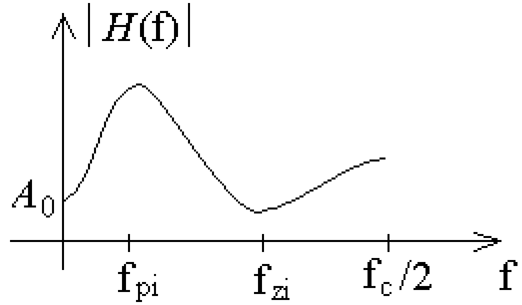
Valós rendszer → konjugált komplex gyökpárok

$$H_i^{(II)}(z) = a_{0i} \cdot \frac{\left(1 - z_i \cdot z^{-1}\right) \cdot \left(1 - z_i^* \cdot z^{-1}\right)}{\left(1 - p_i \cdot z^{-1}\right) \cdot \left(1 - p_i^* \cdot z^{-1}\right)} = a_{0i} \frac{1 - 2\,\mathrm{Re}\{z_i\} z^{-1} + |z_i|^2 z^{-2}}{1 - 2\,\mathrm{Re}\{p_i\} z^{-1} + |p_i|^2 z^{-2}}$$

Másodfokú
alaptag (pl. D1):





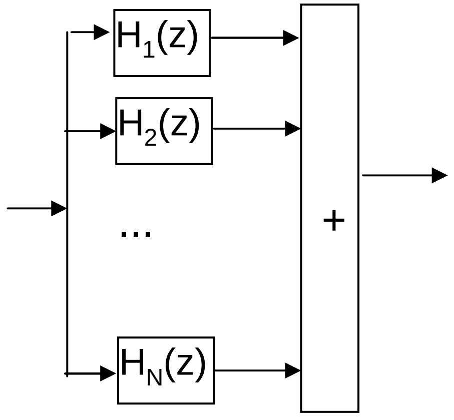


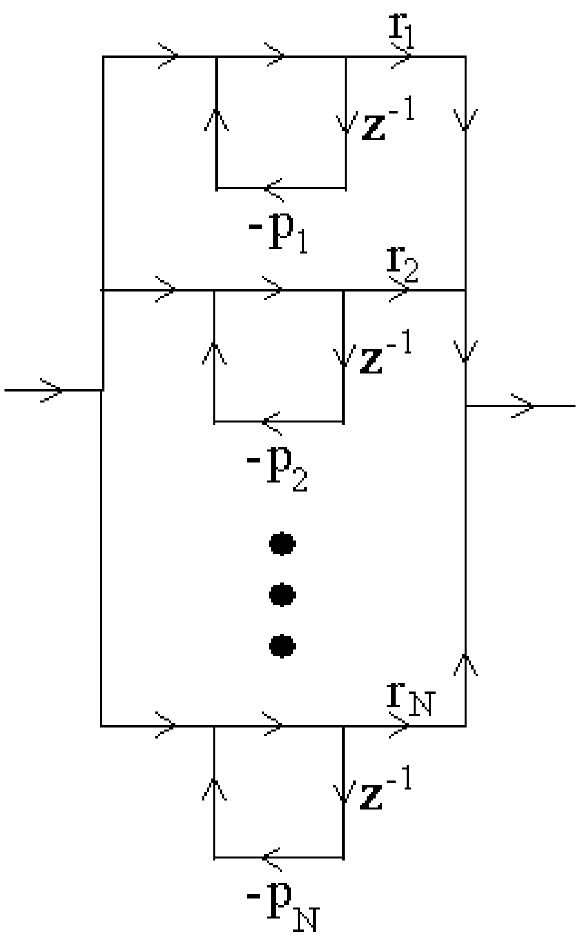
Párhuzamos struktúra

$$\mathrm{H}(z)=\frac{a_0+a_1 z^{-1}+\ldots+a_M z^{-M}}{1+b_1 z^{-1}+\ldots+b_N z^{-N}}=\sum_{i=1}^{N}\frac{r_i}{1-p_i z^{-1}}$$

$$\mathrm{Y(z)}=\sum_{\mathrm{i}}\mathrm{H_i(z)X(z)}$$

$$\mathrm{H_i}(z)=\frac{r_i}{1-p_i z^{-1}}$$



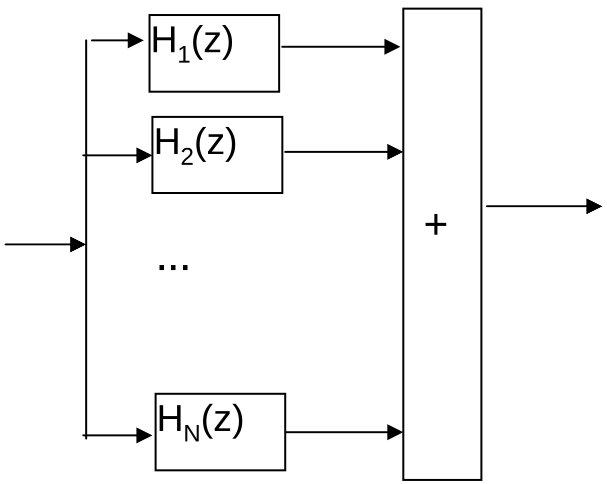


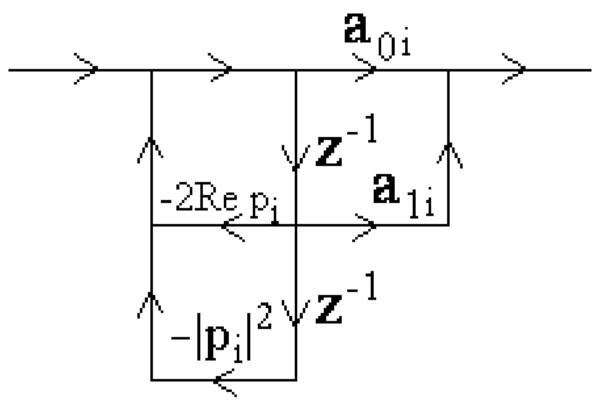
- kanonikus
- nem direkt:
  - paraméterei pólusok és azok reziduumaik
- egyértelmű

Párhuzamos struktúra (másodfokú rezonátorokkal)

Valós rendszer → konjugált komplex póluspárok

$$\left(\frac{r_i}{1-p_i z^{-1}}+\frac{r_i^*}{1-p_i^* z^{-1}}\right)=\frac{r_i+r_i^*-\left(r_i p_i^*+r_i^* p_i\right)z^{-1}}{1-2\,\mathrm{Re}\,p_i\cdot z^{-1}+\left|p_i\right|^2 z^{-2}}=\frac{a_{0i}+a_{1i}z^{-1}}{1-2\,\mathrm{Re}\,p_i\cdot z^{-1}+\left|p_i\right|^2 z^{-2}}$$





rezonátoros struktúrának is nevezik:

a bemeneti számsorozat, egyidejűleg gerjeszti a pólusokhoz tartozó rezonátorokat, a kimenet a gerjesztett rezonátorok jeleinek összege.

Lagrange-féle interpoláció struktúra

Interpolációs feladat: H(z) = ?

a komplex sík N darab, adott $z_1, z_2, \ldots z_N$ pontjaiban adott $h_1, h_2, \ldots h_N$ értékeket veszi fel,

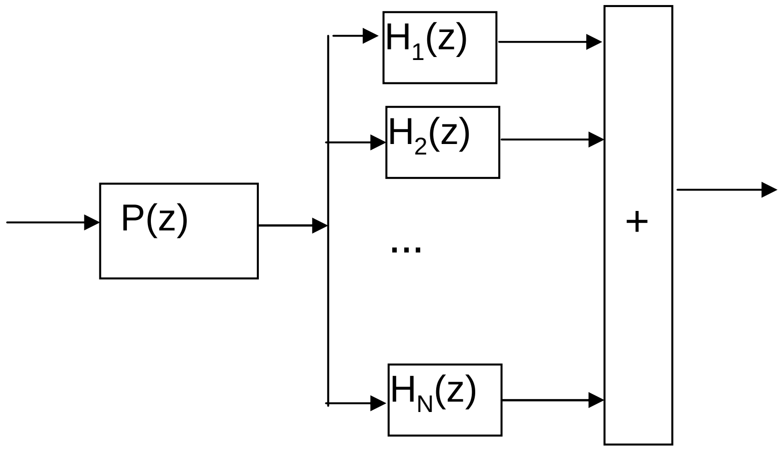
azaz $h_i = H(z_i)$, $i = 1, 2, \ldots N$.

A megoldás:

$$H(z) = P(z)\sum_{i=1}^{N} H_i(z),$$

ahol $$P(z) = \prod_{i=1}^{N} (1 - z_i/z),$$

$$H_i(z) = \frac{h_i}{P_i(z_i)(1 - z_i/z)}, \qquad P_i(z) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} (1 - z_k/z)$$



Frekvencia-mintavételező struktúra

- $z_k = e^{j\,k\,2\pi/N}$, $k = 0,1, \ldots (N-1)$
- $h_k = H(z_k) = H(e^{j\,k\,2\pi/N})$
  $= H(f_k) = H_k$, $f_k = k\,F/N$, $k = 0,1, \ldots (N-1)$

$$H(z) = \left(1 - z^{-N}\right)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{h_k}{1 - e^{j2\pi\frac{k}{N}}z^{-1}}$$

Tartalom

- A híradástechnikai jelfeldolgozás
- Jel-, rendszer- és hálózatelméleti összefoglalás
  - Jel : adott ponton egy mintasorozat, spektrum vagy analitikus fv.
  - Rendszer: input-output doboz (jelből- jelet állít elő)
  - Hálózat : rendszerek (input-output dobozok) összeköttetése
    : rendszer implementálása részrendszerek összekötésével
- Véletlen jelek
- Sebességkonverziós jelfeldolgozás
- Jeldigitalizálás és rekonstrukció
- Modemek

Diszkrét értékű véletlen jel

Definíció az időtartományban:

▪**Diszkrét értékű véletlen jel**, azaz diszkrét sztochasztikus folyamat alatt

a ξ_n , n = -∞ … +∞, valós **valószínűségi változó sorozat**ot értjük.

A ξ_n valószínűségi változók T időközökként követik egymást, a jel (a folyamat) órájának frekvenciája F= 1/T.

A továbbiakban a (diszkrét)

- véletlen jel,

- sztochasztikus folyamat, folyamat,

- véletlen forrás, forrás

kifejezéseket szinonimaként fogjuk használni,

mindig valószínűségi változó sorozatot értünk rajta.

Diszkrét idejű véletlen jelek leírása

- **eloszlás** sokaság
- **sűrűség** sokaság
- **momentum** sokaság

Eloszlás sokaság

A ξ_n véletlen jelnek (valószínűségi változó sorozatnak) az N darab n_1, n_2, ... n_N indexű időpontokra illeszkedő **N-dimenziós eloszlás függvénye**, az N darab $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \ldots \xi_{n_N}$ valószínűségi változók együttes eloszlás függvénye, azaz

$$F_{\xi \; n_1,n_2,\ldots n_N}(x_1, x_2, \ldots x_N) = \Pr(\xi_{n_1} \le x_1, \xi_{n_2} \le x_2, \ldots \xi_{n_N} \le x_N)$$

Egydimenziós eloszlás (amlitúdó eloszlás): $F_{\xi,n}(x) = \Pr(\xi_n \le x)$

általában időfüggő: $F_{\xi,n}(x) = F_\xi(n, x)$

De lehet időfüggetlen is: $F_{\xi,n}(x) = F_\xi(x)$

Sűrűség sokaság

A ξ_n véletlen jelnek (valószínűségi változó sorozatnak)

az N darab n_1, n_2, ... n_N indexű időpontokra illeszkedő

N-dimenziós eloszlás sűrűsége, az N darab valószínűségi változók együttes eloszlás sűrűségfüggvénye, azaz

$$f_{\xi_{n_1,n_2,\ldots n_N}}(x_1,x_2,\ldots x_N) = \frac{\partial^N F_{\xi_{n_1,n_2,\ldots n_N}}(x_1,x_2,\ldots,x_N)}{\partial x_1 \cdot \partial x_1 \cdot \ldots \cdot \partial x_N}$$

Momentum sokaság

A ξ_n véletlen jelnek (valószínűségi változó sorozatnak)

az N darab n_1, n_2, ... n_N indexű időpontokra illeszkedő **N-dimenziós**,

$m_1+m_2+...+m_N$ = **M –ed rendű**

momentuma

az N darab $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \ldots \xi_{n_N}$ valószínűségi változók m_1 m_2 ... m_N hatványai szorzatának a **várható érték**e:

$$M_{\xi_{n_1,n_2,\ldots,n_N}}^{m_1+m_2+\ldots+m_N=M} = E\left\{\xi_{n_1}^{m_1} \cdot \xi_{n_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot \xi_{n_N}^{m_N}\right\}$$

Centrális momentum:

$$C_{\xi_{n_1,n_2,\ldots,n_N}}^{m_1+m_2+\ldots+m_N=M} = E\left\{\left(\xi_{n_1} - E\left\{\xi_{n_1}\right\}\right)^{m_1} \cdot \left(\xi_{n_2} - E\left\{\xi_{n_2}\right\}\right)^{m_2} \cdot \ldots \cdot \left(\xi_{n_N} - E\left\{\xi_{n_N}\right\}\right)^{m_N}\right\}$$

Várható érték

Várható érték:

- az $F_\eta(x)$ eloszlásból
- az $f_\eta(x)$ sűrűségből

$$E\{\eta\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \; dF_\eta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \; f_\eta(x)dx$$

- $\eta = g(\xi)$ függvény szerinti

$$E\{g(\xi)\} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_\xi(x)$$

$$E\left\{\xi_{n_1}^{m_1} \cdot \xi_{n_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot \xi_{n_N}^{m_N}\right\} = \int x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot x_N^{m_N} \; dF_{\xi \; n_1, n_2, \ldots n_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

$$E\left\{\xi_{n_1}^{m_1} \cdot \xi_{n_2}^{m_2} \cdot \ldots \cdot \xi_{n_N}^{m_N}\right\} = \iint \ldots \int x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot x_N^{m_N} \; f_{\xi \; n_1, n_2, \ldots n_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N) \; dx_1 dx_2 \ldots dx_N$$

Nevezetes folyamat jellemzők

- *Egy- és kétdimenziós*
- *Első és másod rendű*

Nevezetes momentumok:

- Várható érték: egydimenziós, elsőrendű momentum
- Teljesítmény, négyzetes várható érték: egydimenziós, másodrendű momentum
- Szórásnégyzet, (variancia, szórás, standard deviation): egydimenziós, másodrendű, centrális momentum
- Autókorreláció: kétdimenziós, másodrendű momentum
- kovariancia: kétdimenziós, másodrendű, centrális momentum
- Várható érték vektor, kovariacia mátrix