Híradástechikai jelfeldolgozás

Véletlen jelek

2015. 04. 03.

Dr. Gaál József

BME Hálózati Rendszerek és SzolgáltatásokTanszék

gaal@hit.bme.hu

2015. április 3.
Budapest

Nevezetes véletlenjel osztályok

- Gauss folyamat
- Memóriamentes és korrelálatlan folyamatok
- Stacioner (invariáns) folyamatok
- Keskenysávú stacioner
- Szélessávú stacioner

Gauss folyamat

A ξ_n folyamatot Gauss folyamatnak nevezzük, ha minden N dimenziós eloszlása normális:

$$\overline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_{n_1} & \xi_{n_2} & \dots & \xi_{n_N} \end{bmatrix}^T$$

$$\overline{m} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}\{\xi_{n_1}\} & \mathrm{E}\{\xi_{n_2}\} & \dots & \mathrm{E}\{\xi_{n_N}\} \end{bmatrix}^T$$

$$\boxed{\mathrm{f}_\xi\left(n_1, n_2, \dots, n_N, \overline{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \underline{\underline{\Sigma}}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\overline{x}-\overline{m})^T \underline{\underline{\Sigma}}^{-1}(\overline{x}-\overline{m})}}$$

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mathrm{E}\left\{\left(\overline{\xi} - \overline{m}\right)\cdot\left(\overline{\xi} - \overline{m}\right)^T\right\} = \begin{bmatrix} c_\xi(n_1, n_1) & c_\xi(n_1, n_2) & \dots & c_\xi(n_1, n_N) \\ c_\xi(n_2, n_1) & c_\xi(n_2, n_2) & \dots & c_\xi(n_2, n_N) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_\xi(n_N, n_1) & c_\xi(n_N, n_2) & \dots & c_\xi(n_N, n_N) \end{bmatrix}$$

Következmény:

A Gauss folyamatokat teljesen meghatározzák első- és másodrendű momentumai.

Az első- és másodrendű momentumok teljes leírást adnak.

Memóriamentes folyamatok

Definició:

Ha a ξ_n folyamat minden véges dimenziós $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \ldots, \xi_{n_N}$ mintájának elemei **független valószínűségi változók**, akkor ξ_n **memóriamentes** folyamat.

Következmény:

A többdimenziós folyamat jellemzők az egydimenziós jellemzők szorzatai.

$$F_{\xi_{n_1,n_2,\ldots n_N}}(x_1, x_2, \ldots x_N) = \prod_{i=1}^{N} F_{\xi_{n_i}}(x_i)$$

$$f_{\xi_{n_1,n_2,\ldots n_N}}(x_1, x_2, \ldots x_N) = \prod_{i=1}^{N} f_{\xi_{n_i}}(x_i)$$

Az egydimenziós jellemzők egésze, a folyamat teljes leírását adják.

$$M_{\xi_{n_1,n_2,\ldots,n_N}}^{m_1+m_2+\ldots+m_N=M} = \prod_{i=1}^{N} M_{\xi_{n_i}}^{m_i}$$

Korrelálatlan folyamat

Definició:

- Ha minden valószínűségi változó párra a kovariancia együttható zérus, akkor a folyamat **korrelálatlan:**

$$\mathrm{E}\left\{\left(\xi_{n_1} - m_\xi(n_1)\right)\cdot\left(\xi_{n_2} - m_\xi(n_2)\right)\right\} = c_\xi(n_1, n_2) = 0 \qquad , n_1 \neq n_2$$

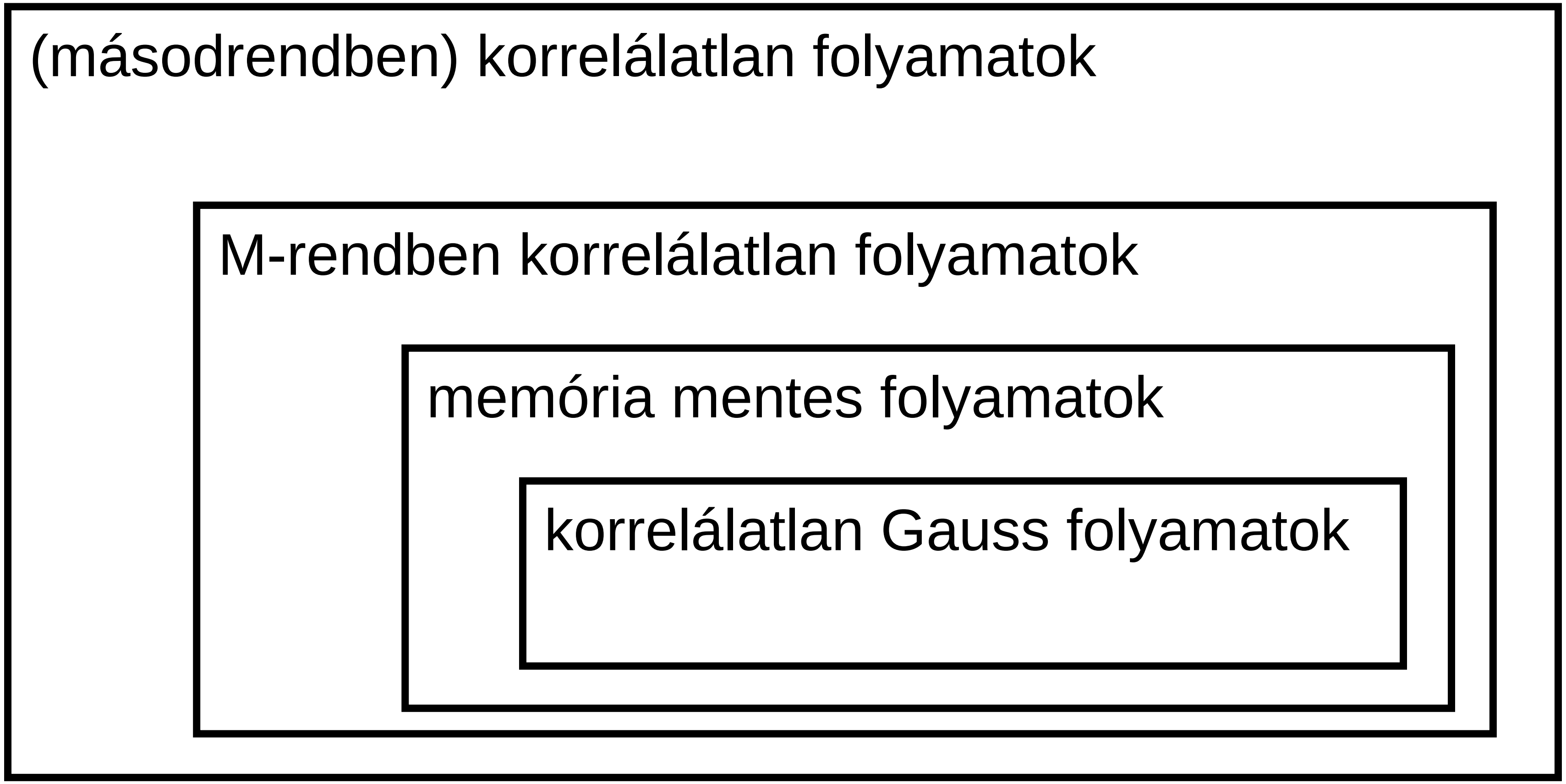
Állítás:

- Korrelálatlan Gauss folyamat memória mentes.

Definició:

- Ha egy folyamatra igaz, hogy minden M-dimenziós, M-ed rendű momentum előállítható a megfelelő egydimenziós momentumok szorzataként, akkor a folyamat **M-rendben korrelálatlan.**

Korrelálatlanság, memóriamentesség



Stacioner (invariáns) folyamatok

Definíció:

- Ha ξ_n bármely N dimenziójú és $(n_1, n_2, \dots n_N)$ illeszkedésű F_ξ eloszlása invariáns bármely n_o értékű időbeli eltolásra, (azaz idő független), akkor a ξ_n folyamat **stacioner**.

$$\mathrm{F}_{\xi\ n_1,n_2,\dots,n_N}\left(x_1, x_2, \dots, x_N\right) = \mathrm{F}_{\xi\ n_1-n_0,n_2-n_0,\dots,n_N-n_0}\left(x_1, x_2, \dots, x_N\right)$$

Következmények:

$$\mathrm{f}_{\xi\ n_1,n_2,\dots,n_N}\left(x_1, x_2, \dots, x_N\right) = \mathrm{f}_{\xi\ n_1-n_0,n_2-n_0,\dots,n_N-n_0}\left(x_1, x_2, \dots, x_N\right)$$

$$\mathrm{M}_{\xi_{\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2,\dots,\mathrm{n}_N}}^{\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2+\dots+\mathrm{m}_N=\mathrm{M}} = \mathrm{M}_{\xi_{\mathrm{n}_1-\mathrm{n}_o,\mathrm{n}_2-\mathrm{n}_o,\dots,\mathrm{n}_N-\mathrm{n}_o}}^{\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2+\dots+\mathrm{m}_N=\mathrm{M}}$$

Stacioner folyamatok (2)

Következmények:

- Az egy dimenziós, eredetileg időfüggő jellemzők, idő függetlenné válnak:
  - amplitúdó eloszlás: $F_{\xi\, n}(x) = F_{\xi\, 0}(x) = F_{\xi}(x)$
  - amplitúdó sűrűség: $f_{\xi\, n}(x) = f_{\xi\, 0}(x) = f_{\xi}(x)$
  - várható érték: $m_{\xi}(n) = m_{\xi}(0) = m_{\xi}$
  - átlag teljesítmény: $P_{\xi}(n) = P_{\xi}(0) = P_{\xi}$
  - szórásnégyzet (variancia): $\sigma_{\xi}^2(n) = \sigma_{\xi}^2(0) = \sigma_{\xi}^2$
- A kétdimenziós momentumok eredetileg két dimenziós sorozatai egydimenziós sorozattal leírhatókká válnak:
  - korreláció: $M^{1+1=2}_{\xi_{n_1, n_1+\Delta n}} = r_{\xi}(n_1, n_1 + \Delta n) = r_{\xi}(\Delta n)$
  - kovariancia: $C^{1+1=2}_{\xi_{n_1, n_1+\Delta n}} = c_{\xi}(n_1, n_1 + \Delta n) = c_{\xi}(\Delta n)$
- Stacioneritás $\rightarrow$ dimenzió redukció

Stacioner folyamat jellemzői

Várható érték m_ξ

Átlag teljesítmény P_ξ

Korreláció $r_\xi(n) = r_\xi(-n)$ $\quad |r_\xi(n)| \le r_\xi(0) = P_\xi,$

Kovariancia $c_\xi(n) = c_\xi(-n)$ $\quad |c_\xi(n)| \le c_\xi(0) = \sigma_\xi^2$

$$r_\xi(n) = c_\xi(n) + m_\xi^{\ 2}$$

Teljesítménysűrűség

$$S_\xi(z) = Z\{c_\xi(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_\xi(n) \cdot z^{-n} \qquad \mathbf{S}_\xi(z) = \mathbf{S}_\xi(z^{-1})$$

$$S_\xi(f) = F\{c_\xi(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_\xi(n) e^{-j2\pi 2\pi fT} \qquad S_\xi(f) \ge 0 \quad S_\xi(f) = S_\xi(-f)$$

Stacioner osztályok

Gyengén stacioner folyamat:

Az egydimenziós eloszlás és a másodrendű momentumok invariánsak.

- gyengén stacioner folyamatok
  - M-rendben stacioner folyamatok
    - stacioner folyamatok
      - gyengén stacioner Gauss folyamatok

Véletlen fázisú szinusz

$\xi_n = \sin(2\pi f_o nT + \varsigma)$, $n = -\infty \ldots \infty$, ς : egyenletes eloszlás 0- 2π felett

$$m_\xi(n) = E\{\xi_n\} = E\{\sin(2\pi f_o nT + \varsigma)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi f_o nT + x)\, f_\varsigma(x) dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(2\pi f_o nT + x)\, dx = 0 = m_\xi$$

$$r_\xi(m,n) = E\{\xi_m \xi_{m+n}\} = E\{\sin(2\pi f_o mT + \varsigma)\sin(2\pi f_o (m+n)T + \varsigma)\} =$$

$$= E\left\{\frac{1}{2}(\cos(2\pi f_o nT) - \cos(2\pi f_0 (2m+n)T + 2 * \varsigma))\right\} = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_o nT) = r_\xi(n)$$

$$\mathcal{F}\{c_\xi(n)\} = \mathcal{F}\{r_\xi(n)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\cos(2\pi f_o nT)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{4}(e^{j2\pi f_o nT} + e^{-j2\pi f_o nT})\right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\tilde{\delta}_F(f - f_0) + \tilde{\delta}_F(f + f_0)\right)$$

Véletlen fázisú szinusz

$\xi_n = \sin(2\pi f_o nT + \varsigma)$, $n = -\infty \ldots \infty$,

- ς a $[0, 2\pi]$ intervallum felett egyenletes eloszlású valószínűségi változó és
- $f_o < F/2 = 1/2T$

Várható érték: $$m_\xi(n) = E\{\xi_n\} = E\{\sin(2\pi f_o nT + \varsigma)\} = 0 = m_\xi$$

korreláció: $$r_\xi(m,n) = E\{\xi_m \xi_{m+n}\} = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_o nT) = r_\xi(n)$$

$\rightarrow$ *gyengén stacioner*

teljesítmény sűrűség: $$F\{c_\xi(n)\} = F\{r_\xi(n)\} = \frac{1}{4}\left(\tilde{\delta}_F(f - f_0) + \tilde{\delta}_F(f + f_0)\right)$$

$\rightarrow$ *keskenysávú jel*

Fehér zaj

Definíció:

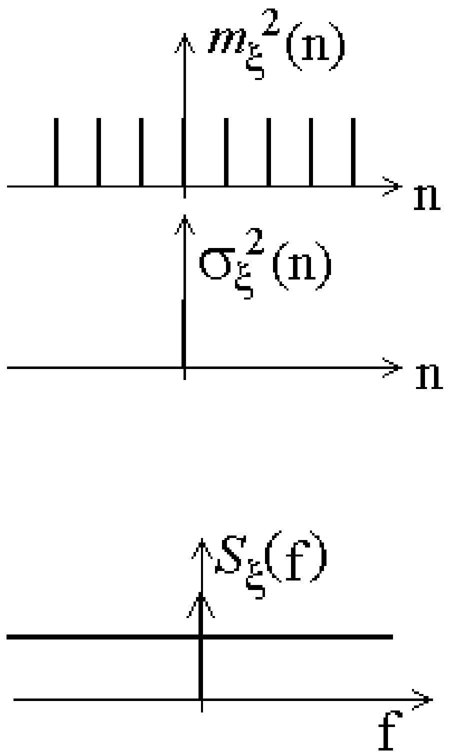
memóriamentes és stacioner

Következmény:

korrelálatlan,

$r_\xi(n) = c_\xi(n) + m_\xi^2(n)$,

ahol $c_\xi(n) = \sigma^2\delta_n$ és $m_\xi(n) = m$.



Teljesítmény sűrűség:

$S_\xi(f) = \sigma^2$, m=0

nincs frekvencia szelektivitás

„szélessávú jel”

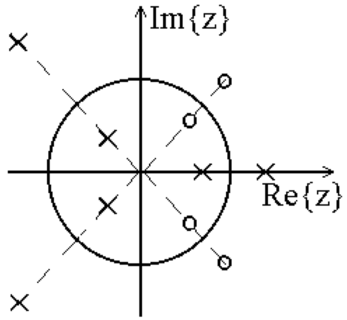
ARMA folyamat

Definíció:

stacioner,

S$_\xi$(z) racionális tört

$$S_\xi(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$



mivel $S_\xi(z) = S_\xi(z^{-1})$,
létezik az alábbi dekompozició:

$$S_\xi(z) = \frac{A_o(z)\ A_o(z^{-1})}{B_o(z)\ B_o(z^{-1})}$$

Stacioner folyamat áthaladása lineáris, invariáns rendszeren

$$\xi_n \longrightarrow \boxed{h_n,\, H(z),\, H(f)} \longrightarrow \eta_n$$

$$\eta_n = h_h * \xi_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \cdot \xi_{n-i}$$

várható érték:

$$m_\eta = \mathrm{E}\{\eta_n\} = \mathrm{E}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \cdot \xi_{n-i}\right\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \cdot \mathrm{E}\{\xi_{n-i}\} = m_\xi \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i$$

korreláció:

$$r_\eta(n) = \mathrm{E}\{\eta_m \cdot \eta_{m+n}\} = \mathrm{E}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \cdot \xi_{m-i} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \cdot \xi_{m+n-k}\right\} = \mathrm{E}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_i \cdot h_k \cdot \xi_{m-i} \cdot \xi_{m+n-k}\right\}$$

$$r_\eta(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_i \cdot h_k \cdot \mathrm{E}\{\xi_{m-i} \cdot \xi_{m+n-k}\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} h_i \cdot h_{j+i} \cdot \mathrm{E}\{\xi_{m-i} \cdot \xi_{m-i+n-j}\} \quad (k = i + j)$$

$$\mathrm{E}\{\xi_{m-i} \cdot \xi_{m-i+n-j}\} = r_\xi(n-j) \qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_i \cdot h_{j+i} = h_n * h_{-n}$$

Stacioner folyamat áthaladása lineáris, invariáns rendszeren

$$\xi_n \longrightarrow \boxed{h_n,\, H(z),\, H(f)} \longrightarrow \eta_n$$

$$\eta_n = h_h * \xi_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \cdot \xi_{n-i}$$

várható érték:

$$\boxed{m_\eta = \mathrm{E}\{\eta_n\} = m_\xi \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i}$$

korreláció:

$$\boxed{r_\eta(n) = r_\xi(n) * h_n * h_{-n}}$$

teljesítmény sűrűség:

$$\boxed{S_\eta(z) = S_\xi(z)\ \ H(z)\ \ H(z^{-1})}$$

$$\boxed{S_\eta(f) = S_\xi(f) \cdot \left|H(f)\right|^2}$$

Stacioner folyamat áthaladása lineáris, invariáns rendszeren

$$\xi_n \longrightarrow \boxed{h_n,\, H(z),\; H(f)} \longrightarrow \eta_n$$

$$\eta_n = h_h * \xi_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \cdot \xi_{n-i}$$

Következmények:

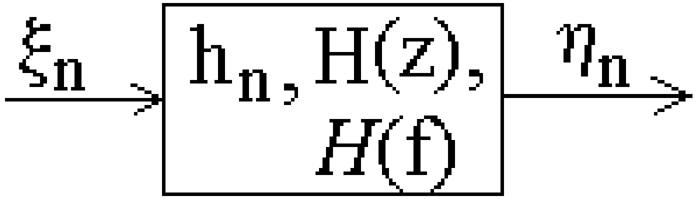
Ha ξ_n ARMA folyamat,
$$S_\xi(z) = \frac{A_\xi(z)}{B_\xi(z)} = \frac{A'_\xi(z)\cdot A'_\xi(z^{-1})}{B'_\xi(z)\cdot B'_\xi(z^{-1})}$$

és ha H(z) is ARMA rendszer,
$$H(z) = \frac{M(z)}{N(z)}$$

akkor a kimeneti η_n stacioner folyamat is ARMA lesz melynek teljesítménysűrűsége:

$$S_\eta(z) = \frac{A'_\xi(z)\cdot A'_\xi(z^{-1})\cdot M(z)\cdot M(z^{-1})}{B'_\xi(z)\cdot B'_\xi(z^{-1})\cdot N(z)\cdot N(z^{-1})}$$

Stacioner folyamat áthaladása lineáris, invariáns rendszeren



$$\eta_n = h_h * \xi_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i \cdot \xi_{n-i}$$

Teljesítmény:

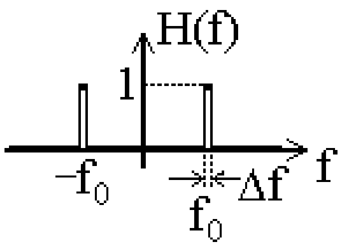
$$r_\eta(n) = \boldsymbol{F}^{-1}\{S_\eta(\mathrm{f})\} = \frac{1}{f_c}\int_{-f_c/2}^{f_c/2} S_\eta(\mathrm{f})\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\mathrm{fT}}\,df$$

mivel

így a teljesítményre kapjuk:

$$\boxed{P_\eta = r_\eta(0) = \frac{1}{f_c}\int_{-f_c/2}^{f_c/2} S_\eta(\mathrm{f})\,df}$$

teljesítmény sűrűség értelmezése:



$$\Delta P_\eta(f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_\eta(\mathrm{f})\,df = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\mathrm{f})| \cdot S_\xi(\mathrm{f})\,df = 2 \cdot \int_{f_0}^{f_0+\Delta f} S_\xi(\mathrm{f})\,df$$

$$\Delta P_\eta(f_0) \approx 2 \cdot \Delta\mathrm{f} \cdot S_\xi(\mathrm{f}_0)$$

Fehérírő (analízis), és színező (szintézis) szűrők

$$\xi_n,\ S_\xi(z) \rightarrow \boxed{H(z)=\frac{M(z)}{N(z)}} \rightarrow \eta_n,\ S_\eta(z)$$

Adott a bemeneti színes, korrelált folyamat,

keressük azt a szűrőt mely ebből fehér zajt csinál (dekorrelátor):

$$S_\xi(z)=\frac{A'_\xi(z)\cdot A'_\xi(z^{-1})}{B'_\xi(z)\cdot B'_\xi(z^{-1})} \qquad S_\eta(z)=1 \qquad H(z)=\frac{M(z)}{N(z)}=\frac{B'_\xi(z)}{A'_\xi(z)}$$

Adott a kivánt kimemeti jel teljesítménysűrűsége,

keressük azt a szűrőt mely ezt fehér zajból előállítja:

$$S_\eta(z)=\frac{A'_\eta(z)\cdot A'_\eta(z^{-1})}{B'_\eta(z)\cdot B'_\eta(z^{-1})} \qquad S_\varsigma(z)=1 \qquad H(z)=\frac{M(z)}{N(z)}=\frac{A'_\eta(z)}{B'_\eta(z)}$$