Híradástechikai jelfeldolgozás

13. Előadás 2015. 04. 24.

Jeldigitalizálás és rekonstrukció

Dr. Gaál József

docens

BME Hálózati Rendszerek és SzolgáltatásokTanszék

gaal@hit.bme.hu

2015. április 27.
Budapest

Tartalom

- Bevezetés
- Kvantálás
- Differenciális, prediktív kódolás
- Részsávú kódolás
- Transzformációs kódolás

Bevezetés

Lehetséges szinoním címek:

- Forrás kódolás
  - Jel-forrás (nem adat forrás)
  - veszteséges, hűség kritériummal
- Jel digitalizálás
  - (és rekonstrukció)
- Jeltömörítés
  - veszteséges, hűség kritériummal
- Analóg jel átvitele digitális csatornán

Bevezetés: az alapmodell

Analóg forrás $\xrightarrow{x(t)}$ Kódoló $\xrightarrow{c_n}$ Digitális csatorna $\xrightarrow{c'_n}$ Dekódoló $\xrightarrow{y(t)}$ Analóg nyelő

Analóg jel (hang, kép, adat, stb.): forrás: $x(t)$ rekonstrált: $y(t)$

- Időben, térben változó (elektronikusan reprezentálható) fizikai jellemző
- matematikai modell:
  - folytonos idő/tér valós függvénye(i) (egy, két, több változós, skalár, vektor ...értékű)
  - folytonos sztochasztikus folyamatok

Digitális jel c_n c'_n

- véges (binárisan kódolható) szimbólumhalmaz elemeinek sorozatai (időben, címtartományban)
- matematikai modell
  - számsorozat
  - valószínűségi változó sorozat, diszkrét sztochasztikus folyamat

Bevezetés: az alapmodell

Digitális csatorna

- Térbeli transzláció: (digitális) távközlés
- Időbeli transzláció: (digitális) jelrögzítés

Kódoló: digitalizálás: idő(tér) és amplitúdó diszkretizálás

- Mintavételezés: idő(tér) diszkretizálás → valós számsorozat, val. vált. sorozat
- Kvantálás: amplitúdó diszkretizálás → véges értékkészlet
- kódolás → digitális kód szekvencia

Dekódoló: rekonstrukció

- Dekódolás → minta index
- analóg minta rekonstrukció → diszkrét minta sorozat
- simító szűrés, interpoláció: időben (térben) folytonos analóg kimenet

Bevezetés: az alapmodell

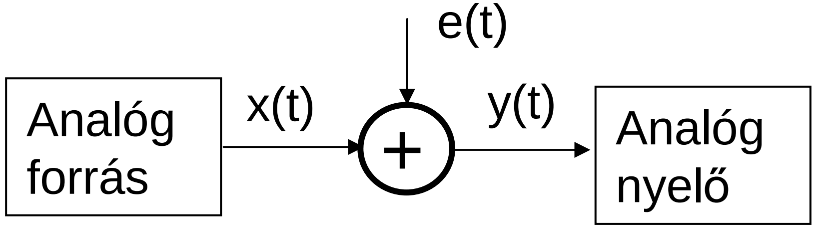
Minősítés

Hibajel: e(t) = y(t) – x(t)

Torzítás

Zaj

Additív hiba (torzítás, zaj) modell:



SNR (Signal to Noise Ratio)

$$\mathrm{SNR} = \frac{\text{jel teljesítmény}}{\text{hiba teljesítmény}} = \frac{\overline{x^2(t)}}{\overline{e^2(t)}} = \frac{\overline{x^2(t)}}{\overline{\left(y(t)-x(t)\right)^2}}$$

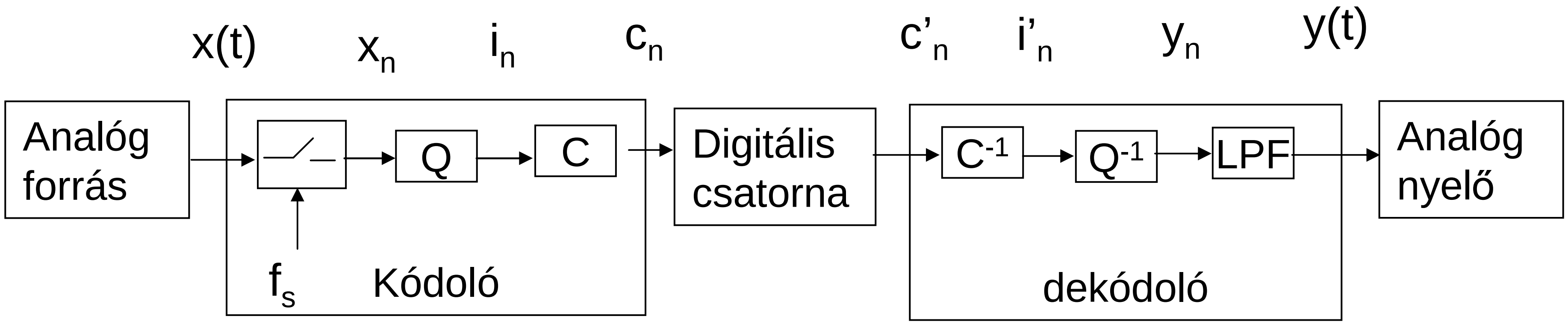
SNRdb

$$\mathrm{SNRdb} = 10\log_{10}\mathrm{SNR}$$

Hullámforma kódolás!

(van más is!)

Bevezetés: az alapmodell



Kódoló: digitalizálás: idő(tér) és amplitúdó diszkretizálás

Mintavételezés: idő(tér) diszkretizálás → valós számsorozat, val. vált. sorozat

Kvantálás: amplitúdó diszkretizálás → véges értékkészlet

kódolás → digitális kód szekvencia

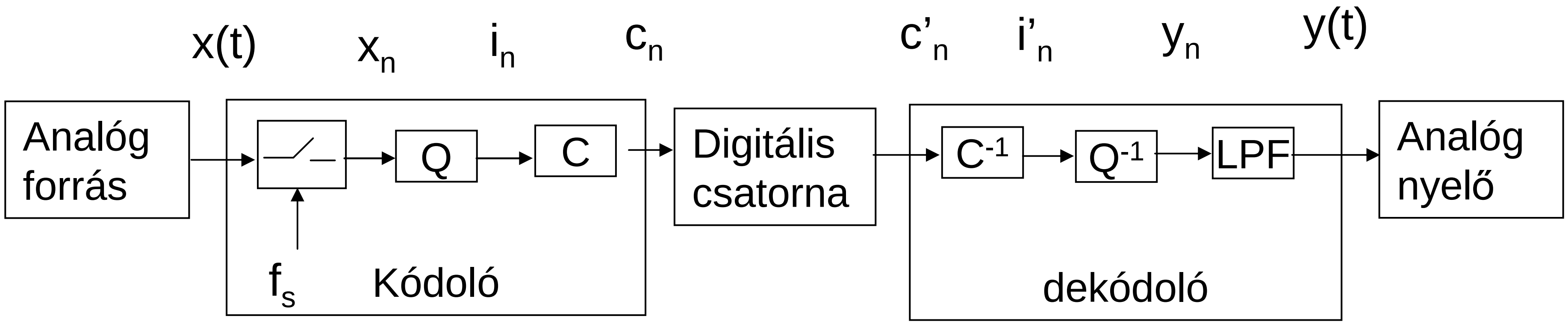
Dekódoló: rekonstrukció

Dekódolás → minta index

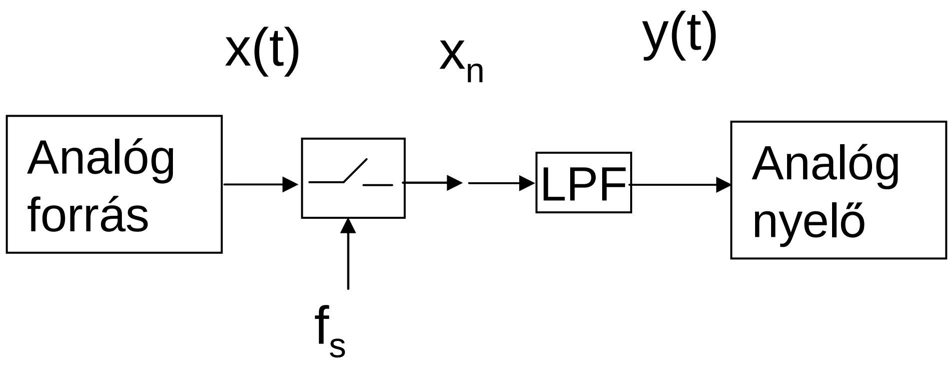
analóg minta rekonstrukció → diszkrét minta sorozat

simító szűrés, interpoláció: időben (térben) folytonos analóg kimenet

Bevezetés: mintavételezés



Ideális csatorna: $c_n = c'_n$ és nincs kvantálás: $y_n = x_n$



Ha x(t) sávhatárolt:

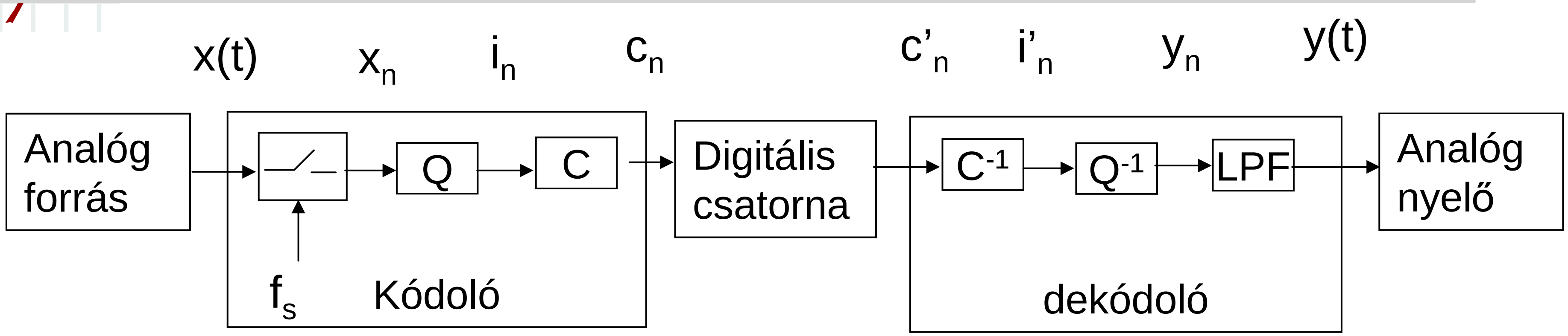
$F\{x(t)\}=X(f)=0, \quad |f| > B$

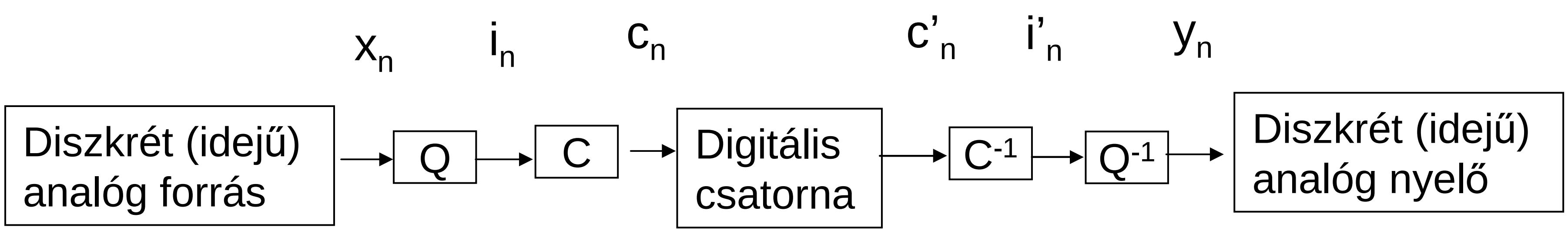
és $f_s \geq 2B$

és LPF határfrekvencia $f_h=B$

akkor $y(t)=x(t)$

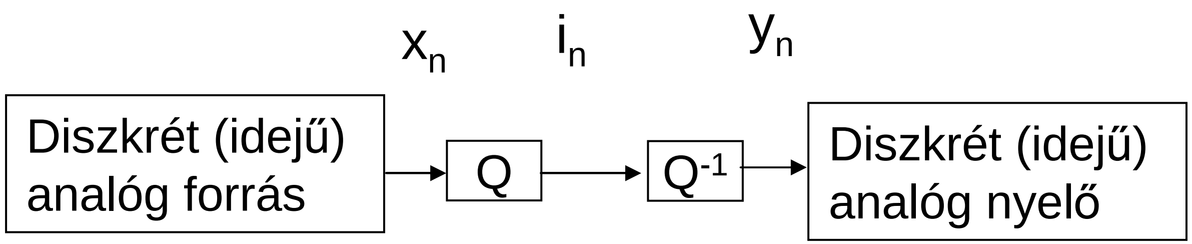
Kvantálás

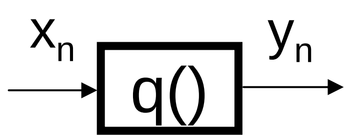




Ideális csatorna:

$c_n = c'_n \quad i_n = i'_n$

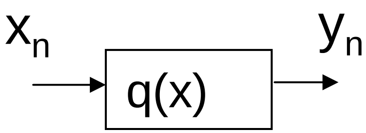




Kvantálás

Kvantáló,

mint diszkrét idejű input-output doboz

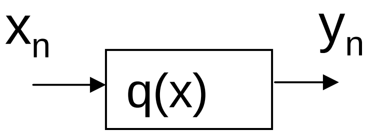


- valós
- memória mentes: $y_n = q(n, x_n)$
- invariáns: $y_n = q(x_n)$
- véges kimeneti értékkészlet: $y_n \in [Y_1, Y_2, \ldots Y_L]$
- nem lineáris
- monoton

Kvantálás

Kvantáló,

mint diszkrét idejű input-output doboz



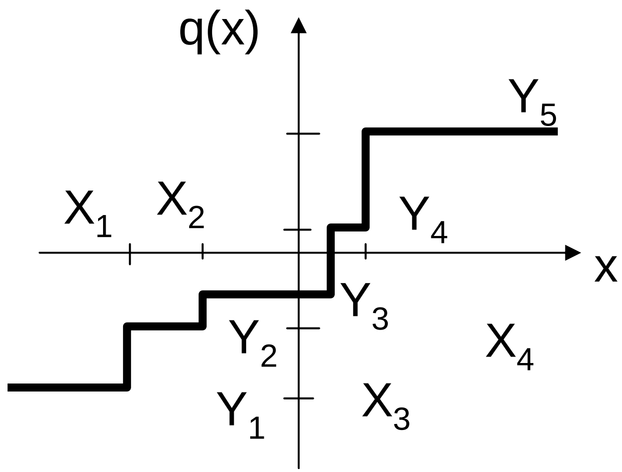
L szintű lépcsős kvantálási karakterisztika:

bemeneti intervallum felosztás: X_1, X_2, ... X_{L-1}

döntési intervallumok

kimeneti lehetséges értékek: Y_1, Y_2, ... Y_L

döntött (rekonstruált) értékek



$$y = q(x) = \begin{cases} Y_1, \text{ ha } x \in (-\infty, X_1) \\ Y_i, \text{ ha } x \in [X_{i-1}, X_L), i = 2, ..., L-1 \\ Y_L, \text{ ha } x \in [X_{L\text{-}1}, -\infty) \end{cases}$$

Kvantáló, inverz kvantáló, kódoló, dekódoló

Kvantáló

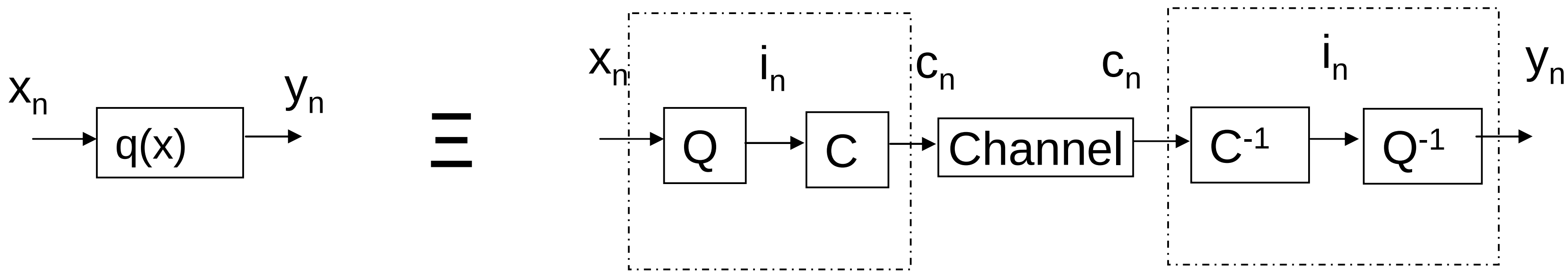
= bemeneti döntés + kimeneti rekonstrukció:

kvantáló, inverz kvantáló

i_n: index sorozat

Kvantáló,

kvantálás, kódolás, csatorna, dekódolás, rekonstrukció

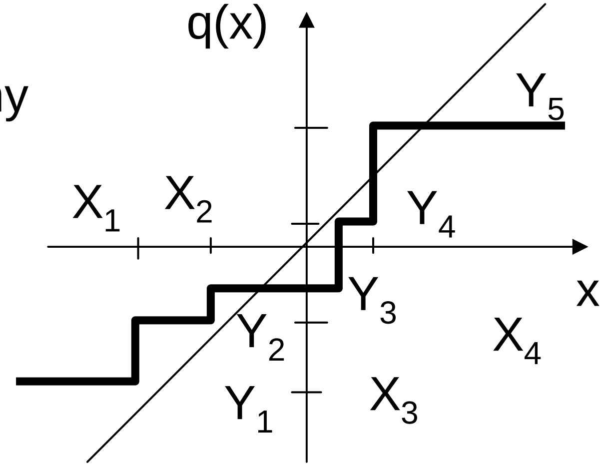


c_n: kód (szimbólum) sorozat

Kvantálási hiba

Kvantálási karakterisztika: $y_n = q(x_n)$

lépcsős függvény

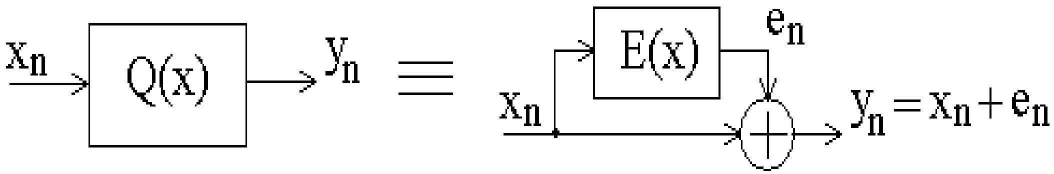


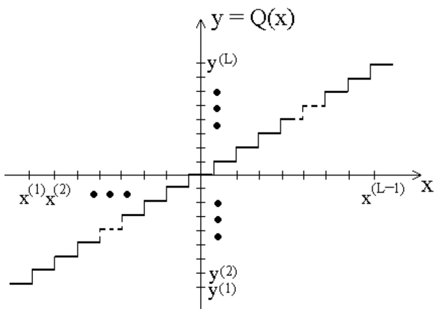
Kvantálási hiba: $e_n = y_n - x_n$

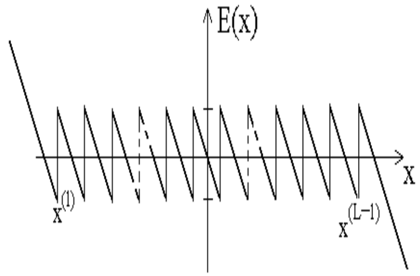
hiba karakterisztika: $E(x) = q(x) - x$

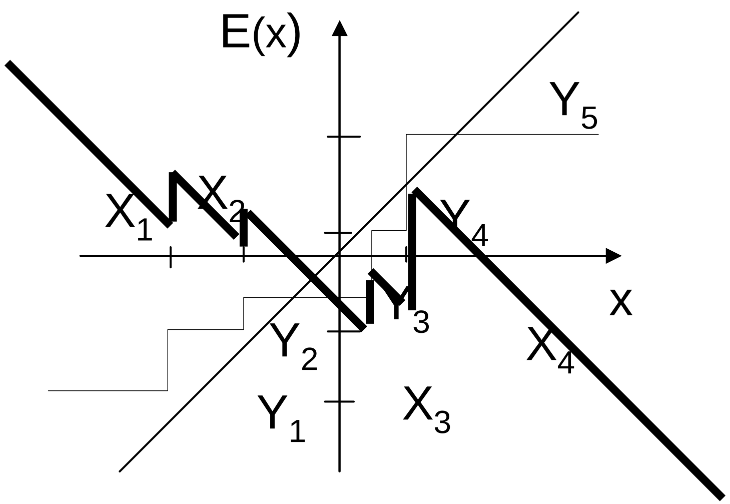
fűrész függvény

additív kvantáló modell: $y_n = x_n + E(x_n)$





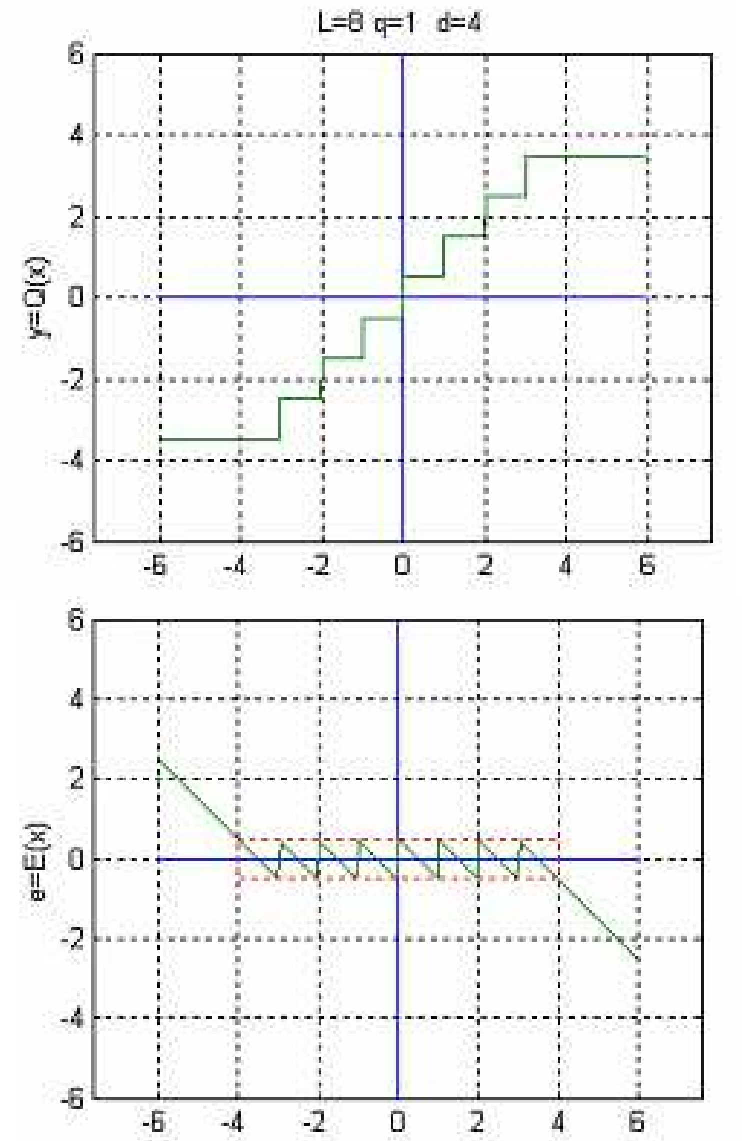




Nevezetes kvantáló (karakterisztika) típusok

- szimmetrikus: $Q(-x) = -Q(x)$
- egyenletes: $Y_{i+1} - Y_i = dy = q = dx = X_{i+1} - X_i \quad i=1...(L-1)$
  - kerekítéses
  - csonkolásos
- nem egyenletes
  - logaritmikus
  - Max-Lloyd

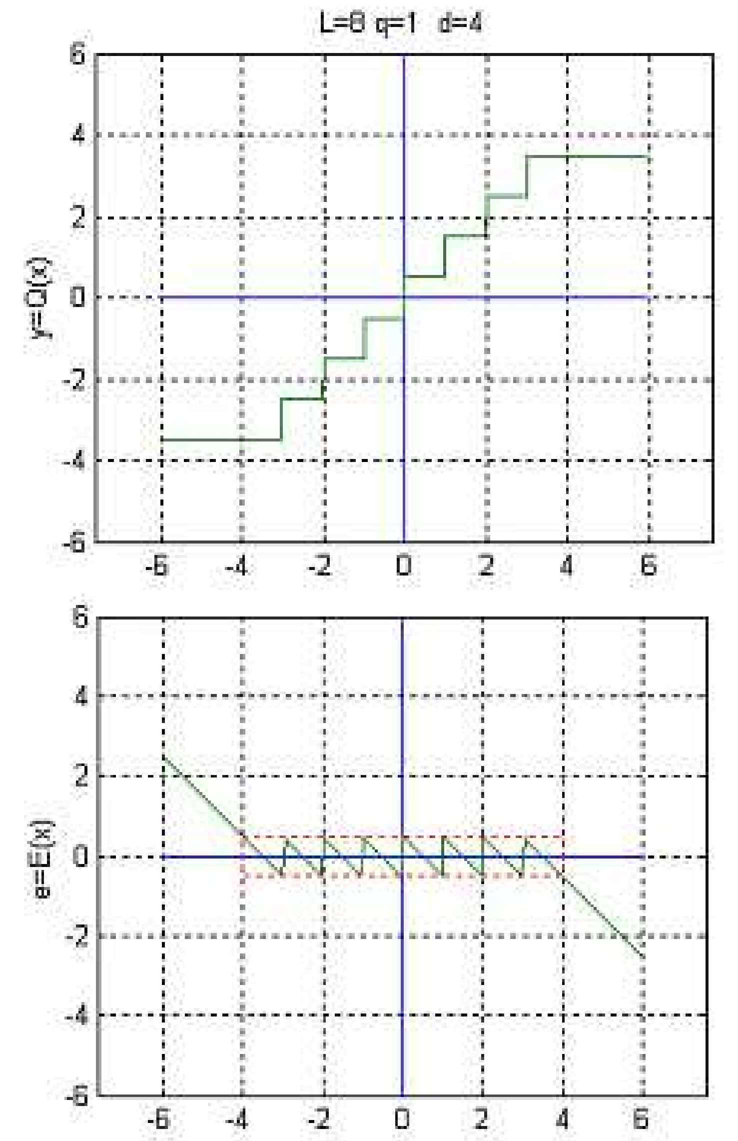
Szimmetrikus, egyenletes kvantáló



Jellemzői:

- szintek száma L= 8 szintű
- bitek száma: b=log2(L)
- kvantálási lépcső: q=1
- Dinamika tartomány:
  - ahol a hiba ≤ q/2
  - [-d,d] d=4

Szimmetrikus, egyenletes kvantáló



Üzemmódok:

- nagy jelű
  - túlvezérléses: |x|>d
- kis jelű
  - |x|< q/2
  - nullabemenetű
- normál üzemmód
  - q/2<|x|<d
  - kerekítéses, granuláris

Szimmetrikus, egyenletes kvantáló

Példa:

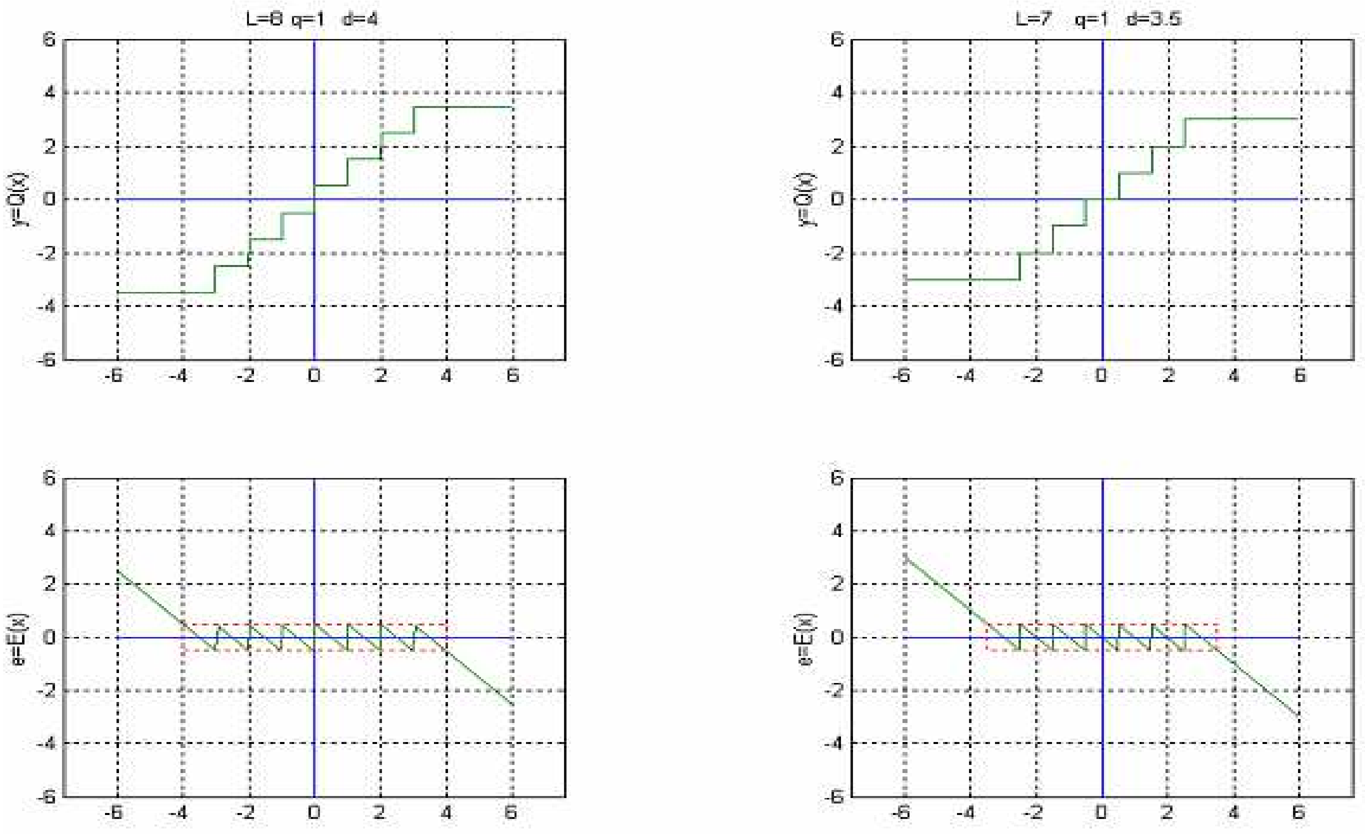
3 bites

kvantálási

és

hiba-

karakterisztikák:



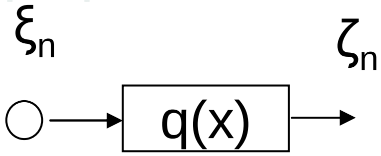
páros szintű

páratlan szintű

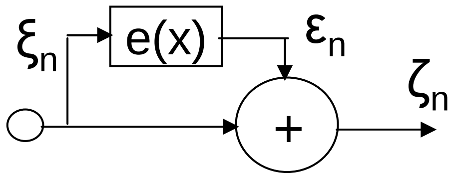
Kis jelű viselkedés: „Iddle channel noise”:

nulla bemenetű zaj teljesítmény: P= $q^2/4$

Stacioner forrás kvantálása



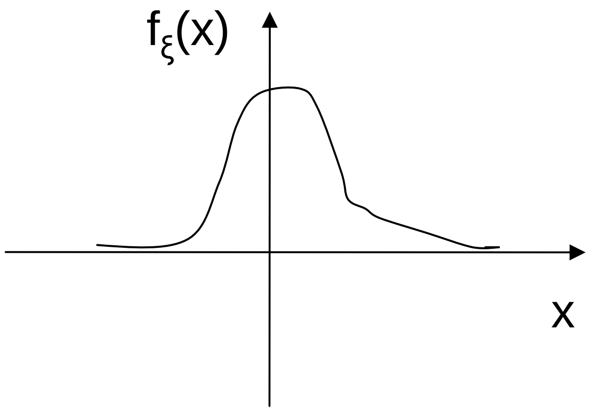
$\zeta_n = q(\xi_n)$

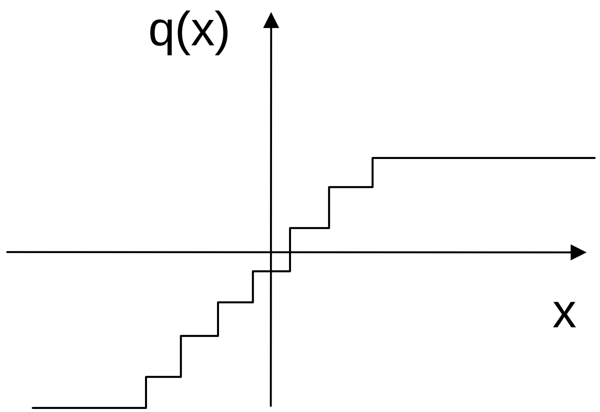


$\varepsilon_n = \zeta_n - \xi_n$

A ζ_n stacioner forrás: $f_\xi(x)$ pdf

Kvantáló: q(x), e(x)



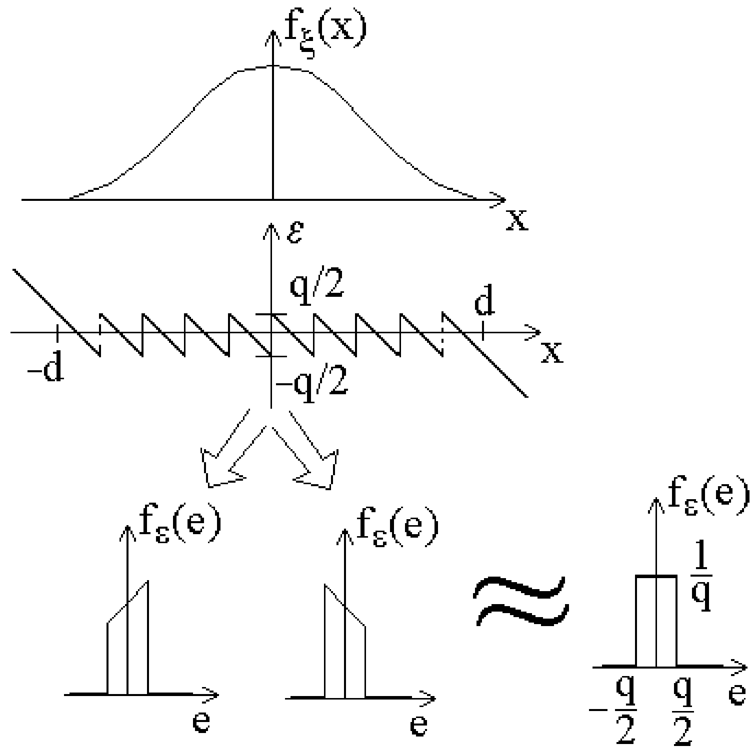


- bemeneti eloszlás tartója $\leftrightarrow$ a kvantáló dinamika tartománya
- kimeneti diszkrét eloszlás:
- túlvezérlés, normál működés valószínűsége
- hibajel eloszlása, teljesítménye

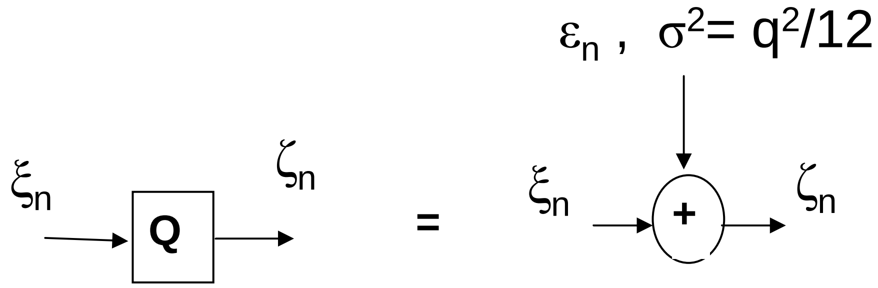
Stacioner forrás finom kvantálása

A kvantáló normál működési tartományban

A kvantálási hiba eloszlása:



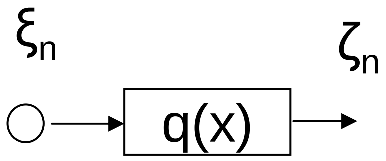
Finom kvantálás lineáris, additív zaj modellje, helyettesítő képe:

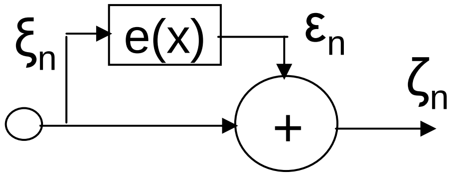


Kvantálás minősítése: SNR

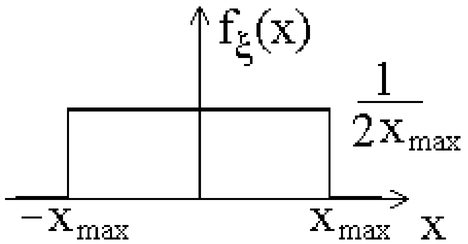
SNR = átlagos jelteljesítmény / átlagos hibateljesítmény

$$\mathrm{SNR} = \frac{P_\xi}{P_\varepsilon} = \frac{E\left\{\xi^2\right\}}{E\left\{\varepsilon^2\right\}} = \frac{E\left\{\xi^2\right\}}{E\left\{(\xi-\zeta)^2\right\}}$$



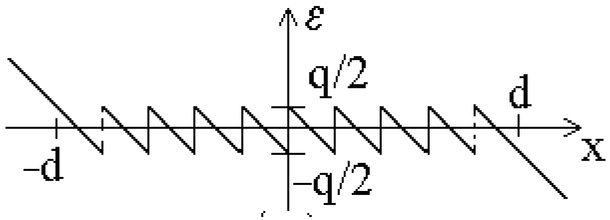


Egyenletes eloszlás egyenletes kvantálása



$$P_\xi = E\{\xi^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \int_{-x_{max}}^{x_{max}} x^2 \frac{1}{2x_{max}} dx = \frac{x_{max}^2}{3}$$

$$P_\varepsilon = pr\{normal\} P_{\varepsilon\, normal} + pr\{overload\} P_{\varepsilon\, overload}$$



$$P_{\varepsilon\, normal} = \frac{q^2}{12}$$

$$P_{\varepsilon\, overload} = E\{\varepsilon^2 \mid |\xi| > d\} =$$

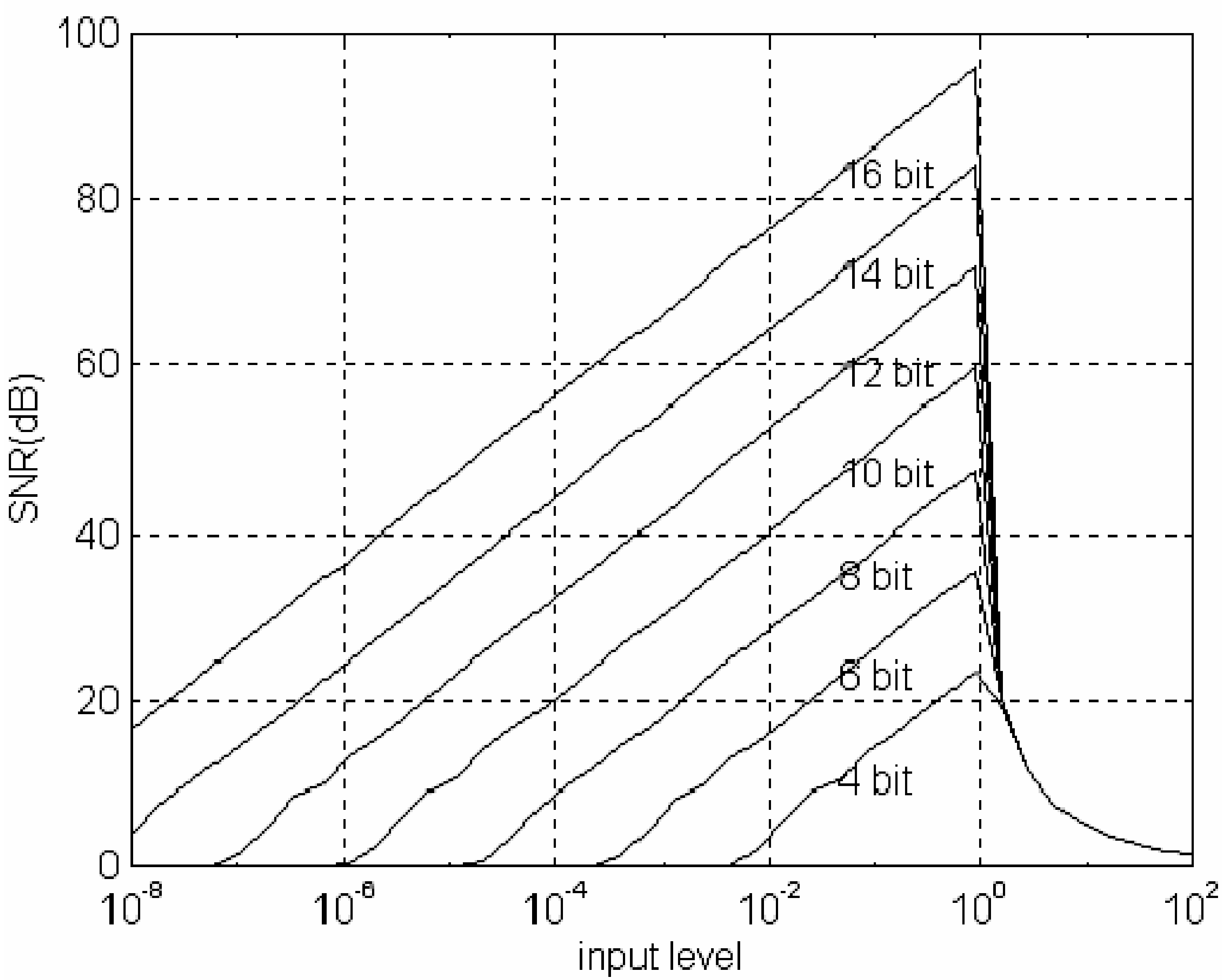
$$= \frac{\int_{-\infty}^{-d} (x - y_{min})^2 f_\xi(x)dx + \int_{d}^{\infty} (x - y_{max})^2 f_\xi(x)dx}{\int_{-\infty}^{-d} f_\xi(x)dx + \int_{d}^{\infty} f_\xi(x)dx}$$

- nulla várható érték
- szimmetrikus kvantáló

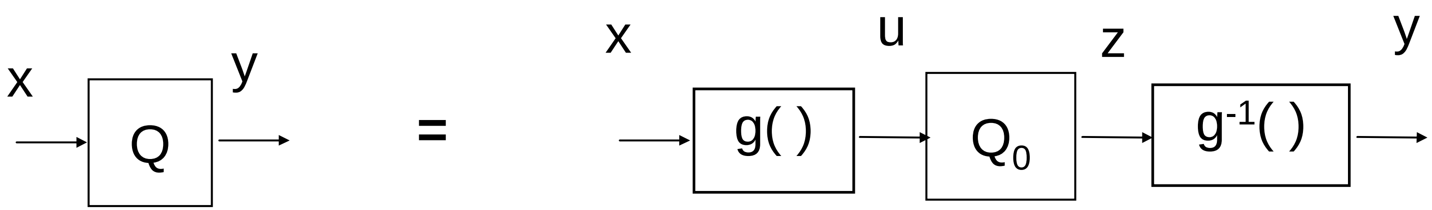
$$SNR_{max} = \frac{P_{\xi\, max}}{P_{\varepsilon\, normal}} = \frac{\frac{d^2}{3}}{\frac{q^2}{12}} = 4\left(\frac{d}{q}\right)^2 = 4\left(\frac{L}{2}\right)^2 = L^2 = 2^{2r}$$

r bites kvantáló: $SNR^{dB}_{max} = 6\ r$ [dB]

Egyenletes eloszlás egyenletes kvantálása



Nem egyenletes kvantálás

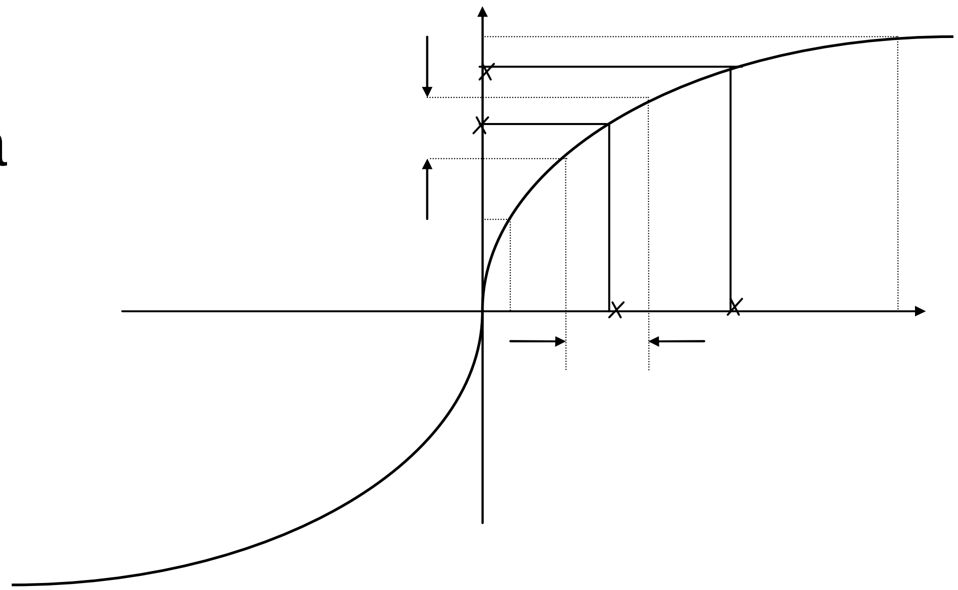


Q : nem egyenletes kvantáló

Q_0 : egyenletes kvantáló

g(x) : kompander larakterisztika

$g(x)^{-1}$: exander larakterisztika

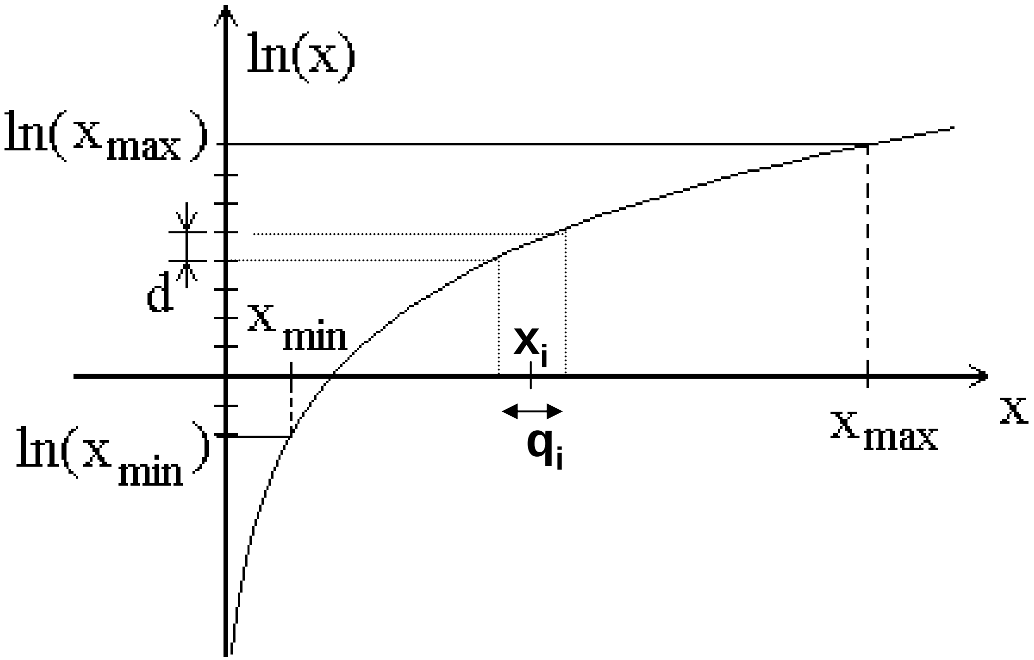


Logaritmikus kvantálás

Szimmetrikus, logaritmikus kvantáló

- 1 bit előjel
- r-1 bit abszolut érték kvantálás

Szint független SNR: $\mathrm{SNR} = \mathrm{SNR}_i = \dfrac{x_i^2}{\dfrac{q_i^2}{12}}$



Méretezés:

- adott: SNR, x_{min}, x_{min}
- kérdés: r

$$d = \frac{\ln(x_{max}) - \ln(x_{min})}{L-1}$$

$$L = \frac{\ln \dfrac{x_{max}}{x_{min}}}{d} + 1$$

$$r - 1 = \log 2(L)$$

$$d = \ln\left(x_i + \frac{q_i}{2}\right) - \ln\left(x_i - \frac{q_i}{2}\right) =$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{\dfrac{x_i}{q_i} - \dfrac{1}{2}}\right)$$

Logaritmikus kvantálás

Példa:

4 bites

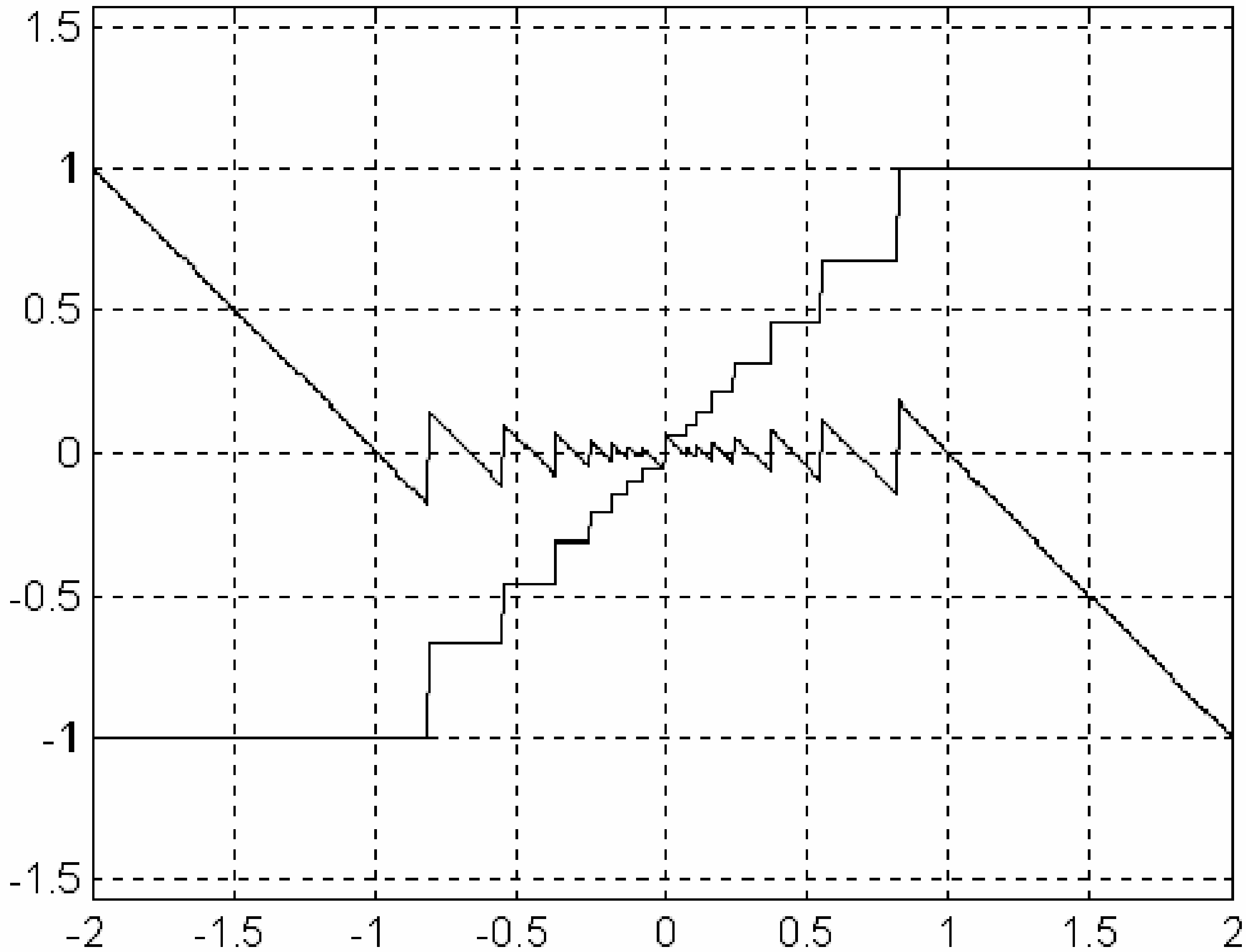
logaritmikus

kvantálási

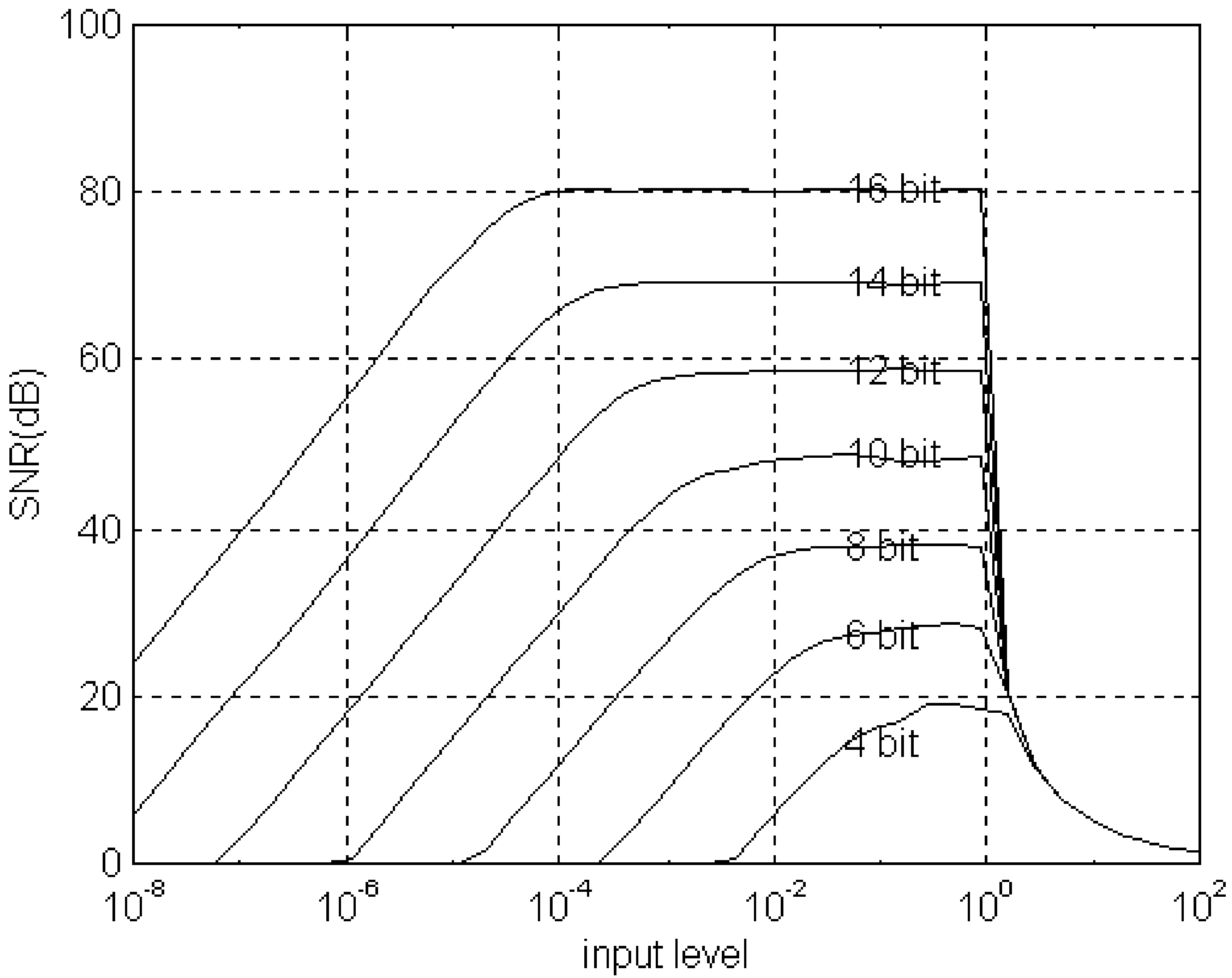
és

hiba-

karakterisztikák:



Logaritmikus kvantálás



Max-Lloyd kvantáló

PDF optimalizált (nem egyenletes) kvantáló

- Adott a forrás eloszlása,

  és a kvantáló szintjeinek L száma.
- Meghatározandó az
  - X_1, X_2, ... $X_{(L-1)}$ döntési intervallum határok és
  - Y1, Y2, ... YL döntési szintek
  - optimális (SNR-t maximalizáló) értékei

A megoldást az alábbi iterációval éretjük el:

Kiindulás: $$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{L-1}^{(0)}; y_1^{(0)}, \ldots, y_L^{(0)}$$

$$y_k^{(i)} = E\left\{ \xi \middle| x_{k-1}^{(i-1)} < \xi < x_k^{(i-1)} \right\} \qquad k = 1 \ldots L$$

i=1,2, …

$$x_k^{(i)} = \frac{1}{2}\left(y_k^{(i)} + y_{k+1}^{(i)} \right) \qquad k = 1 \ldots L-1$$