Híradástechikai jelfeldolgozás

14. Előadás 2015. 04. 27.

Jeldigitalizálás és rekonstrukció 2.

Dr. Gaál József
docens
BME Hálózati Rendszerek és SzolgáltatásokTanszék
gaal@hit.bme.hu

2015. május 4.
Budapest

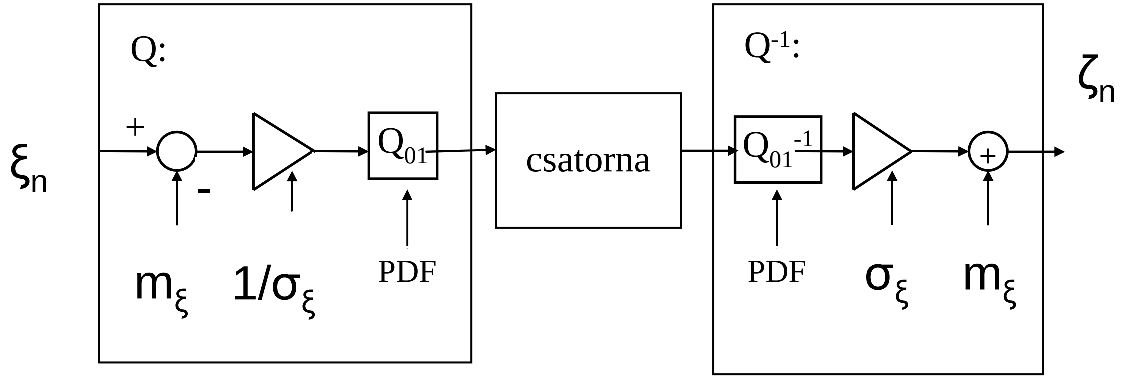
Normalizált kvantáló illesztése

Normalizált kvantáló:

- nulla várható értékű,
- egységnyi szórású (teljesítményű)
- forráshoz optimalizált

Kvantáló optimális illesztése:

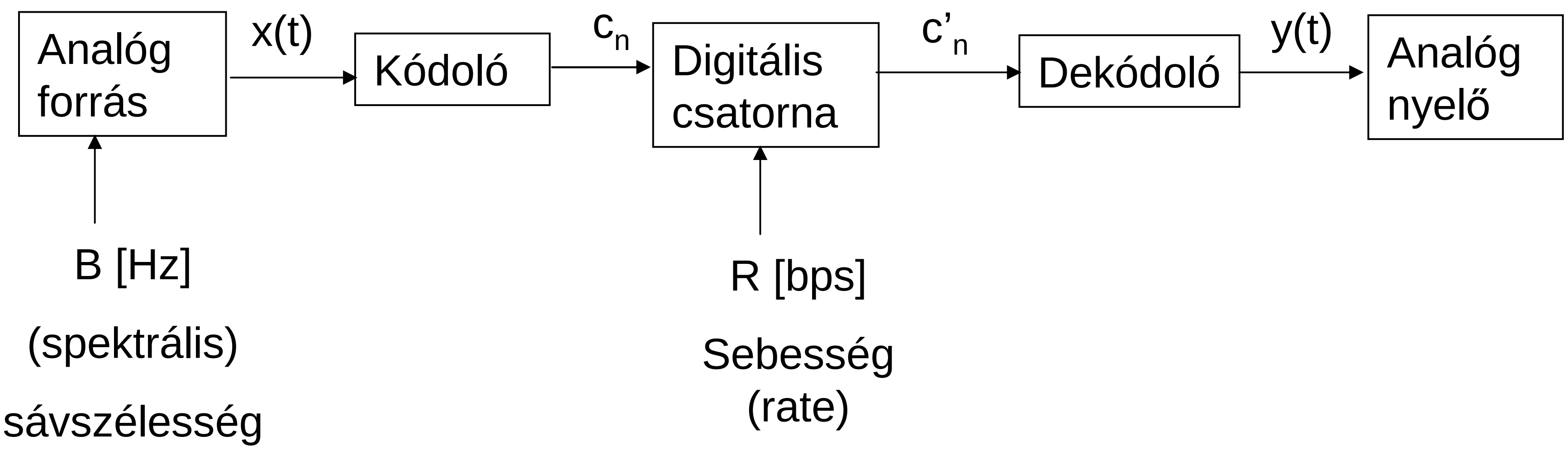
- additív illesztés
- multiplikatív illesztés



Adaptív kvantálás:

- adaptív illesztés

Újra az alapmodell



Hullámforma kódolás!

Minőség: a torzítás e(t) = y(t)-x(t)

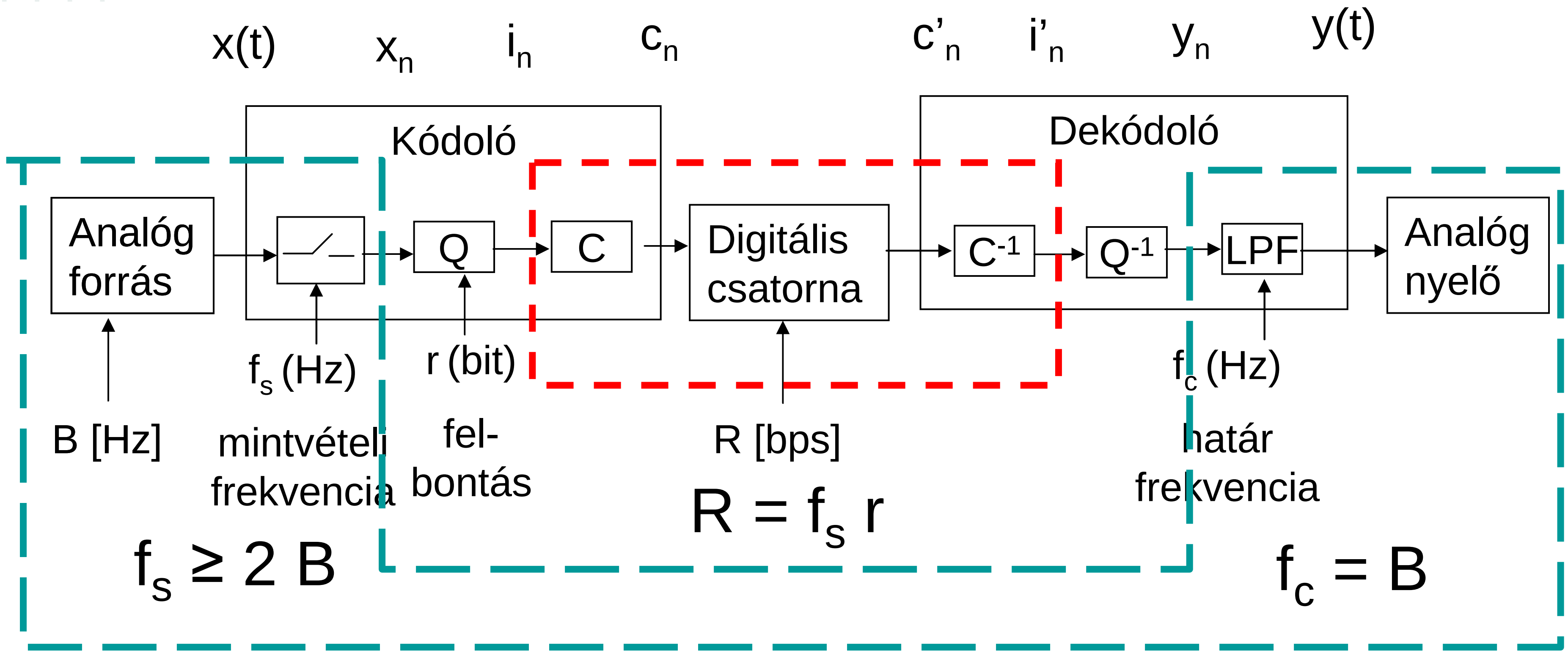
átlag teljesítménye: P_e = e(t) négyzetes átlaga

jel-zaj viszony:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\text{jel teljesítmény}}{\text{hiba teljesítmény}} = \frac{\overline{x^2(t)}}{\overline{e^2(t)}} = \frac{\overline{x^2(t)}}{\overline{(y(t)-x(t))^2}}$$

Sebesség (R) $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ Minőség (SNR) Rate-distortion theory

Alap összefüggések

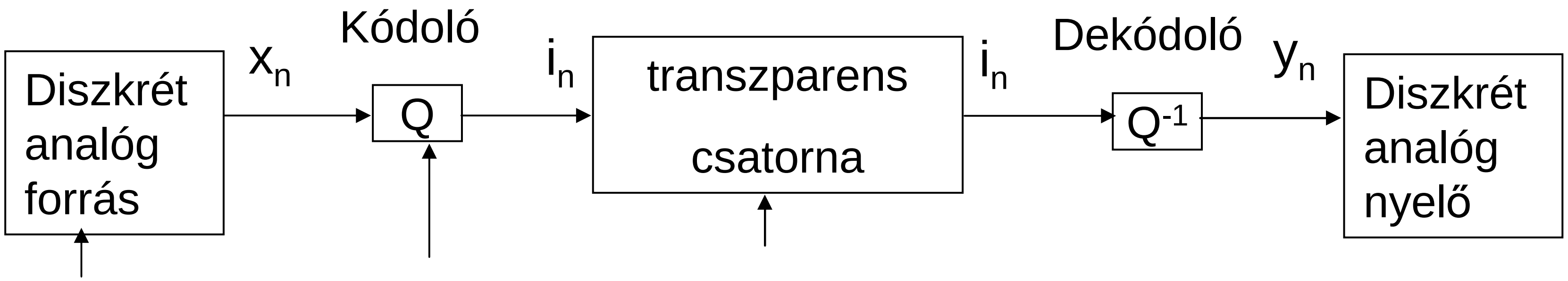


Mintavételezés
és interpolálás ✓
Mintavételi tétel

Veszteség mentes kódolás:

- Forrás kódolás (adat tömörítés) ✓
- Csatorna kódolás (hibavédelem, hibajavítás)
- PCM

Diszkrét forrás kvantálása



f_s [Hz]

órajel

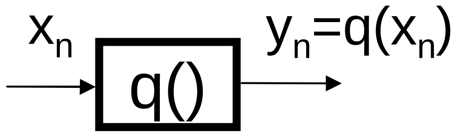
r (bit)

felbontás

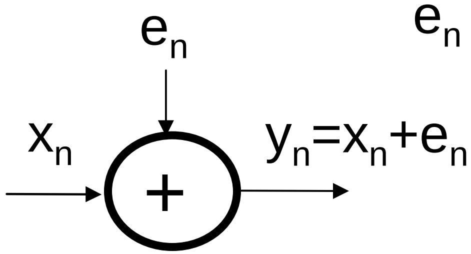
$R = f_s\, r$ [bps]

a transzfer erőforrás igénye

$e_n = e(x_n) = q(x_n) - x_n$

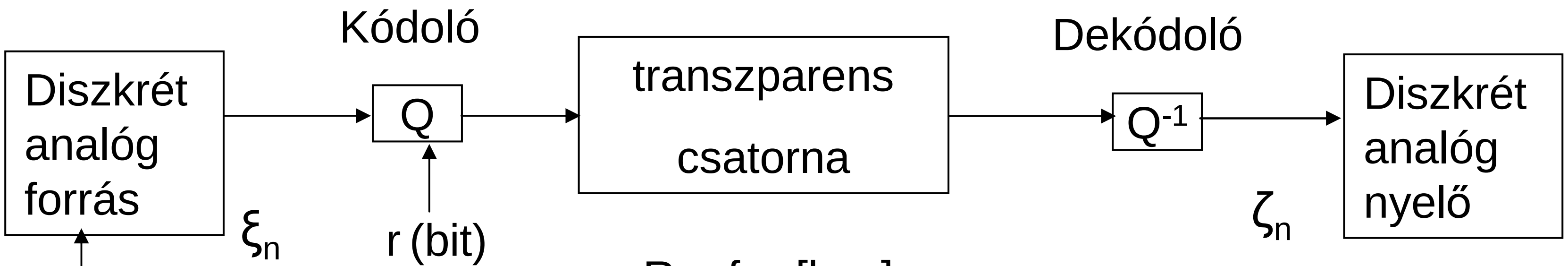


Kvantálási karakterisztika



hiba karakterisztika

Stacioner forrás kvantálása



f_s [Hz]

órajel

fel-bontás

$R = f_s\, r$ [bps]

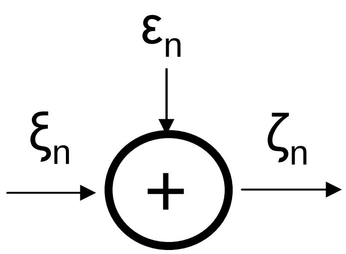
a transzfer erőforrás igénye

Sztochasztikus modell: véletlen jelek

ξ_n stacioner forrás jellemzői:

- $f_\xi(x)$ pdf, valószínűség sűrűség
- $m_\xi = E\{\xi_n\}$ várható érték
- $r_\xi(n) = E\{\xi_m\, \xi_{m+n}\}$ autokorreláció
  - $r_\xi(0) = P_\xi$ átlag teljesítmény
- $S_\xi(f) = \mathcal{F}\{r_\xi(n)\}$ Fourier tr.

  teljesítmény sűrűség spektrum



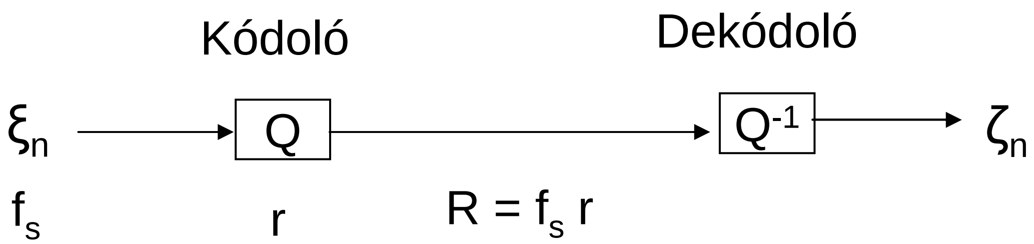
ε_n hibajel jellemzői

(normál üzemmódban) :

- forrástól független,
- $f_\varepsilon(x)$ pdf, -q/2…q/2 felett egyenletes
- $m_\varepsilon = 0$ várható érték
- $r_\varepsilon(n) = q^2/12\ \delta_n$ autokorreláció
  - $r_\varepsilon(0) = q^2/12$ átlag teljesítmény
- $S_\varepsilon(f) = \mathcal{F}\{r_\varepsilon(n)\} = q^2/12$ Fourier tr.

Fehér zaj

Optimális kvantálás



$f_\xi(x)$

$m_\xi = E\{\xi_n\}$

$r_\xi(n) = E\{\xi_m\, \xi_{m+n}\}$

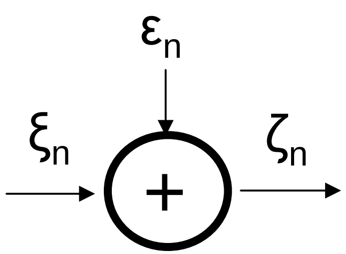
$r_\xi(0) = P_\xi$

$\sigma_\xi^2 = P_\xi - m_\xi^2$

$S_\xi(f)$

Feltétel: $m_\xi = 0$

$\sigma_\xi^2 = P_\xi$



Optimálisan illesztett kvantálóra:

a hiba jel teljesítmény:

$$\boxed{P_\varepsilon(r) = c\, 2^{-2r}\, P_\xi}$$

$$\boxed{SNR_Q(\,r\,) = k\, 2^{2r}}$$

ahol $k=1/c$

- a forrás eloszlás típusától
- és a kvantáló típusától

függő konstans.

PCM kvantálás példák

Kódoló Dekódoló

$$\xi_n \longrightarrow \boxed{Q} \longrightarrow \boxed{Q^{-1}} \longrightarrow \zeta_n$$

f_s r $R = f_s\, r$

PCM telefon digitális átviteltechnika :

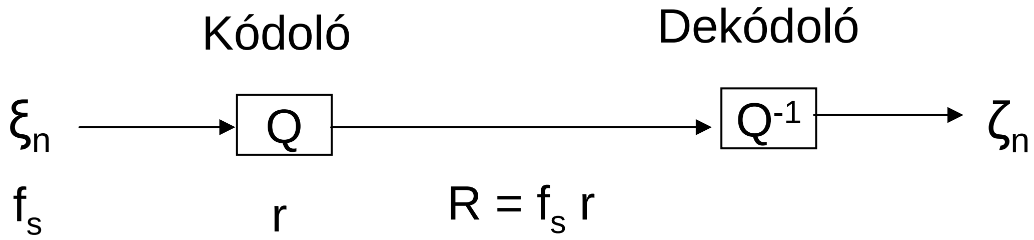
8kHz, 8 bit logaritmikus 64 kbps PCM

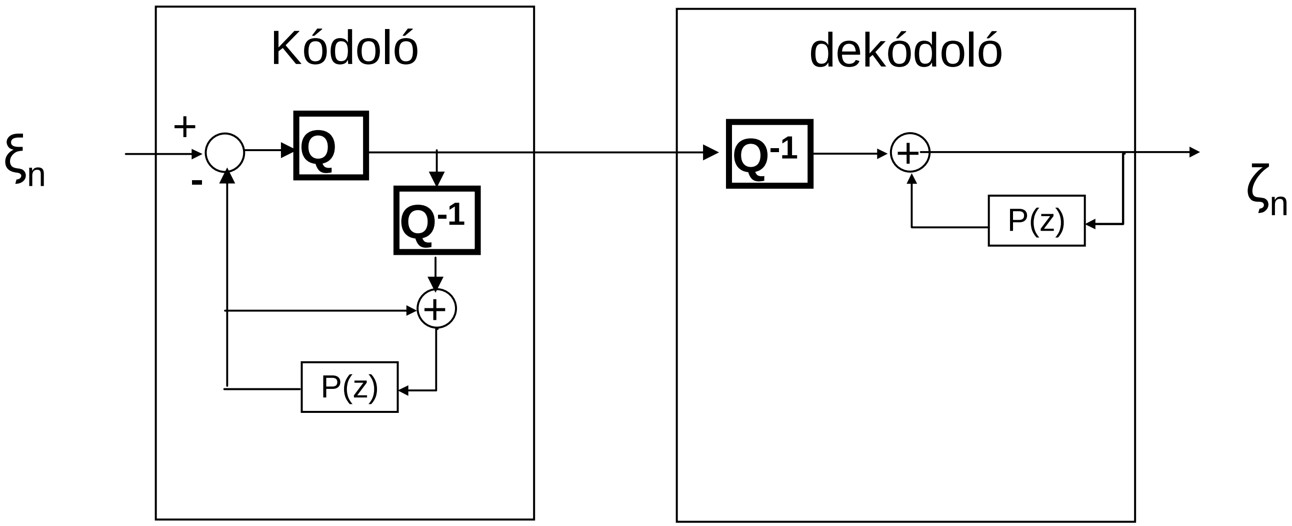
Audio CD:

44.1 KHz, 2x 16 bit, 1.5 Mbps

Új ötletek 1.: differenciális, prediktív kódolás

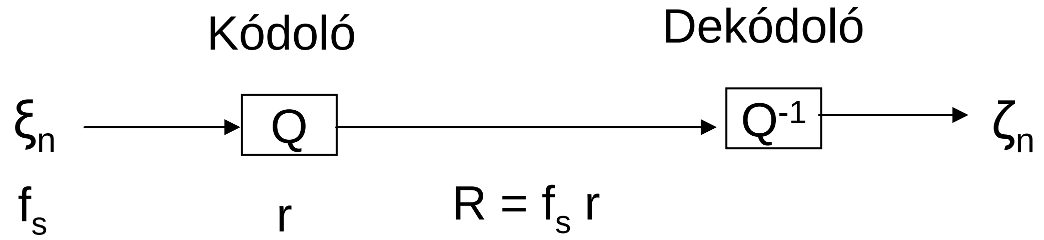
SNR_Q



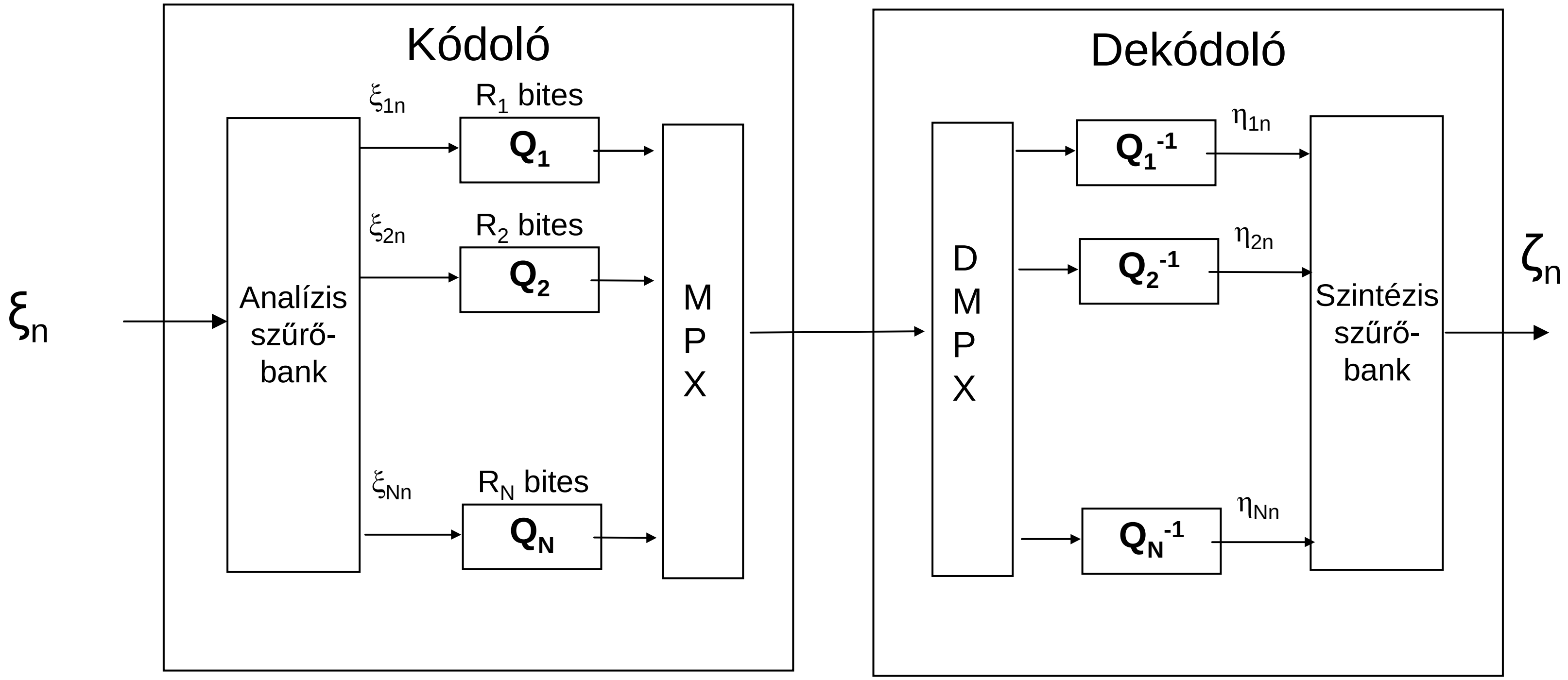


$$SNR_P = G_P \quad SNR_Q$$

Új ötletek 2.: részsávú kódolás



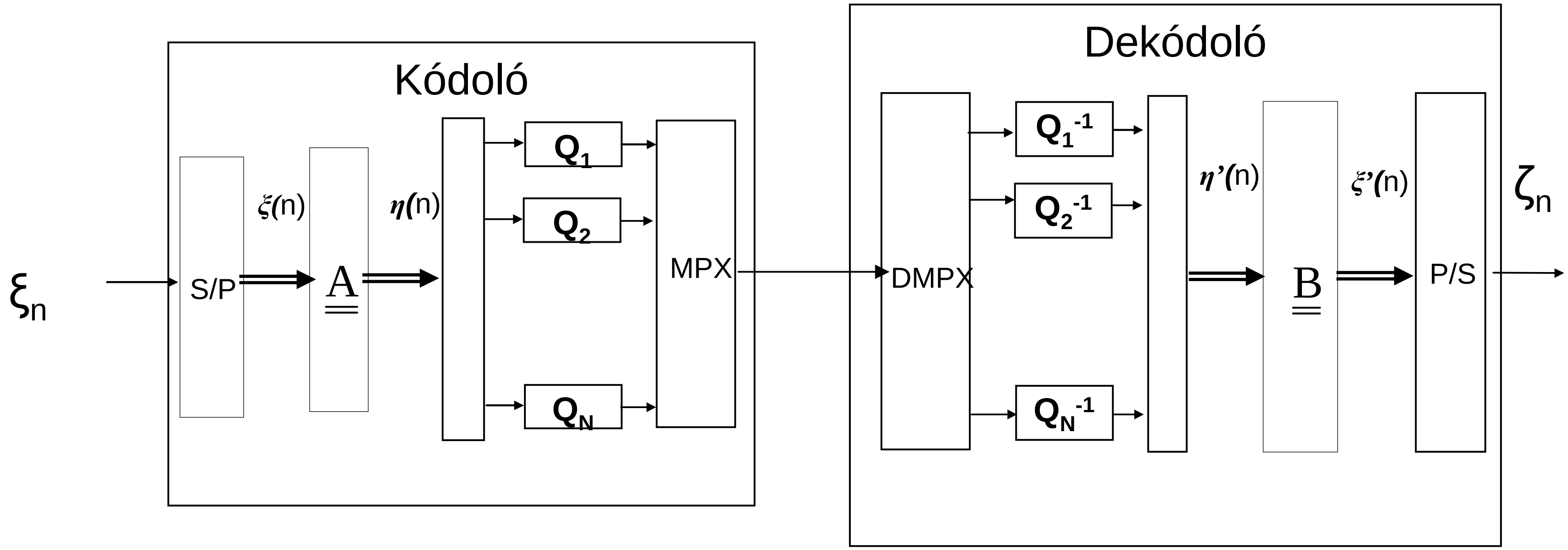
SNR_Q



$$SNR_T = G_T \quad SNR_Q$$

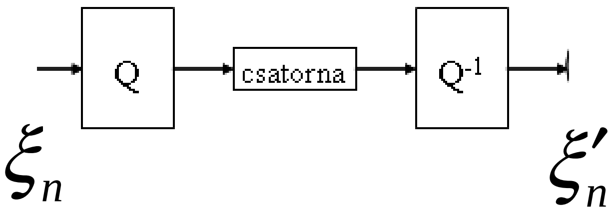
Új ötletek 3.: transzfomációs kódolás

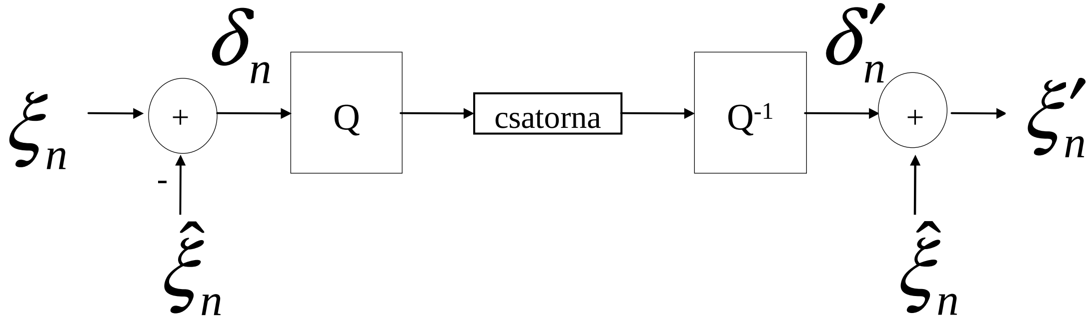
SNR_Q f_s r $R = f_s\, r$



$$SNR_T = G_T \; SNR_Q$$

A differenciális kvantálás alapelve





Q : optimalizált kvantáltó

ξ_n : kvantálandó forrás

ξ'_n : kvantált jel

$\hat{\xi}_n$: a forrásminta becslése

δ_n : differenciális jel

$\delta'_n = \delta_n + \varepsilon_n$:

kvantált diferenciális jel

$$\xi'_n = \xi_n + \varepsilon_n$$

Differenciális kvantálás

eredő SNR: $$SNR_P = \frac{E\{\xi_n^2\}}{E\{\varepsilon_q^2\}} = \frac{E\{\xi_n^2\}}{E\{\delta_n^2\}} \frac{E\{\delta_n^2\}}{E\{\varepsilon_q^2\}}$$

Optimalis kvantáló SNR: $$SNR_Q = \frac{E\{\delta_n^2\}}{E\{\varepsilon_q^2\}}$$

Predikciós nyereség: $$G_P = \frac{E\{\xi_n^2\}}{E\{\delta_n^2\}}$$

$$\boxed{SNR_P = G_p \cdot SNR_Q}$$

Lineáris predikció

G_P predikciós nyereség maximalizálása → A differenciális jel teljesítményének minimalizálása

$$\delta_n = \xi_n - \hat{\xi}_n$$

$$\min : P_\delta = E\left\{\left|\xi_n - \hat{\xi}_n\right|^2\right\}$$

Prediktor: $\hat{\xi}_n \rightarrow \boxed{P(\xi_{n-1},\ldots,\xi_{n-N}) = \hat{\xi}_n} \rightarrow \hat{\xi}_n$

Lineáris prediktor: $\hat{\xi}_n = a_1\xi_{n-1} + a_2\xi_{n-2} + \ldots + a_N\xi_{n-N}$

vektorosan: $\underline{a} = [a_1,\ldots,a_N]^T$ $\quad \underline{\xi_{n-1}} = [\xi_{n-1},\ldots,\xi_{n-N}]^T$ $\quad \hat{\xi}_n = \underline{a}^T\underline{\xi_{n-1}}$

$$E\left\{\left|\xi_n - \hat{\xi}_n\right|^2\right\} = P_\delta = E\left\{\xi_n^2 - 2\xi_n\underline{a}^T\underline{\xi_{n-1}} + \underline{a}^T\underline{\xi_{n-1}}\underline{a}^T\underline{\xi_{n-1}}\right\} = E\left\{\xi_n^2 - 2\xi_n\underline{a}^T\underline{\xi_{n-1}} + \underline{a}^T\underline{\xi_{n-1}}\,\underline{\xi_{n-1}}^T\underline{a}\right\}$$

ahol a forrás autokorrelációja:

$$r_\xi(m) = E\{\xi_n\xi_{n+m}\}$$

$$P_\delta = r_\xi(0) - 2\underline{a}^T\begin{bmatrix} r_\xi(1) \\ r_\xi(2) \\ \ldots \\ r_\xi(N)\end{bmatrix} + \underline{a}^T\begin{bmatrix} r_\xi(0) & r_\xi(1) & \ldots & r_\xi(N-1) \\ r_\xi(1) & r_\xi(0) & & r_\xi(N-2) \\ \ldots & \ldots & & \\ r_\xi(N-1) & r_\xi(N-2) & \ldots & r_\xi(0)\end{bmatrix}\underline{a}$$

Lineáris predikció

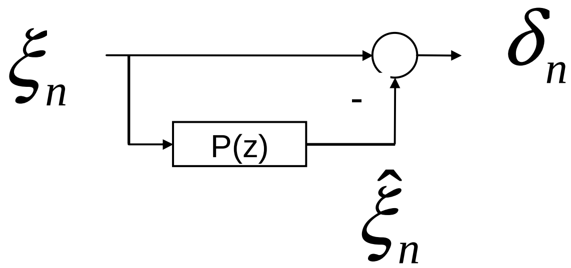
$$\underline{r} = \begin{bmatrix} r_\xi(1) \\ r_\xi(2) \\ \dots \\ r_\xi(N) \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} r_\xi(0) & r_\xi(1) & \dots & r_\xi(N-1) \\ r_\xi(1) & r_\xi(0) & & r_\xi(N-2) \\ \dots & \dots & & \\ r_\xi(N-1) & r_\xi(N-2) & \dots & r_\xi(0) \end{bmatrix}$$

$$\sigma_\delta^2 = \mathrm{r}_\xi(0) - 2\underline{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathrm{r}} + \underline{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{\mathrm{R}}}\,\underline{\mathrm{a}}$$

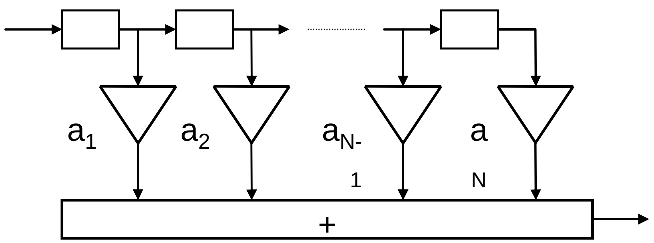
$$\underset{\underline{a}}{grad}\,\sigma_\delta^2 = -2\underline{r} + 2\underline{\underline{R}}\,\underline{a} = 0$$

$$\underline{a_{opt}} = \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{r}$$

Differencia képzés:



Lineáris prediktor: FIR szűrő



$$\mathrm{P}(z) = \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}$$