

Híradástechikai jelfeldolgozás

16. Előadás 2015. 05. 07.

Részsávú és transzformációs kódolás

Dr. Gaál József
docens
BME Hálózati Rendszerek és SzolgáltatásokTanszék
gaal@hit.bme.hu

2015. május 8.
Budapest

Részsávú kódolás

r-bites, optimalizált kvantáló:

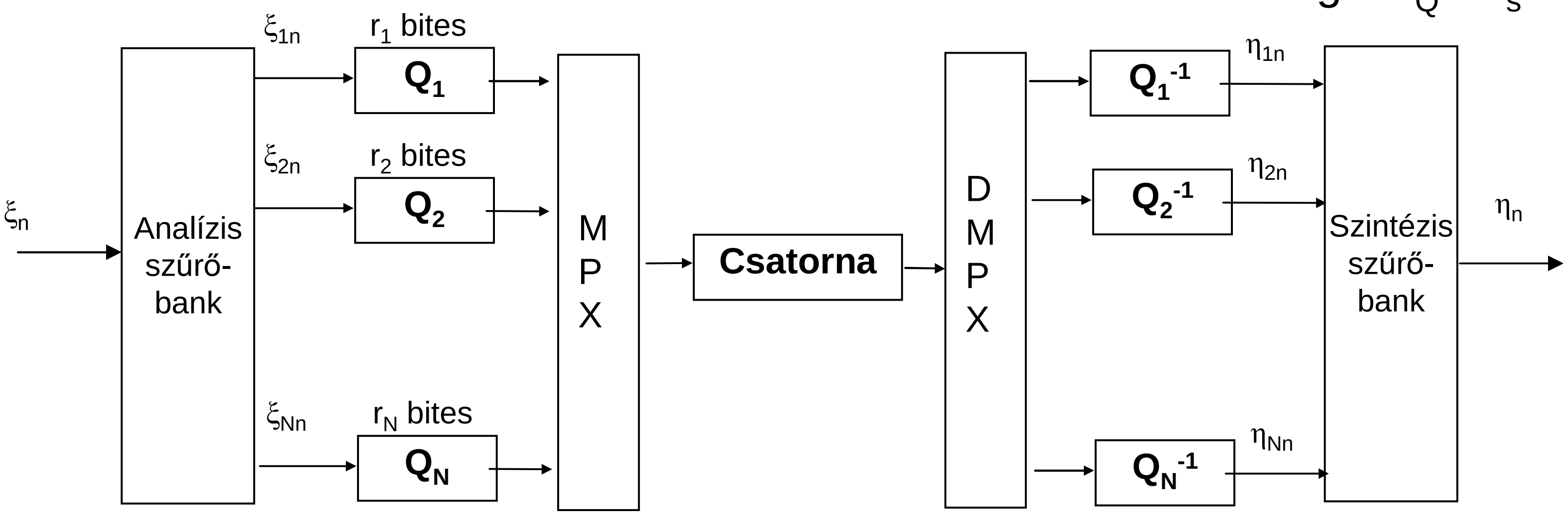
f_s

forrás teljesítmény : $P = P_\xi = E\{\xi_n^{\,2}\}$

kvantálási zaj teljesítmény: $P_\varepsilon = c\,P\,2^{-2r}$

$SNR_Q = k\,2^{2r}$, $k=1/c$.

Csatorna sebesség: $R_Q = f_s.r$ (bit/sec)



Részsávú kvantáló teljesítmény felbontása: $P_1, P_2, \ldots P_N$, bitkiosztása: $N, r_1, \ldots r_N$

jel teljesítmény :

$$P = \sum_{i=1}^{N} P_i$$

kvantálási zaj teljesítmény:

$$P_\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} P_{\varepsilon,i}$$

csatorna sebesség:

$$R_{SB} = \sum_i f_{si} r_i$$

Részsávú kódolás

Jel- és zaj teljesítmények:

$$P = \sum_{i=1}^{N} P_i \qquad P_\varepsilon = \sum_{i=1}^{N} P_{\varepsilon,i}$$

Optimális (illesztett) kvantálók:

$$P_{\varepsilon,i} = cP_i 2^{-2r_i}$$

$$SNR_{Qi} = \frac{P_i}{P_{\varepsilon,i}} = \frac{1}{c} 2^{2r_i}$$

Jel-zaj viszony:

$$SNR_{SB} = \frac{\sum_i P_i}{\sum_i cP_i 2^{-2r_i}} = k \frac{\sum_i P_i}{\sum_i P_i 2^{-2r_i}} = \frac{2^{-2r} \sum_i P_i}{\sum_i P_i 2^{-2r_i}} k 2^{2r} = G_{SB} SNR_Q$$

Részsávú nyereség

$$G_{SB} = \frac{2^{-2R} \sum_i P_i}{\sum_i P_i 2^{-2r_i}}$$

Egyenletes részsávú felbontás: $R_{SB} = \sum_i f_{si} r_i \qquad f_{si} = f_s / N \;\; i = 1,2,\ldots N \qquad \boxed{Nr = \sum_i r_i}$

Optimális bitallokáció

adott: N részsáv, $f_{si} = f_s/N$, i=1,2,...N $P_1, P_2, \ldots P_N$, teljesítmény eloszlással

és az rF referencia sávszélesség.

keresett: az N kvantálóra kiosztandó $r_1, r_2, \ldots r_N$ bit eloszlás.

$$\min_{r_1, r_2, \ldots r_N} P_{\varepsilon,SB} \quad \text{feltéve, hogy} \sum_i r_i = Nr$$

$$\boxed{\min_{r_1, r_2, \ldots r_N} \sum_{i=1}^{N} P_i 2^{-2r_i} \quad , \quad \sum_i r_i - Nr = 0}$$

Feltételes szélsőérték:

Lagrange multiplikátor

$$\min_{R_1, R_2, \ldots R_N \lambda} \left\{ \sum_{i=1}^{N} P_i 2^{-2r_i} + \lambda \left(\sum_i r_i - Nr \right) \right\} = \min_{r_1, r_2, \ldots r_N \lambda} \varphi(r_1, r_2, \ldots r_N \lambda)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_i} \left\{ \sum_{i=1}^{N} P_i 2^{-2r_i} + \lambda \left(\sum_i r_i - Nr \right) \right\} = \frac{\partial}{\partial r_i} \left(P_i 2^{-2r_i} \right) + \lambda = -2 \ln 2 \, P_i 2^{-2r_i} + \lambda = 0 \quad , i = 1,2,\ldots N$$

$$r_i = \frac{1}{2} \mathrm{ld}\, P_i + \frac{1}{2} \mathrm{ld} \left(\frac{2 \ln 2}{\lambda} \right) \qquad \sum_i r_i = \frac{1}{2} \sum_i \mathrm{ld}\, P_i + N \frac{1}{2} \mathrm{ld} \left(\frac{2 \ln 2}{\lambda} \right) = Nr$$

$$\frac{1}{2} \mathrm{ld} \left(\frac{2 \ln 2}{\lambda} \right) = r - \frac{1}{2N} \sum_i \mathrm{ld}\, P_i$$

Optimális bitallokáció, nyereség

$$\frac{1}{2}\mathrm{ld}\left(\frac{2\ln 2}{\lambda}\right) = R - \frac{1}{2N}\sum_i \mathrm{ld}\,P_i$$

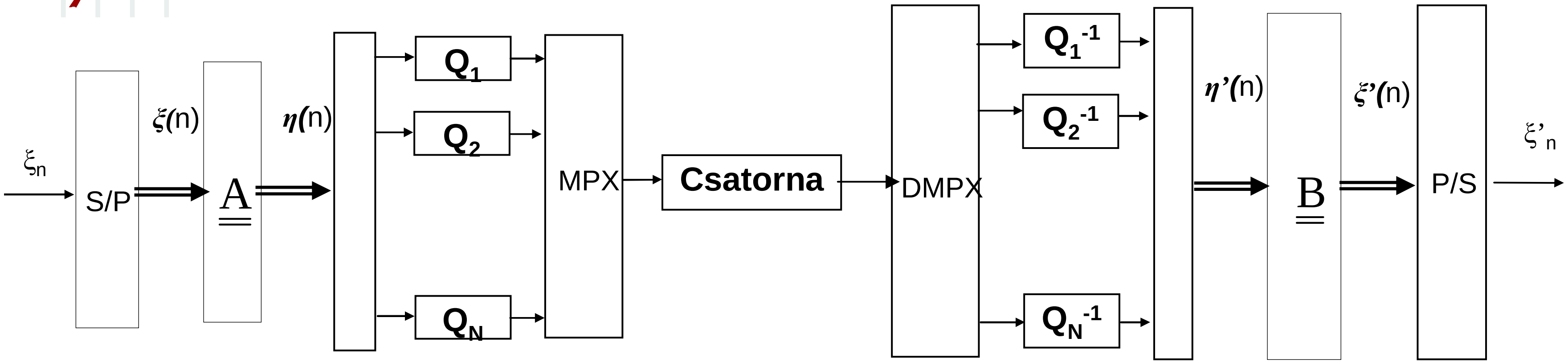
$$r_i = \frac{1}{2}\mathrm{ld}\,P_i + r - \frac{1}{2N}\sum_i \mathrm{ld}\,P_i = r + \frac{1}{2}\left(\mathrm{ld}\,P_i - \frac{1}{N}\mathrm{ld}\left(\prod_i P_i\right)\right)$$

$$\boxed{r_i = r + \frac{1}{2}\mathrm{ld}\frac{P_i}{\sqrt[N]{\prod_i P_i}} \quad i = 1, 2, \dots N}$$

$$P_{\varepsilon,i} = cP_i 2^{-2r_i} = c\,P_i\ 2^{-2r}\left(\frac{P_i}{\sqrt[N]{\prod_i P_i}}\right)^{-1} = c\ \sqrt[N]{\prod_i P_i}\ 2^{-2r}$$

$$\boxed{G_{SB} = \frac{SNR_{SB}}{SNR_Q} = \frac{P_{\varepsilon,Q}}{\sum_i P_{\varepsilon,i}} = \frac{cP2^{-2r}}{Nc\ \sqrt[N]{\prod_i P_i}\ 2^{-2r}} = \frac{\frac{1}{N}\sum_i P_i}{\sqrt[N]{\prod_i P_i}} \geq 1}$$

Transzformációs kódoló



$$\underline{\xi}(n) = \begin{bmatrix} \xi_n \\ \xi_{n-1)} \\ \dots \\ \xi_{n-(N-1)} \end{bmatrix} \qquad \underline{\eta} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\xi} \qquad \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \qquad \underline{\xi}' = \underline{\underline{B}}\,\underline{\eta}'$$

Kimeneti rekonstrukció:

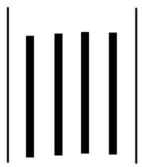
bázisvektorok súlyozott összege:

$$\underline{\xi}' = \underline{\underline{B}}\,\underline{\eta}' = \left[\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots \underline{b}_N\right] \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_N \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \eta_i \underline{b}_i$$

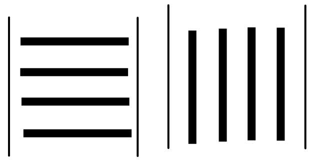
Ortonormált bázis:

ortogonális transzformáció

$$\underline{\underline{B}} =$$



$$\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} =$$



$$= \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}^{-1} = \underline{\underline{B}}^T$$

Optimális transzformációs kódoló

- A transzformáció megválasztása A=?
- a kvantáló bitek kiosztása ?
  - a transzformált vektor $\{P_1, P_2, \ldots P_N\}$ teljesítmény eloszlása alapján optimális bitallokáció: $\rightarrow$ min $\prod P_i$

Bemeneti korreláció: $E\{\underline{\xi}(n)\cdot\underline{\xi}^T(n)\} = \underline{\underline{R}}_\xi = \begin{bmatrix} R(0)\ \mathrm{R}(1) \ldots \mathrm{R}(\mathrm{N}-1) \\ \mathrm{R}(0) \ldots \\ \ldots \end{bmatrix}$

Transzformált kimeneti korreláció: $E\{\underline{\eta}(n)\cdot\underline{\eta}^T(n)\} = E\{\underline{\underline{A}}\underline{\xi}(n)\cdot\underline{\xi}^T(n)\underline{\underline{A}}^T\} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{R}}_\xi\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{R}}_\eta$

Transzformált teljesítmény eloszlás: $\underline{\underline{R}}_\eta$ átlója

Matek tétel: $\det(\underline{\underline{R}}_\eta) \le \prod_{\mathrm{i}} \mathrm{R}_\eta(i,i) = \prod_{\mathrm{i}} \mathrm{P}_i \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{R}}_\eta$ legyen diagonális!

Optimális transzformációs kódoló

$\underline{\underline{R}}_{\eta}$ legyen diagonális! $\qquad \underline{\underline{R}}_{\eta} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{R}}_{\xi}\,\underline{\underline{A}}^{T}$

Hasonlósági transzformációval diagonalizálandó a ξ forrás korreláció mátrixa!

Saját értékek, saját vektorok: $\underline{\underline{R}}_{\xi}\,\underline{v}_i = d_i\,\underline{v}_i \quad i = 1,2,\ldots N$

azaz, $\underline{\underline{R}}_{\xi}\,\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{D}}$ $\quad$ ahol $\underline{\underline{V}} = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots \underline{v}_N]$ és $\underline{\underline{D}} = diag\{d_1, d_2, \ldots d_N\}$

Valós saját értékek,
ortogonális saját vektorok: $\underline{v}_i^{\,t}\,\underline{v}_j = \delta_{i,j}$ azaz $\underline{\underline{V}}^{t}\,\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{I}}$, azaz $\underline{\underline{V}}^{-1} = \underline{\underline{V}}^{t}$

Tehát: $\underline{\underline{R}}_{\eta} = \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{V}}^{t}\,\underline{\underline{R}}_{\xi}\,\underline{\underline{V}}$

Karhunen-Loeve transzformáció (KLT):

az ortogonális transzformáció bázis vektorai a forrás korreláció mátrixának saját vektorai

$$\boxed{\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{V}}^{t} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1^{\,t} \\ \underline{v}_2^{\,t} \\ \ldots \\ \underline{v}_N^{\,t} \end{bmatrix} \quad \text{illetve } \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{V}} = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots \underline{v}_N]}$$

Szuboptimális transzformációk

Diszkrét Walsh-Hadamard transzformáció:

4 pontos DWHT:

$$
{}^{4}\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

Diszkrét Fourier transzformáció:

4 pontos DFT:

$$
{}^{4}\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & j \end{bmatrix}
$$

Diszkrét cosinus transzformáció:

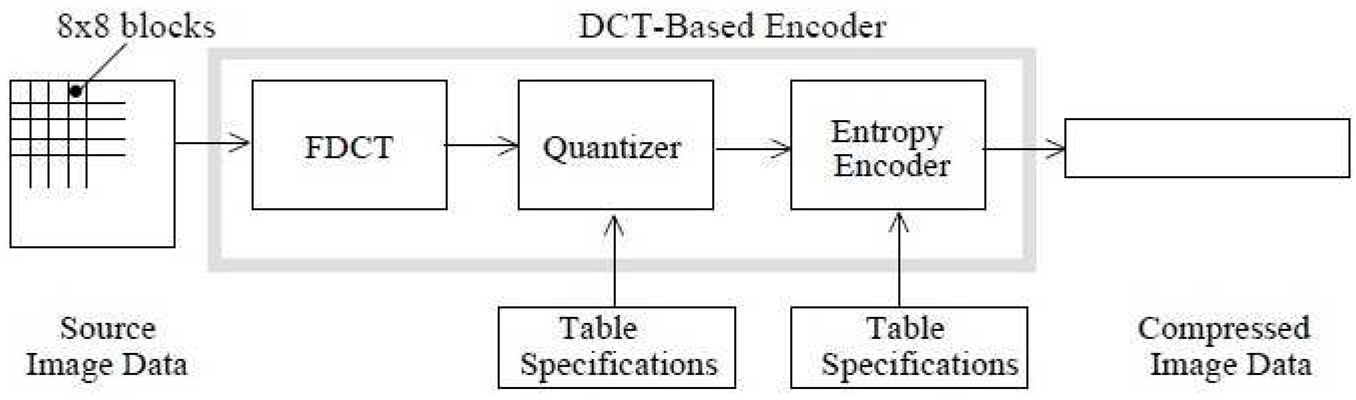
4 pontos DCT:

$$
{}^{4}\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & -b & -a \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -a & a & -b \end{bmatrix}
$$

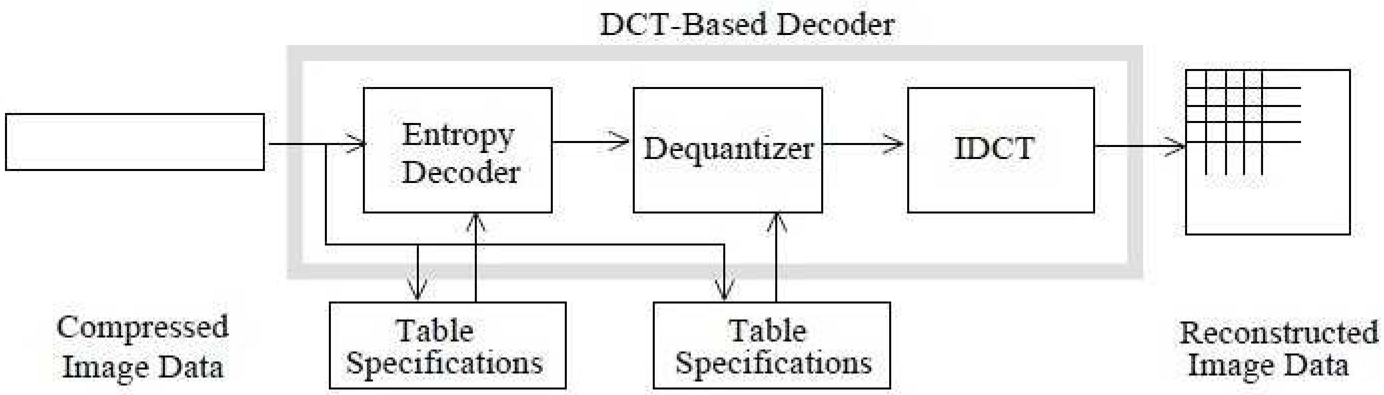
$$
a = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}
$$

$$
b = \sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{8}
$$

JPEG-1



8x8 blocks
DCT-Based Encoder
FDCT
Quantizer
Entropy Encoder
Source Image Data
Table Specifications
Table Specifications
Compressed Image Data



DCT-Based Decoder
Entropy Decoder
Dequantizer
IDCT
Compressed Image Data
Table Specifications
Table Specifications
Reconstructed Image Data

JPEG-2, DCT, IDCT

$$F(u,v) = \frac{2}{N} C(u)C(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

$$F = AfA^T$$

$$C(u), C(v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{for } u,v = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$A[x][y] = C_x \cos\frac{(2y+1)x\pi}{2N}$$

$$C_x = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{N}}}\ (x=0) \qquad C_x = \sqrt{2/\mathrm{N}}\ (x>0)$$

$$f(x,y) = \frac{2}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} C(u)C(v)F(u,v) \cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}$$

$$f = A^T F A$$

JPEG-3

139	144	149	153	155	155	155	155
144	151	153	156	159	156	156	156
150	155	160	163	158	156	156	156
159	161	162	160	160	159	159	159
159	160	161	162	162	155	155	155
161	161	161	161	160	157	157	157
162	162	161	163	162	157	157	157
162	162	161	161	163	158	158	158

(a) source image samples

235.6	-1.0	-12.1	-5.2	2.1	-1.7	-2.7	1.3
-22.6	-17.5	-6.2	-3.2	-2.9	-0.1	0.4	-1.2
-10.9	-9.3	-1.6	1.5	0.2	-0.9	-0.6	-0.1
-7.1	-1.9	0.2	1.5	0.9	-0.1	0.0	0.3
-0.6	-0.8	1.5	1.6	-0.1	-0.7	0.6	1.3
1.8	-0.2	1.6	-0.3	-0.8	1.5	1.0	-1.0
-1.3	-0.4	-0.3	-1.5	-0.5	1.7	1.1	-0.8
-2.6	1.6	-3.8	-1.8	1.9	1.2	-0.6	-0.4

(b) forward DCT coefficients

16	11	10	16	24	40	51	61
12	12	14	19	26	58	60	55
14	13	16	24	40	57	69	56
14	17	22	29	51	87	80	62
18	22	37	56	68	109	103	77
24	35	55	64	81	104	113	92
49	64	78	87	103	121	120	101
72	92	95	98	112	100	103	99

(c) quantization table

15	0	-1	0	0	0	0	0
-2	-1	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

(d) normalized quantized coefficients

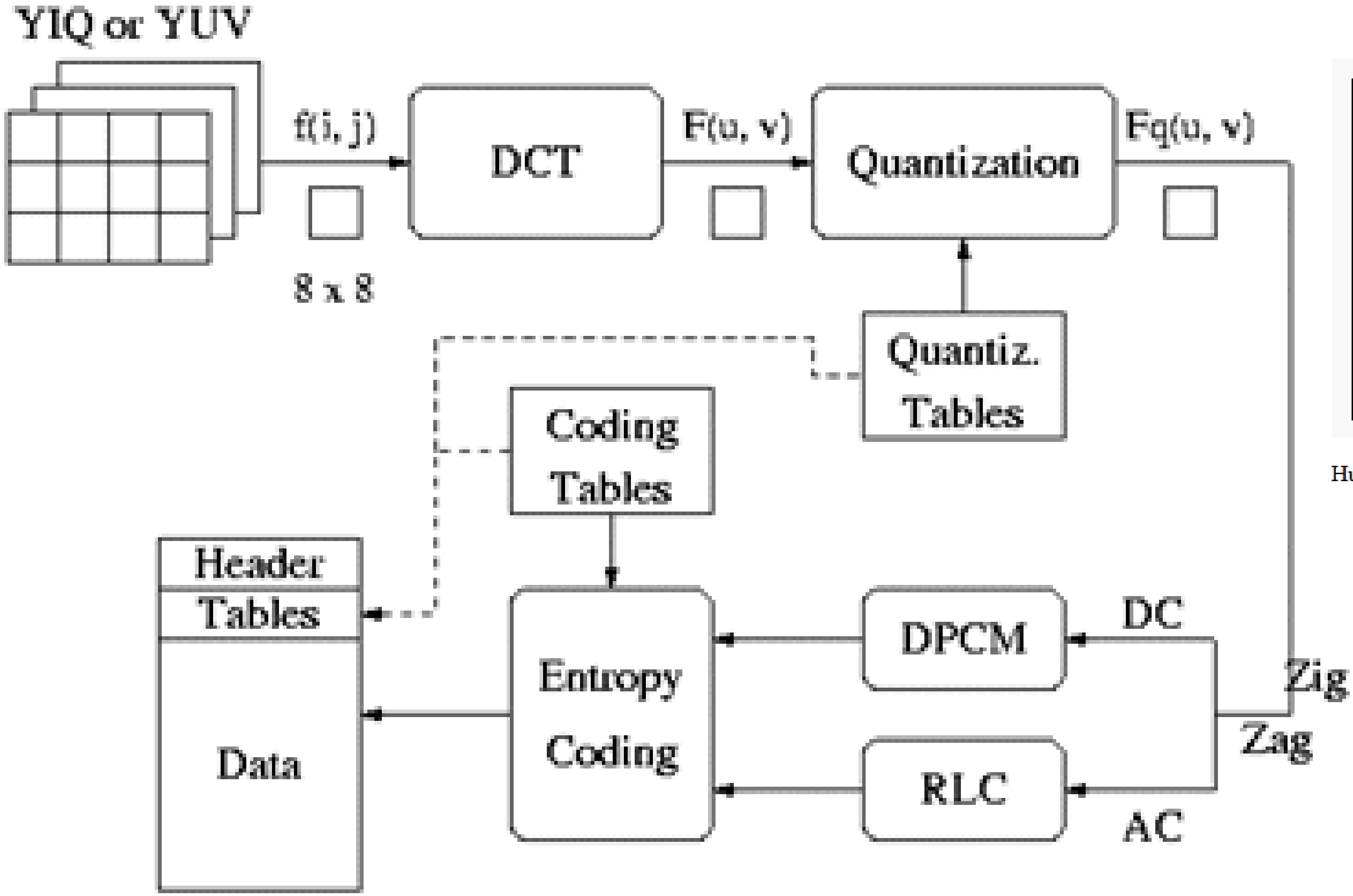
240	0	-10	0	0	0	0	0
-24	-12	0	0	0	0	0	0
-14	-13	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

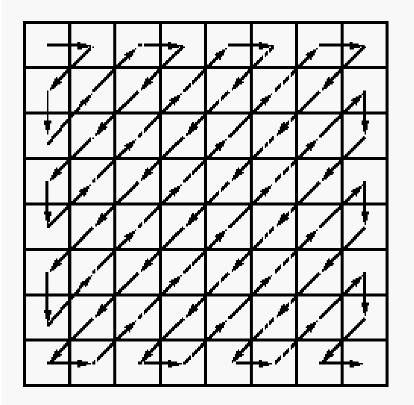
(e) denormalized quantized coefficients

144	146	149	152	154	156	156	156
148	150	152	154	156	156	156	156
155	156	157	158	158	157	156	155
160	161	161	162	161	159	157	155
163	163	164	163	162	160	158	156
163	164	164	164	162	160	158	157
160	161	162	162	162	161	159	158
158	159	161	161	162	161	159	158

(f) reconstructed image samples

JPEG





Huffman code the data stream;