
1. JELEK	2
1.1 Jelek reprezentációi, a reprezentációk transzformációi	2
1.1.1 Absztrakt matematikai modellek	2
1.1.2 Az idő-, frekvencia- és operátor-tartományban értelmezett reprezentációk	3
1.1.3 Jel reprezentációk transzformációi	4
1.2 Idő- és frekvenciatartománybeli leírás: valós függvénytani modellek, Fourier transzformáció	6
1.2.1 Sorozatok és függvények nevezetes osztályai, halmazai	6
1.2.2 Műveletek valós modellekkel	8
1.2.3 A Fourier transzformációk sokfélesége: FI, FS, DTFT, DFS, DFT	17
1.2.4 A komplex értékű spektrum valós értékű részfűggvényei	20
1.2.5 A Fourier transzformációk tulajdonságai	21
1.2.6 A Fourier transzformációk egységes leírása	25
1.2.7 Jelműveletek összefoglalása	31
1.3 Operátor tartományi leírás: Komplex függvénytani modellek, Z-transzformáció	32
1.3.1 A Z-transzformáció	32
1.3.2 A Z-transzformáció tulajdonságai	35
1.3.3 Az inverz Z-transzformáció	37
1.3.4 Racionális tört inverz Z-transzformációja	38

1. Jelek

1.1. Jelek reprezentációi, a reprezentációk transzformációi

1.1.1 Absztrakt matematikai modellek

Jelek kvantitatív leírására matematikai modelleket használunk, ezek a jelek **reprezentációi**. A matematikai modellek általános értelemben vett **függvények**, azaz adott struktúrájú input halmaznak adott struktúrájú output halmazba történő leképezései:

Függvény: Input halmaz $\Rightarrow$ Output halmaz

A szóba jövő lehetséges input és output halmaz típusokat az alábbi táblázatban foglaljuk össze. Szürkével emeltük ki a továbbiakban részletesen tárgyalandó értelmezési tartomány és értékkészlet típusokat. Outputtérnek (értékkészletnek) a további alapértelmezés szerint mindig a komplex számok halmazát tekintjük.

Input halmaz Értelmezési tartomány	Output halmaz Értékkészlet
véges szimbólum halmaz (eseménytér, abc, kód, stb.)	véges szimbólum halmaz (eseménytér, abc, kód, stb.)
véges számhalmaz {0, 1, ... (N-1)}	véges számhalmaz {0, 1, ... (N-1)}
megszámlálhatóan végtelen számhalmaz (egész számok)	megszámlálhatóan végtelen számhalmaz (egész számok)
valós számegegyenes	valós számegegyenes
komplex számsík	komplex számsík

Az input halmazok különböző matematikai szerkezete lényeges következménnyel jár a különböző reprezentáció típusok tulajdonságait illetően. Ezzel szemben a legáltalánosabban komplex számértékűnek tekintett értékkészletbe beletartoznak az egyszerűbb speciális esetek (pl. képzetes rész nulla: valós szám). Mivel a jelreprezentációk értékkészletét mindig komplex számnak tekintjük, ezért a reprezentációk típusait az értelmezési tartomány típusa szerint különböztethetjük meg. Jel reprezentációkként használt nevezetes matematikai modelleket az alábbiakban foglaljuk össze.

Modell	Jelölés	Input tér		Output tér	Diszciplína
Vektor (indexelt tömb)	$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}, \underline{X}$	véges számhalmaz tipikusan: $\{0, 1, \dots (N-1)\}$	$\Rightarrow$	komplex számsík	valós analízis
Sorozat (diszkrét függvény)	$x_n, X_n,$ $x(n), X(n),$ $x(nT), X(nF)$ $n = -\infty, \infty$	megszámlálhatóan végtelen számhalmaz (egész számok)	$\Rightarrow$	komplex számsík	
Valós függvény	$x(t), X(f)$	valós számegyenes	$\Rightarrow$	komplex számsík	
Komplex függvény	$X(s), X(z)$	komplex számsík	$\Rightarrow$	komplex számsík	komplex analízis

1.1.2 Az idő-, frekvencia- és operátor-tartományban értelmezett reprezentációk

Az eddigiekben absztrakt matematikai modellekről volt szó abban az értelemben, hogy az értelmezési tartományoknak az elvont matematikai szerkezetén túl más értelmezést nem adtunk.

A jeleket leírhatjuk, azaz reprezentálhatjuk, az **idő**-, a **frekvencia**- és az **operátor**-tartományban is. Ezekben az esetekben a leírására használt modellek értelmezési tartományai már matematikai szemponton túli értelmezéssel is rendelkeznek: időt, vagy frekvenciát, vagy (valamilyen, de egyelőre nem tisztázott módon) "operációt" jelentenek (az s komplex változó a deriválást, z az eltolást).

Az **időtengely** és a **frekvencia tengely** egyaránt **valós számegyenesek** $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig, mértékük fizikai egységben (sec, Hz) mérhetőek. Az **operátortartomány**beli jelreprezentációk értelmezési tartománya az s vagy z változójú **komplex sík**. Az alábbi táblázatban összefoglaltuk, hogy mely tartományban, milyen típusú reprezentációk (matematikai modellek) jönnek szóba és egyúttal bevezetjük a tipikus jelöléseket.

matematikai modell	Időtartomány	Frekvenciatartomány	Operátor tartomány
Vektor	$\underline{x}$	$\underline{X}$	-
Sorozat	x_n vagy x_{nT}	X_n vagy X_{nF}	-
valós függvény	$x(t)$	$X(f)$	-
komplex függvény	-	-	$X(s)$ vagy $X(z)$

A továbbiakban alkalmazandó jelölésrendszer egyik alap megállapodása: egy "iksz" jel időtartományi reprezentációját kis x -szel, frekvencia tartományi reprezentációját dőlt, nagy X -szel és az operátortartományi reprezentációt pedig álló, vastag nagy $\mathbf{X}$ -szel jelöljük.

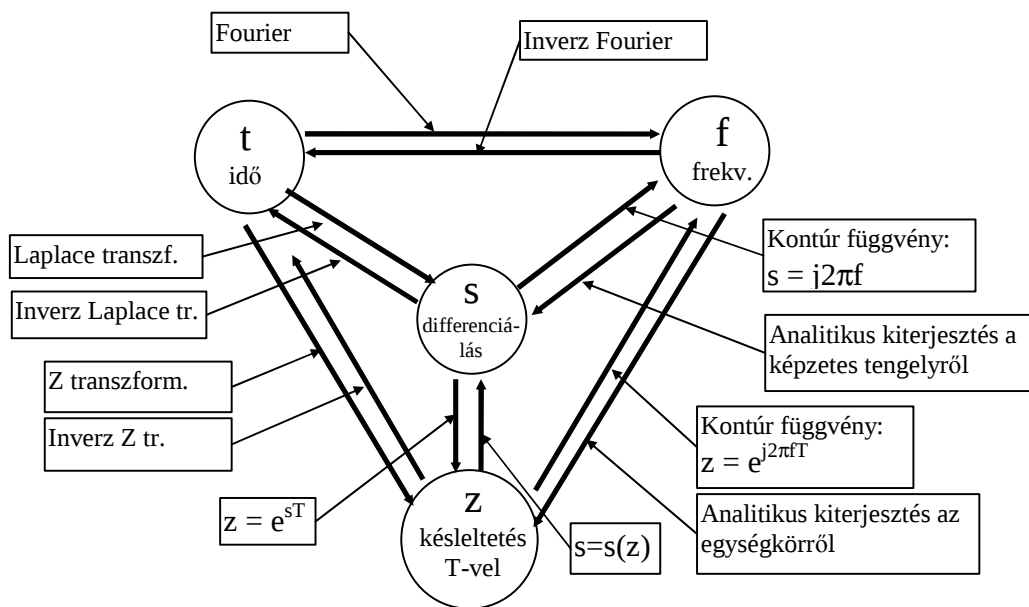
1.1.3 Jel reprezentációk transzformációi

Egy jel különböző tartományokban használt matematikai modelljei közötti közlekedési eszközöket a **reprezentációk transzformációinak** nevezzük. Az alábbi táblázatban és ábrán összefoglaljuk az idő-, frekvencia-, és operátor-tartománybeli jel reprezentációk közötti összes lehetséges közlekedési utat, azaz az összes reprezentáció-transzformációt.

Transzformáció	Input tartomány	Output tartomány	Diszciplína
Fourier tr.	Idő	Frekvencia	Valós Függvénytan
Inverz Fourier tr.	Frekvencia	Idő	
Laplace tr. Z tr.	Idő	Operátor	Komplex Függvénytan
Inverz Laplace tr. Inverz Z tr.	Operátor	Idő	
Kontúr függvény	Operátor	Frekvencia	
Analitikus kiterjesztés	Frekvencia	Operátor	
Analitikus leképzés	Operátor	Operátor	

Jelek elméletének további tárgyalását az alkalmazandó matematikai apparátus szerint csoportosítva folytatjuk. Először a **valós függvénytan** illetőségi körébe tartozó **idő-** és **frekvencia tartományi** modelleket (vektorok, sorozatok, valós függvények) és ezek transzformációit (**Fourier**

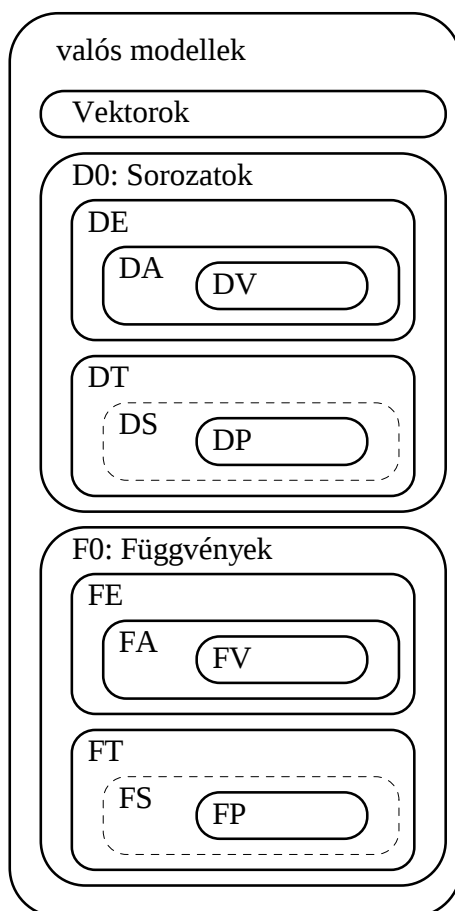
transzformációk) részletezzük, majd az ezt követő fejezetben foglaljuk össze a **komplex függvénytan** apparátussal kezelendő operátortartományi modelleket és a velük kapcsolatos transzformációkat (Laplace transzformáció, Z transzformáció).



1.2 Idő- és frekvenciatartománybeli leírás: valós függvénytani modellek, Fourier transzformáció

1.2.1 Sorozatok és függvények nevezetes osztályai, halmazai

Először (függetlenül attól, hogy az idő- vagy a frekvencia tartománybeli leírásról van-e szó) tekintsük át a sorozatok és függvények pusztán matematikai szempontból megnevezhető azon osztályait, mely osztályok fontos jelelméleti értelmezést is fognak a későbbiekben hordozni. Az áttekintés térképe az alábbi ábra.



Négyzetesen összegezhető (integrálható) sorozatok, függvények (DE, FE):

$$\text{DE: } y_n, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_n|^2 = E < \infty \qquad \text{FE: } y(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |y(x)|^2 dx = E < \infty$$

Megjegyzések:

- az (időtartományi) valós tengely feletti $|y|$ valós szám a pillanatnyi amplitúdó
- $|y|^2$ pillanatnyi teljesítmény
- teljesítmény összegezése, integrálása energia
- ezek a modellek a véges energiájú modellek
- a véges energiájú modellek $-\infty$ -ben és ∞ -ben is elhalóak, értékük nullához tart, egyszeri és nem pedig mindig zajló vagy ismétlődő "történetet" írnak le (nem stacioner jelenségek).
- Ezeket az osztályokat (a funkcionál analízisben) L2 térnek is hívják

Négyzetesen átlagolható sorozatok, függvények (DT, FT):

$$\text{DT: } y_n, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |y_n|^2 \right) = P, \quad 0 < P < \infty$$

$$\text{FT: } y(x), \quad \lim_{X \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2X} \int_{-X}^X |y(x)|^2 dx \right) = P, \quad 0 < P < \infty$$

Feladat:

- Lássuk be, hogy DE és DT (ill. FE és FT) diszjunkt halmazok, azaz egy sorozat vagy függvény egyidejűleg nem lehet véges energiájú és véges (nagyobb mint nulla) teljesítményű!

Megjegyzések:

- Adott (idő)intervallum felett összegezett (integrált) pillanatnyi teljesítmény normálva az intervallum hosszával az átlag teljesítményt adja.
- Ezek a véges teljesítmény modellek
- A véges teljesítményű modellek a végtelenben sem halhatnak el, állandóan zajló, esetleg végtelenszer ismétlődő "történeteket" írnak le (stacioner jelleg).

Abszolút összegezhető (integrálható) sorozatok, függvények (DA, FA):

$$\text{DA: } y_n, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y_n| = A < \infty \qquad \text{FA: } y(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |y(x)| dx = A < \infty$$

Feladatok:

- Lássuk be, hogy DA valódi részhalmaza DE-nek.
- Lássuk be, hogy ha egy függvény korlátos és abszolút integrálható, akkor négyzetesen is

integrálható, de fordítva nem igaz.

- Adjunk példát négyzetesen összegezzethető, de abszolút nem összegezzethető sorozatra!

Megjegyzések:

- Ezeket a halmazokat L1 térnek is hívják

Véges tartójú (véges intervallumon kívül nullával azonos) sorozatok, függvények (DV, FV):

DV: y_n , létezik $N_{\min} < N_{\max}$, melyre igaz, hogy ha $n < N_{\min}$ vagy $n > N_{\max}$ akkor $y_n = 0$.

FV: $y(x)$, létezik $X_{\min} < X_{\max}$ melyre igaz, hogy ha $x < X_{\min}$ vagy $x > X_{\max}$ akkor $y(x) = 0$.

Megjegyzések:

- Az időtengely felett véges tartójú modellel leírt jeleket **véges idejű**eknek nevezzük.
- A frekvenciatengely felett véges tartójú modellel leírt jeleket **sávhatárolt**aknak nevezzük.

Feladatok:

- Lássuk be, hogy DV valódi részhalmaza DA-nek.
- Lássuk be, hogy ha egy függvény korlátos és véges tartójú, akkor abszolút integrálható is.

Stacioner és ergodikus folyamatok realizációi (DS, FS):

DS: y_n , diszkrét, stacioner, ergodikus folyamat egy lehetséges realizációja.

FS: $y(x)$, folytonos, stacioner, ergodikus folyamat egy lehetséges realizációja

Megjegyzések:

- A sztochasztikus folyamatokról később lesz szó.

Periodikus sorozatok, függvények (DP, FP):

DP: y_n , létezik N , melyre igaz, hogy $y_{n+kN} = y_n$ minden egész k -ra.

FP: $y(x)$, létezik X , melyre igaz, hogy $y(x+kX) = y(x)$ minden egész k -ra.

Feladatok:

- Lássuk be, hogy DP valódi részhalmaza DT-nek.
- Lássuk be, hogy véletlen fázisú szinusz stacioner véletlen folyamat..

1.2.2 Műveletek valós modellekkel

Az alábbiakban listaszerűen összeszedjük azokat a fontosabb műveleteket, melyeket akár idő- akár frekvencia tartományi vektorokon, sorozatokon és függvényeken végezhetünk.

Művelet	egy operandus	több operandus	paraméteres	típus váltó	további megjegyzés
Skalárral szorzás	✓		c		
Összeadás,		✓			
lineár kombináció		✓	$c_1, c_2, \dots c_n$		
Szorzás		✓			✓
Eltolás	✓		d		✓
Megfordítás	✓				
Konvolúció		✓			✓
Periodikus kiterjesztés	✓		P	✓	✓
Ablakolás	✓		$w(x), w_n$	✓	✓
Mintavételezés	✓		D	✓	✓
Interpolálás	✓		$s(x)$	✓	✓

A továbbiakban a felsorolt műveletekkel kapcsolatban (ott, ahol az adott művelet fogalma ezt egy kicsit is szükségessé teszi) definiáló, értelmező és részletező megjegyzések következnek. Ahol szükséges ott majd külön felhívjuk a figyelmet a speciális jelfeldolgozási megfontolásokra.

Szorzás:

Vektoroknál elemenkénti szorzást jelent.

Eltolás:

Függvénynél, sorozatnál evidens.

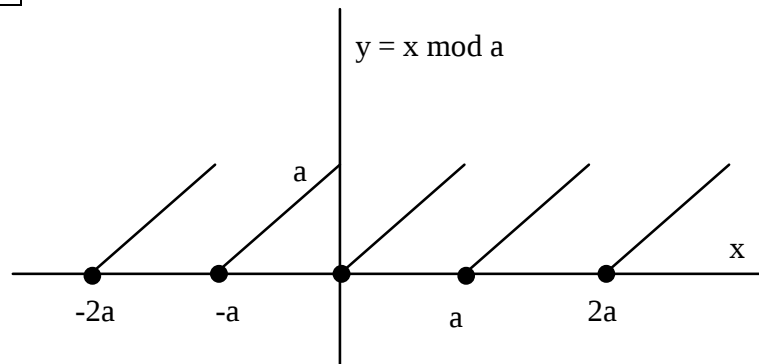
Vektornál ciklikus (cirkuláris) eltolás

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \quad \text{vektor } m\text{-el eltoltja } \underline{y} = \begin{pmatrix} x_{(0-m) \bmod N} \\ x_{(1-m) \bmod N} \\ \vdots \\ x_{(i-m) \bmod N} \\ \vdots \\ x_{(N-1-m) \bmod N} \end{pmatrix}$$

Ciklikus eltolásnál tehát az indexfüggvényben a moduló függvényt kell alkalmazni, így nem lépünk ki a $\{0, 1, \dots, (N-1)\}$ értelmezési tartományból.

A **moduló függvény** definíciója: és ábrája:

$y = x \bmod a = y(x)$
 x : valós,
 a : pozitív valós,
 y : $0 \leq y < a$ és
 $x = ka + y$, ahol k egész



Megfordítás:

$x(t)$ jel megfordítottja $x(-t)$;

x_n sorozat megfordítottja x_{-n}

vektorok esetén az $i \rightarrow (-i \bmod N)$ átindekszelést jelent (a vektor elemek egy speciális átrendezése, permutációja).

A megfordítás kapcsán hívhatjuk fel a figyelmet a vonatkozó objektumok **páros, páratlan** tulajdonságára:

Párosság: az objektum azonos a megfordítottjával.

Függvény: $x(t) = x(-t)$, $t = -\infty \dots \infty$

Sorozat: $x_n = x_{-n}$, $n = -\infty \dots \infty$

Vektor: $x_n = x_{(-n \bmod N)}$, $n = 0 \dots (N-1)$

Páratlanság: az objektum azonos a megfordítottja inverzével.

Függvény: $x(t) = -x(-t)$, $t = -\infty \dots \infty$

Sorozat: $x_n = -x_{-n}$, $n = -\infty \dots \infty$

Vektor: $x_n = -x_{(-n \bmod N)}$, $n = 0 \dots (N-1)$

Páros-páratlan dekompozíció: minden objektum (függvény, sorozat, vektor) egyértelműen felbontható páros és páratlan része összegére:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$$

Konvolúció:

Különböző típusú modellekre különböző formulákkal definiált a konvolúció művelete. Az alábbi öt konvolúció típust vezetjük be:

Folytonos lineáris konvolúció
 Folytonos periodikus konvolúció
 Diszkrét lineáris konvolúció
 Diszkrét periodikus konvolúció
 Ciklikus (cirkuláris) konvolúció

A definíciók:

Folytonos lineáris konvolúció:

$$y(x) * v(x) = w(x), \quad w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y(u) v(x - u) du$$

Folytonos periodikus konvolúció:

$$\tilde{y}_P(x) * \tilde{v}_P(x) = \tilde{w}_P(x), \quad \tilde{w}_P(x) = \frac{1}{P} \int_{u_0}^{u_0+P} \tilde{y}_P(u) \tilde{v}_P(x - u) du$$

Megjegyzés: A tildával és a P indexszel a függvények P szerinti periódusos voltát hangsúlyozzuk

Diszkrét lineáris konvolúció:

$$y_n * v_n = w_n, \quad w_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \cdot v_{n-k}, \quad n = -\infty \dots \infty$$

Diszkrét periodikus konvolúció:

$$\tilde{y}_n * \tilde{v}_n = \tilde{w}_n = \frac{1}{N} \sum_{m=m_0}^{m_0+N-1} \tilde{y}_m \cdot \tilde{v}_{n-m}, \quad n = -\infty \dots \infty.$$

Ciklikus (cirkuláris) konvolúció:

$$\underline{y} * \underline{v} = \underline{z}, \quad \text{ahol } z_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cdot v_{(i-k) \bmod N}, \quad i=0,1,\dots,(N-1)$$

A konvolúció műveletét szemléletesen az alábbi műveletek egymásutánjának eredményeként is felfoghatjuk:

- az egyik operandus **megfordítása** (tükrözése $v(-x)$) majd
- **eltolása** ($v(-(x-u)) = v(u-x)$)
- és a két operandus **skalár szorzata** (szorzás és összegezés, integrálás) adja a konvolúció **eredményét** az eltolás számértékénél.

A fenti konvolúció típusoknál azonosak voltak a jeltípusok. Definiálhatók olyan konvolúciók is, amelyeknél a két bementi jel különböző típusú. Tetszőleges jeltípusok közötti konvolúciókat az alábbi táblázatban lehetne összefoglalni, ahol függőlegesen az egyik vízszintesen a másik bemenőjelet tüntetjük fel:

	$y(t)$	$\tilde{y}(t)$	y_n	$\tilde{y}_n$	$\underline{y}$
$v(t)$	✓				
$\tilde{v}(t)$		✓			
v_n			✓		
$\tilde{v}_n$				✓	
$\underline{v}$					✓

A konvolúciók több irányú általánosításának legfontosabb eseteire a későbbiekben visszatérünk.

A konvolúció értelmezéséhez tekintünk át az alábbi tulajdonságokat és elemi feladatokat.

A konvolúció néhány elemi **tulajdonsága**:

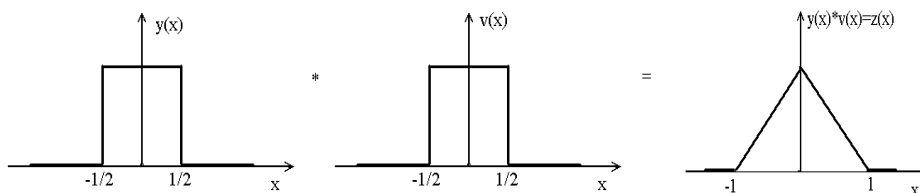
Lássuk be - a folytonos lineáris konvolúció esetére megfogalmazott, de általánosan is érvényes - alábbi állítások igazságát:

- $y(x)*v(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y(u) v(x-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} y(\frac{x}{2}+u) v(\frac{x}{2}-u) du$
- $y(x)*v(x) = v(x)*y(x)$ (kommutativitás)
- $(y(x)*v(x))*z(x) = y(x)*(v(x)*z(x))$ (asszociativitás)
- $y(x)*(v(x)+z(x)) = y(x)*v(x) + y(x)*z(x)$ (disztributivitás)
- Ha $y(x)*v(x) = z(x)$, akkor
 - $y(x)*v(x-u) = z(x-u)$,
 - $y(x-u)*v(x) = z(x-u)$,
 - $y(x-u_1)*v(x-u_2) = z(x-u_1-u_2)$ (eltolási tulajdonságok).

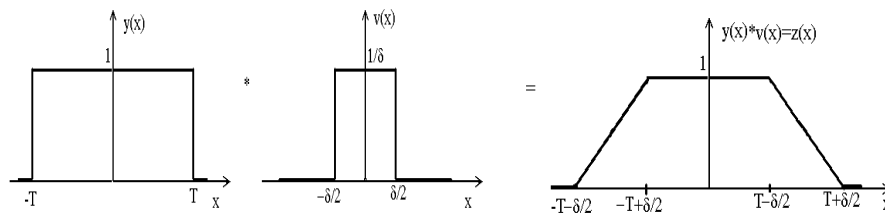
A konvolúcióval kapcsolatos néhány elemi **feladat**:

Gondoljuk végig a következő egyszerű példákat (vektorokkal, sorozatokkal, és periodikus változatokkal is)!

1. Két azonos szélességű impulzus konvolúciója:

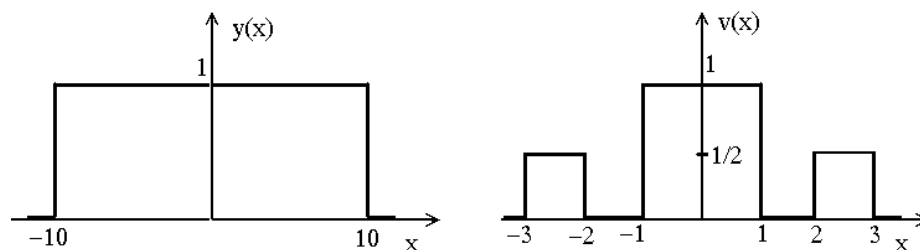


2. Két különböző szélességű impulzus konvolúciója:



3. Mi történik, ha az előbbi példában az δ szélességű impulzus nem az $x = -\delta/2$ -től, hanem a $x = T - \delta/2$ -től kezdődik?

4. Mi az eredménye a $z(t) = y(t) * v(t)$ műveletnek, ha



A konvolúcióval kapcsolatos néhány **speciális sorozat, függvény**:

A függvények terében létezik-e $e(x)$ egység elem az alábbi értelemben: Bármely $y(x)$ -szel konvolválva $y(x)$ -et kapunk: $y(x) * e(x) = y(x)$, $e(x) = ?$

(megoldás: $e(x) = \delta(x)$. Ez a $\delta(x)$ Dirac delta függvény egyik fajta definiálása.)

És a sorozatok terében?

Létezik-e olyan függvény, melyet önmagával konvolválva önmagát kapjuk: $e(x) * e(x) = e(x)$?

(segítség: gondoljunk arra, hogy valószínűségi változók összegének együttes eloszlását úgy kapjuk meg, ha konvolváljuk az eredeti eloszlások sűrűségfüggvényét. Továbbá normális eloszlású valószínűségi változó összege szintén normális eloszlást követ.)

A konvolúció segítségével definiálhatjuk a **korreláció** műveletét :

$$y(x) \text{ corr } v(x) = c_{yv}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y(u) v(x+u) du.$$

$c_{yv}(x)$ konvolúció képzéssel is megadható: $c_{yv}(x) = y(x) * v(-x)$.

Az $y(x)$ függvény **autokorrelációs** függvénye: $c_{yy}(x) = y(x) * y(-x)$, azaz a egy függvény autokorrelációja önmaga és megfordítottjának konvolúciója.

A konvolúcióval kapcsolatban végezetül megjegyezzük, hogy a lineáris transzformációknak nagyon

fontos osztálya egy-egy rögzített függvénnyel (sorozattal, vektorral) végzett konvolúcióval definiálható:

Például az $y(x)$ függvény $H\{y(x)\}=z(x)$ **Hilbert transzformáltjának**, az $1/x$ függvénnyel vett konvolúcióját nevezzük:

$$H\{y(x)\} = z(x) = \frac{1}{x} * y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)}{x-t} dt \text{ c.}$$

Gondoljuk végig, hogy az x_n sorozat mindenkor utolsó L mintájának átlagolásaként kapott y_n sorozat az x_n sorozatnak mely sorozattal vett konvolúciójaként írhatjuk fel!

Egy vektor elemeinek ciklikus permutációját mely vektorral vett konvolúció adja?

Periodikus kiterjesztés:

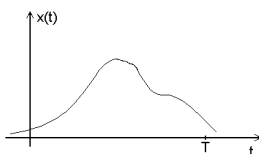
Aperiodikus $x(t)$ függvényt ill. x_n sorozatot a T ill. N paraméter szerint periodikussá alakítja.

Definíció :

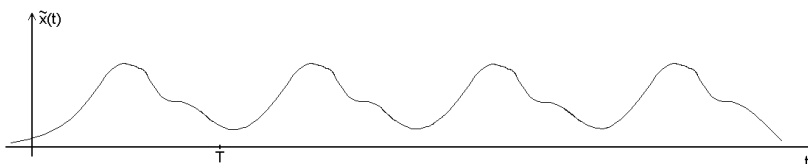
$$x(t) \rightarrow \tilde{x}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT), \quad T \text{ a periódusidő ill.}$$

$$x_n \rightarrow \tilde{x}_{N,n} = \tilde{x}_N(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{n-mN}, \quad N \text{ a periódusszám}$$

Ha pl. $x(t)$ az alábbi függvény



amelynek periodikus kiterjesztése:



Megjegyzések:

- A periodikus kiterjesztés létezésének szükséges feltétele, hogy az eredeti jel a végtelenben elhaló legyen ($\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ill. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$).
- Ha a jel nem véges tartójú, akkor a periodikus kiterjesztés mindenképpen **átlapolódásos**.

- (Ami azt eredményezi, hogy $\tilde{x}_T(t)$ -ből általában nem állítható vissza az eredeti $x(t)$ jel).
- Ha a jel véges tartójú és a tartóhossz kisebb, mint a T periódusidő, akkor a periodikus kiterjesztés **átlapolódás mentes** (azaz nincs információvesztés)

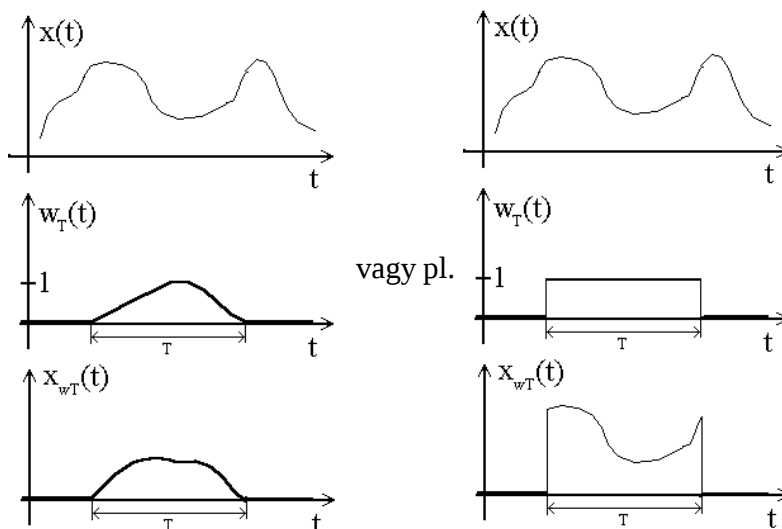
Ablakolás:

Véges tartójú függvénnyel (vagy sorozattal) való szorzást jelent. A művelet paramétere a véges tartójú $w_T(t)$ ablakfüggvény. Az $x(t)$ folytonos jel $w_T(t)$ szerint ablakoltja:

$$x(t) \rightarrow x_{wT}(t) = x(t) \cdot w_T(t)$$

Az ablakolás az x_n sorozatra is értelmezhető:

$$x_n \rightarrow x_{w,n} = x_n \cdot w_{N,n}$$



Megjegyzések:

- Ha az ablakfüggvény (ahol nem 0 ott) egységnyi, akkor az ablakolt jel egy véges idejű megfigyelést jelent. (A fenti ábrán a második eset: négyzetes ablakolás.)
- Az ablakolás nemcsak az időtengelyen, hanem a frekvenciatengelyen is értelmezhető. Ekkor az ablakolást szűrésnek is nevezhetjük.
- Ha az eredeti $x(t)$ v. x_n jel nem véges tartójú, akkor az ablakolás **veszteséges**.
- Ha az eredeti $x(t)$ v. x_n jel véges tartójú és a véges tartó beleesik az ablakba, akkor az ablakolás **veszteségmentes**.
- Az átlapolódás mentes periodikus kiterjesztés inverze a veszteség mentes ablakolás négyzetes ablak alkalmazásakor.

Mintavételezés:

Valós függvényen értelmezett művelet, amely egy számsorozatot eredményez. Paramétere a T mintavételi idő, vagy az F frekvencia mintavételezési rászter. Folytonos reprezentációról

diszkrét reprezentációra való áttérést jelent:

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{T} x_n = x(nT) \text{ vagy} \\ X(f) &\xrightarrow{F} X_n = X(nF) \end{aligned}$$

Megjegyzés:

A mintavételezés művelete nemcsak az időtengely felett, hanem a frekvenciatengelyen is értelmezett. Ekkor egy folytonos spektrumból egyenlő frekvenciaközű mintákat állítunk elő.

Interpolálás:

Diszkrét reprezentációról folytonos reprezentációra való áttérést jelent a művelet $s(\cdot)$ elmi jelalak paramétere szerint:

$$\begin{aligned} x_{nT} &\xrightarrow{s_n(t)} x(t) : x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot s(t - nt) \text{ vagy} \\ X_{nF} &\xrightarrow{S(f)} X(f) : X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \cdot S(f - nf) \end{aligned}$$

Megjegyzés:

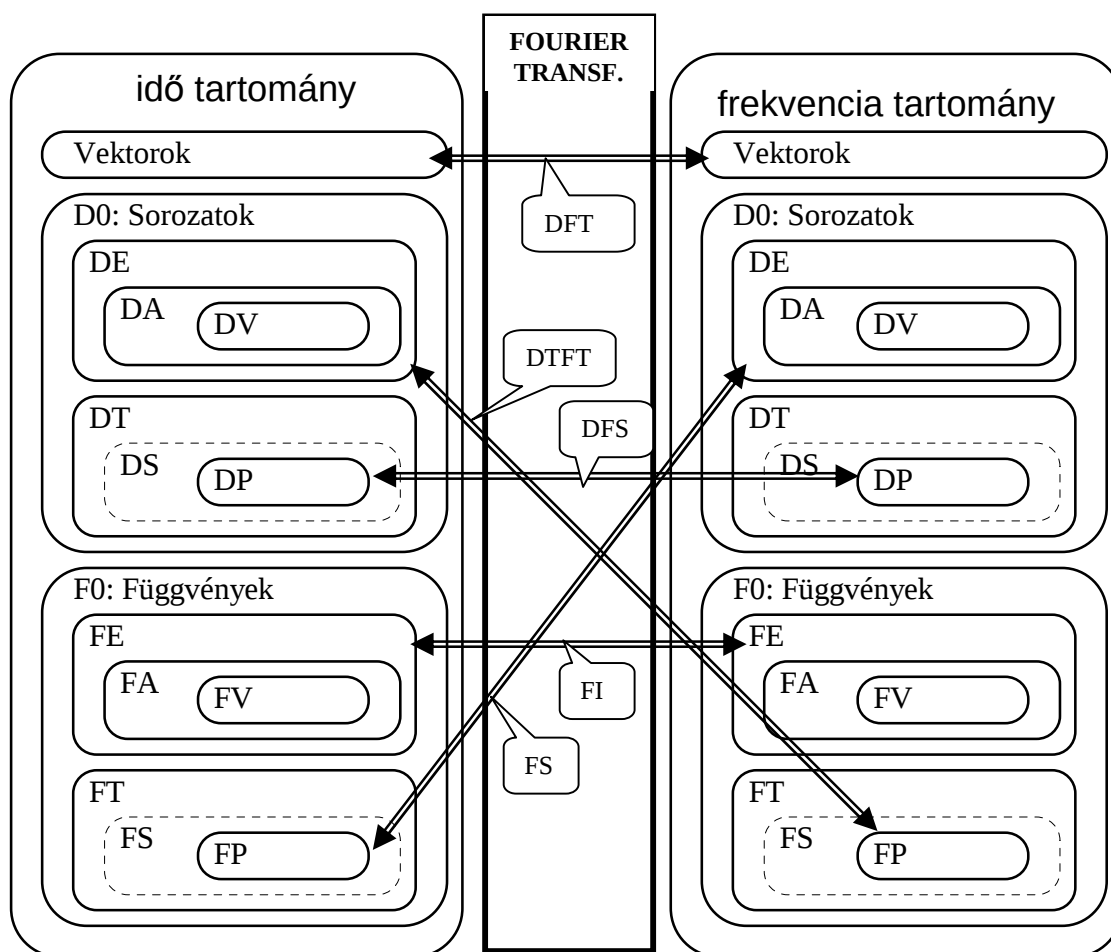
- Mind a mintavételezés, mind az interpolálás a modell típusát váltó művelet. $(x(t) \leftrightarrow x_n)$
- Az interpolálás egy számsorozat és egy folytonos függvény konvolúciója.

1.2.3 A Fourier transzformációk sokfélesége: FI, FS, DTFT, DFS, DFT

Egy jelet az időtartományban az $x(t)$ vagy x_n "története" írja le, a frekvenciatartományban pedig az $X(f)$ spektruma, mely szerint a jel az f frekvenciájú harmonikus rezgéseknek az $X(f)$ szerinti súlyaiként rakható össze. A jel időbeli és frekvenciatartománybeli leírása között a Fourier transzformáció teremt kapcsolatot. Attól függően, hogy adott esetben milyen típusú matematikai modellre alkalmazzuk (vektor; aperiodikus- vagy periodikus sorozat; aperiodikus- vagy periodikus függvény), a Fourier transzformáció konkrét formájában nagyon különböző lehet:

- Fourier integrál (FI)
- Fourier sor (FS)
- Diszkrét idejű Fourier transzformáció (DTFT)
- Diszkrét Fourier sor (DFS)
- Diszkrét Fourier transzformáció (DFT)

. Az alábbi ábrán tekinthetjük át az egyes speciális transzformációk helyét és szerepét.



A Fourier transzformációnak a különböző típusú bemeneti (idő tartományi) és kimeneti (frekvencia tartományi) matematikai modelljeihez tartozó eseteit az alábbi táblázatban foglaltuk össze, majd ismertetjük a konkrét formális definíciókat.

Fourier integrál (FI)	Fourier sor (FS)	Diszkrét idejű Fourier tr. (DTFT)	Diszkrét Fourier sor (DFS)	Diszkrét Fourier transzformált (DFT)
$x(t) \rightarrow X(f)$	$\tilde{x}(t) \rightarrow X_n$	$x_n \rightarrow \tilde{X}(f)$	$\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{X}_n$	$\underline{x} \rightarrow \underline{X}$

Fourier-integrál (FI):

Bemenő adat : $x(t)$ legalább négyzetesen integrálható

Kimenő adat : $X(f)$ legalább négyzetesen integrálható

Definíció : $\mathcal{F}\{x(t), f\} = X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$

Inverz transzf. : $\mathcal{F}^{-1}\{X(f), t\} = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$

Megjegyzések:

- $x(t)$ -nek legalább négyzetesen integrálhatónak kell lennie; ekkor a hozzá tartozó $X(f)$ spektrum is négyzetesen integrálható.
- Ha $x(t) \in FA$ (abszolút integrálható), akkor $X(f)$ folytonos és akárhányszor deriválható (nincs benne ugrás).
- Ha $x(t) \in FV$ (véges tartójú), akkor biztos, hogy $X(f)$ **nem** véges tartójú. (A fenti állítások természetesen az inverz-transzformációra is érvényesek a be- és kimeneti jeleket megcserélve.)
- Alap feladatok:
 rektanguláris ablak Fourier transzformáltja,
 rektanguláris ablak inverz Fourier transzformáltja,
 abszolút integrálhatóság, folytonosság, négyzetesen integrálhatóság összefüggései az idő és a frekvencia tartományban.
- Lássuk be, hogy az inverz Fourier-transzformáció valóban a inverz párja $\mathcal{F}\{x(t), f\}$ -nek.

$$\left(x(t) \longrightarrow X(f) \xrightarrow{?} x(t) \right)$$

Fourier-sor (FS):

Bemenő adat : $\tilde{x}(t) \in FP$ (T-re periodikus jel)

Kimenő adat : $X_n \in DE$ (legalább négyzetesen összegezhető)

Definíció : $F\{\tilde{x}(t), nF\} = X_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \tilde{x}(t) e^{-j2\pi n F t} dt$, $F=1/T$, $n=-\infty \dots \infty$

Inverz transzf. : $F^{-1}\{X_n, t\} = \tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$

Megjegyzések:

- Ha $\tilde{x}(t)$ legalább négyzetesen integrálható egy periódusa fölött; akkor a hozzá tartozó X_n Fourier-sor is négyzetesen összegezhető. (Az állítás megfordítása is igaz.)
- Ha $\tilde{x}(t)$ négyzetesen integrálható egy T periódusidőre, **de** nem folytonos, akkor az X_n sorozat négyzetesen összegezhető, de nem abszolút összegezhető.

Feladat:

A Fourier sor definícióját gyakran az $1/T$ -s konstans nélkül adják meg. Számítsuk ki, hogy $1/T$ -vel vagy e nélkül lesznek-e a megadott FS egyenletek transzformációs párok.

Diszkrét idejű Fourier-transzformált (DTFT):

Bemenő adat : $x_{nT} \in DE$ (legalább négyzetesen összegezhető sorozat, T a mintavételi idő)

Kimenő adat : $\tilde{X}(f) \in FP$ (periodikus függvény, $F=1/T$ periódussal)

Definíció : $F\{x_{nT}, f\} = \tilde{X}_F(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi n \frac{f}{F}}$, $F = \frac{1}{T}$

Inverz transzf. : $F^{-1}\{\tilde{X}_F(f), nT\} = x_n = \frac{1}{F} \int_{f_0}^{f_0+F} \tilde{X}(f) e^{j2\pi n \frac{f}{F}} df$

Megjegyzések:

- x_n sorozatnak négyzetesen összegezhetőnek kell lennie; a hozzá tartozó $\tilde{X}_F(f)$ Fourier transzformált is négyzetesen integrálható egy F periódusa fölött..
- Ha x_n abszolút összegezhető, akkor $\tilde{X}_F(f)$ folytonos és akárhányszor differenciálható.. (Értelemszerűen az állítások fordítottja is igaz.)

Feladat:

A DTFT definícióját gyakran az $1/F$ -es konstans nélkül adják meg. Számítsuk ki, hogy $1/F$ -fel vagy e nélkül lesznek-e a megadott transzformációk transzformációs párok.

Diszkrét Fourier-Sor (DFS):

Bemenő adat : $\tilde{x}_n \in DP$ (N-re periodikus sorozat)

Definíció : $\mathbf{F}\{\tilde{x}_{nT}, m\} = \tilde{X}_{mF} = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \tilde{x}_{nT} e^{-j2\pi m \frac{n}{N}}, m=-\infty \dots \infty$

Inverz transzf. : $\mathbf{F}^{-1}\{\tilde{X}_{nF}, mT\} = \tilde{x}_{mT} = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} \tilde{X}_{nF} e^{j2\pi m \frac{n}{N}}$

Kimeneti adat : $\tilde{X}_n \in DP$ (N-re periodikus sorozat)

Feladat:

Lássuk be, hogy a megadott DFS egyenletek valóban transzformációs párok, és szükség van $1/N$ -es konstansra az inverz transzformációnál.

Diszkrét Fourier-transzformált (DFT):

Bemeneti adat : $\underline{x}$ (N dimenziós vektor)

Definíció : $\mathbf{F}\{\underline{x}\} = \underline{X} = \underline{W}_N \cdot \underline{x}$, ahol $\underline{W}_N = \{w_N^{kn} = e^{-jkn \frac{2\pi}{N}}, k, n = 0, \dots, N-1\}$

Inverz transzf. : $\mathbf{F}^{-1}\{\underline{X}\} = \underline{x} = \underline{W}_N^{-1} \cdot \underline{X} = \frac{1}{N} \underline{W}_N^* \cdot \underline{X}$, ahol * a konjugálást jelenti.

Kimeneti adat : $\underline{X}$ (N dimenziós vektor)

Megjegyzések:

- Mivel a DFT két vektor között teremt kapcsolatot, ezért felfogható vektorterek lineáris transzformációjaként, ahol a transzformációs mátrix: $\underline{W}_N$.
- $\underline{W}_N$ elemei az egységkörön helyezkednek el (N-edfokú egységgyökök).
- Az általánosan elterjedt FFT és IFFT elnevezés mögött a DFT-nek egy speciális algoritmussal történő számolása rejlik. Ezekre később visszatérünk.

Feladat:

Lássuk be, hogy $\underline{W}_N$ invertálható (determinánsa nem 0) és $\underline{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \underline{W}_N^*$.

1.2.4 A komplex értékű spektrum valós értékű részfüggvényei

Az $X(f)$ komplex értékű spektrumhoz több valós értékű rész-spektrum is rendelhető. Az $X(f)$ -et valós- és képzetes részre bontva

$$X(f) = R(f) + jI(f),$$

kapjuk az $R(f)$ **valós rész** és $I(f)$ **képzetes rész spektrumokat**.

Az $X(f)$ komplex értékű függvényt az

$$X(f) = A(f)e^{-j\varphi(f)} = e^{a(f)-j\varphi(f)},$$

exponenciális alakba írva kapjuk az $A(f)$ **amplitúdó-spektrumot**, az $a(f)$ logaritmikus abszolút érték-spektrumot és a $\varphi(f)$ **fázis-spektrumot**.

Az $A(f)$ amplitúdó-spektrum és a hozzá tartozó $\varphi(f)$ fázis-spektrum többféle értelmezése is használatos:

- Valós, előjeles $A(f)$ spektrum, a hozzá tartozó $\varphi(f)$ -ben nincsenek π értékű ugrások.
- $A(f)$ abszolút érték spektrum, $\varphi(f)$ -ben π értékű ugrások lépnek fel ott, ahol az előjeles amplitúdó előjelet váltana.
- Belapolt $\varphi(f)$ fázis-spektrum, értéke csak $0 \dots 2\pi$ (vagy $-\pi \dots +\pi$) között lehetséges, 2π értékű ugrások vannak benne.
- Folytonos, nem korlátos $\varphi(f)$ fázis-spektrum, értéke 2π nagyságú ugrások nélkül változik (unwrap).

A folytonos és differenciálható fáziskarakterisztika alapján értelmezhető a **futási idő spektrum**:

$$\tau(f) = - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{df} \varphi(f).$$

Az $|X(f)|^2 = |A(f)|^2 = E(f)$ függvényt **energiasűrűség-spektrumnak** nevezzük.

.

1.2.5 A Fourier transzformációk tulajdonságai

A tulajdonságokat a Fourier-integrálra vizsgáljuk részletesen. Ezek jórészt értelmezhetők a többi 4 Fourier-transzformáció típusra is. A legfontosabb eltérésekre kitérünk.

Inverz-szimmetria:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{x(t), f\}, t\} = x(t)$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}\{X(f), t\}, f\} = X(f)$$

Feladat:

A Fourier-transzformáció és az inverz transzformáció kifejezésében csak egy negatív előjel eltérés van. Mit kapunk, ha egy négyzetesen integrálható $x(t)$ jel $X(f)$ spektrumát véletlenül inverz transzformáció helyett újból Fourier-transzformálunk?

Megoldás: $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{x(t), f\}, t\} = x(-t)$

Megjegyzés: A vektorokra értelmezett DFT-t ha kétszer egymás után elvégezzük, akkor a kapott $\underline{x} \cdot (\underline{W}_N)^2$ vektorban pontosan az $\underline{x}$ elemei szerepelnek, de fordított sorrendben. Mivel a $(\underline{W}_N)^2$ mátrix az $\underline{x}$ vektor elemsorrendjét megfordítja,

Konjugált komplex szimmetria:

Ha $x(t) \leftrightarrow X(f)$ Fourier transzformált pár, akkor
 $\mathcal{F}\{x^*(t), f\} = X^*(-f)$, ahol $*$ a konjugálást jelöli.

Feladat: Bizonyítsuk be az állítást!

Következmények:

Legyen $x(t) = r(t) + j \cdot i(t)$ és $X(f) = R(f) + j \cdot I(f)$, ahol $r(t)$, $i(t)$, $R(f)$ és $I(f)$ valós függvények. Minden valós $y(x)$ függvény felbontható egy $y^e(x)$ páros és egy $y^o(x)$ páratlan függvény összegére: $y(x) = y^e(x) + y^o(x)$, ahol

$$y^e(x) = \frac{1}{2}(y(x) + y(-x)) \text{ és } y^o(x) = \frac{1}{2}(y(x) - y(-x)).$$

Ezzel minden $x(t)$ és $X(f)$ komplex függvény az alábbi alakban írható föl (valós-képzetes, páros-páratlan dekompozíció).

A nyilak azt szemléltetik, hogy a konjugált-komplex szimmetria következtében mely függvénykomponensek között van Fourier-transzformációs kapcsolat.

$$\begin{array}{cccc} x(t) & = & r^e(t) + r^o(t) + j \cdot i^o(t) + j \cdot i^e(t) \\ \downarrow \mathcal{F} & & \downarrow \mathcal{F} & \swarrow \mathcal{F} \quad \searrow \mathcal{F} & \downarrow \mathcal{F} \\ X(f) & = & R^e(f) + R^o(f) + j \cdot I^o(f) + j \cdot I^e(f) \end{array}$$

A fentiekből kiolvasható, hogy ha $x(t)$ valós ($i(t)=0$), akkor

- az $R(f)$ valósrészt-spektrum, az $A(f)$ abszolútérték-spektrum és a $\varphi(f)$ futási idő-spektrum páros lesz;
- az $I(f)$ képzetesrészt-spektrum, és a $\phi(f)$ fázis spektrum páratlan függvény lesz.

Megjegyzések:

– A párosság és páratlanság fogalma sorozatokra is egyértelmű:

x_n páros, ha $x_{-n} = x_n$ ill. páratlan, ha $x_{-n} = -x_n$.

– Egy vektort akkor tekintünk párosnak, ha $x_{-i \bmod N} = x_i$ és páratlannak, ha $x_{-i \bmod N} = -x_i$ ($i=0,1,\dots,N-1$).

Eltolás, moduláció:

- Ha $x(t) \leftrightarrow X(f) = A(f)e^{-j\varphi(f)}$ Fourier transzformált pár, akkor

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0), f\} = e^{-j2\pi f t_0} X(f).$$

Az eltolt jel amplitúdó-karakterisztikája nem változik: $A_{\text{elt.}}(f) = A(f)$.

Az eltolt jel fázis- és futásidő-karakterisztikája:

$$\varphi_{\text{elt.}}(f) = \varphi(f) + 2\pi f t_0 \xrightarrow{d/df} \tau_{\text{elt.}}(f) = \tau(f) + t_0.$$

- A komplex harmonikus jellel való szorzás a spektrum f_0 -al való eltolását jelenti.

$$\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t} x(t), f\} = X(f-f_0)$$

Megjegyzés:

- A műveletet frekvenciaáttevésnek, keverésnek vagy modulációnak nevezzük.
- Valós harmonikus jellel való szorzás felfogható egy konjugált-komplex harmonikus jelpárral való szorzásnak:

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t) \cdot x(t), f\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}(e^{-j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_0 t}) \cdot x(t), f\right\} = \frac{1}{2}(X(f+f_0) + X(f-f_0)).$$

(Ez a kétoldalsávós amplitúdómoduláció.)

Szorzás, konvolúció:

Legyen $x_1(t) \leftrightarrow X_1(f)$ és $x_2(t) \leftrightarrow X_2(f)$ Fourier transzformációs pár.

- A két időfüggvény szorzatának Fourier transzformáltja a két spektrum lineáris folytonos konvolúciója lesz:

$$\mathcal{F}\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = X_1(f) * X_2(f)$$

- A két időfüggvény lineáris folytonos konvolúciója a két spektrum szorzata lesz:

$$\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(f) \cdot X_2(f).$$

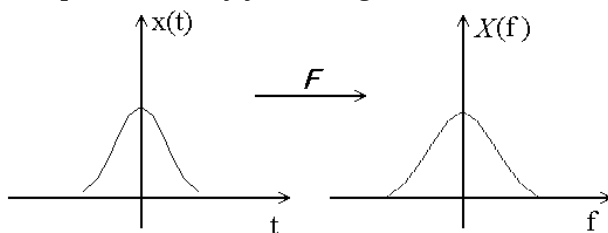
Léptékváltás:

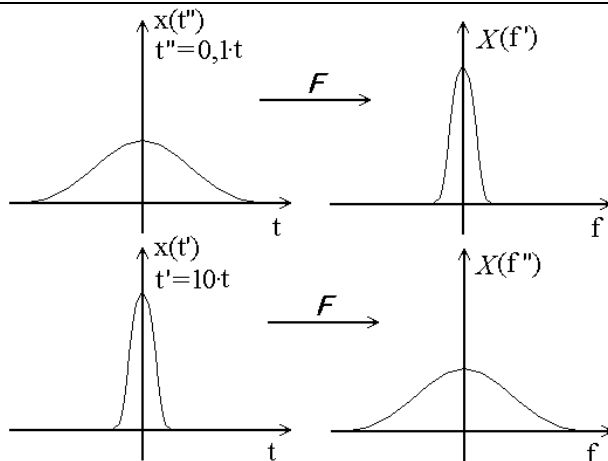
Ha $x(t) \leftrightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$ és $a > 0$ valós szám, akkor

$$x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} x(at) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \bigg|_{\substack{\tau=at \\ dt=d\tau/a}} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot e^{-j2\pi \frac{f}{a} \tau} d\tau \Rightarrow$$

$$x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right).$$

A kapott eredmény jelentőségét az alábbi ábrán illusztráljuk:





Ha $a > 1$, akkor összehúszóítjuk az időtengelyt, azaz felgyorsítjuk a jel lefolyását, ezáltal a spektrum kiszélesedik.

Ha $a < 1$, lelassítjuk a jel lefolyását, a spektrum keskenyebbé válik.

$\Rightarrow$ Nem lehet egyszerre gyors lefutású és keskeny sáv szélességű egy jel!

A Parseval-tétel:

Ha $x_1(t) \leftrightarrow X_1(f)$ és $x_2(t) \leftrightarrow X_2(f)$ Fourier transzformált pár, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f) \cdot X_2^*(f) df.$$

Ennek fontos esete, amikor $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$; ilyenkor a fenti integrál a jel energiáját adja meg:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (\text{energia tétel}).$$

$\Rightarrow$ Az energia egy invariáns jellemzője a Fourier transzformációnak.

Derivált:

Ha $x(t) \leftrightarrow X(f)$ Fourier-transzformációs pár, és létezik az $x(t)$ jel n -edik deriváltja, akkor

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f).$$

Integrál:

Ha $x(t) \leftrightarrow X(f)$ Fourier-transzformációs pár, és az $x(t)$ függvény integrálható, akkor

$$x'(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{F} \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f).$$

Megjegyzés:

– Diszkrét sorozatoknál a differenciálás egy különbségképzést jelent:

$$x_{nT} \rightarrow d_n = (x_n - x_{n-1}) \text{ (hátra differencia)}$$

$$x_{nT} \rightarrow d_n = (x_{n+1} - x_n) \text{ (előre differencia)}$$

– Diszkrét sorozatoknál az integrálás akkumulálást, összegzést jelent:

$$x'_{nT} = \sum_{m=-\infty}^n x_m .$$

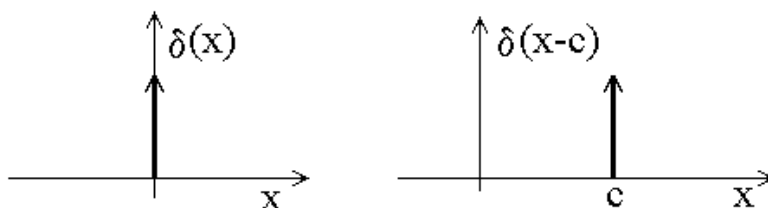
Egyéb:

Ha $x(t) \leftrightarrow X(f)$ Fourier-transzformációs pár, akkor $x(t)$ és $X(f)$ nem lehet egyidejűleg véges tartójú. Másképpen fogalmazva véges tartójú függvény Fourier-transzformáltja sohasem véges tartójú ill. sávhatárolt $x(t)$ függvény sem lehet véges tartójú..

1.2.6 A Fourier transzformációk egységes leírása

A Dirac delta definiálása:

– Olyan valós és integrálható függvény, amely mindenhol 0 kivéve a 0 helyen, ahol nem korlátos. Jelölése:



– A Dirac-delta olyan függvény, amely integrálható és integrálja:

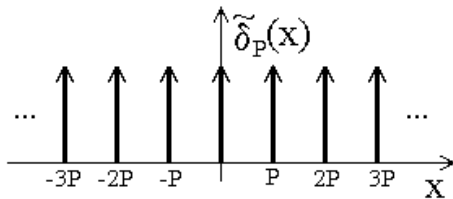
$$\int_a^c \delta(x-b)dx = \begin{cases} 1; & \text{ha } a < b < c \\ 0; & \text{egyébként} \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$$

– A $\delta(x)$ függvény mintavételező tulajdonsága: $y(x) \cdot \delta(x-c) = y(c) \cdot \delta(x-c)$
azaz a függvénnyel szorozva egy Dirac-deltát egyenlő egy számmal (mintával) szorozva a Dirac-delta.

– Lineáris folytonos konvolúció tulajdonságai alapján: $y(x) * \delta(x-c) = y(x-c)$
azaz a függvény eltolása egyenlő az éeltolt Dirac-deltával vett konvolúcióval..

– A $\delta(x)$ periodikus kiterjesztése, a Dirac delta sorozat:

$$\tilde{\delta}_P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nP), \text{ amely } P \text{ szerint periodikus.}$$



Megjegyzések:

– Az $y(x)$ függvény periodikus kiterjesztése megadható a Dirac delta sorozattal vett konvolúcióval is:

$$y(x) * \tilde{\delta}_P(x) = \tilde{y}_P(x).$$

– A mintavételezés művelete megadható a Dirac delta sorozattal történő szorzásként:

$$y(x) \cdot \tilde{\delta}_P(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nP) \cdot \delta(x - nP), \text{ amely kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető}$$

(izomorf) az $y_{nP} = y(x=nP)$ számsorozattal. ($y(x) \cdot \tilde{\delta}_P(x) \leftrightarrow y_{nP}$)

A Dirac delta függvény és a Fourier transzformáltak tulajdonságai:

Időfüggvény: Időtartományi leírás és integrál előállítása	Spektrum: Frekvenciatartományi leírás és integrál előállítása
$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$	$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$
$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df$	$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt$
$\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{+j2\pi(t-t_0)f} df$	$e^{-j2\pi ft_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt$
$e^{j2\pi f_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{+j2\pi ft} df$	$\delta(f - f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt$
$\tilde{\delta}_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n t F}$	$\frac{1}{T} \tilde{\delta}_F(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n f T}$

- A Fourier-integrál segítségével az $x(t)$ négyzetesen integrálható jelet elő tudtuk állítani integrál alakban és ugyanígy a spektrumot is:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \quad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Ugyanígy a $\delta(t)$ is előállítható:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df \quad 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Tehát az időbeli Dirac delta függvény ($\delta(t)$) a frekvenciatengely fölött 1. (Így az egységfüggvény inverz Fourier-transzformáltja $\delta(t)$ lesz.)

- Az eltolási tétel alapján:

$$\delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft_0} \cdot e^{j2\pi ft} df \quad e^{-j2\pi ft_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j2\pi ft} dt$$

- Az időtartományban komplex harmonikus jel a frekvenciatartományban Dirac delta lesz:

$$e^{j2\pi f_0 t} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{j2\pi ft} df \quad \delta(f - f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi (f - f_0) t} dt$$

- A periodikus jelek megadhatók a Fourier-sorokkal, így a T szerint periodikus $\tilde{\delta}_T(t)$ Dirac delta sorozatnak is megadható a Fourier-sora:

$$\tilde{\delta}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-j2\pi n \frac{t}{T}}, \quad \text{ahol } c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{\delta}_T(t) \cdot e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt = \frac{1}{T}.$$

Ezzel

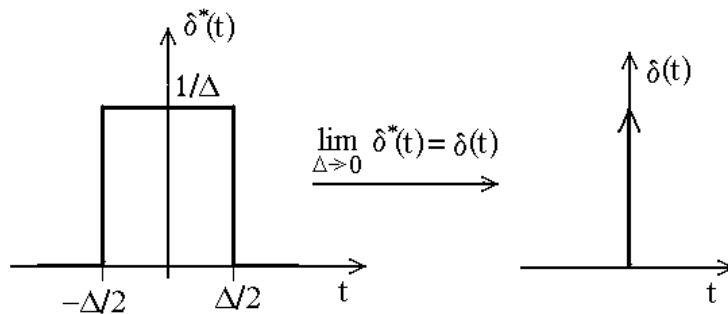
$$\tilde{\delta}_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n \frac{t}{T}}, \quad \text{azaz komplex harmonikus jelek összege.}$$

Mivel a komplex harmonikus jel a frekvenciatengely fölött Dirac delta, ezért a $\tilde{\delta}_T(t)$ Dirac delta sorozat Fourier-integrálja is Dirac delta sorozat lesz.

$$\mathcal{F}\{\tilde{\delta}_T(t), f\} = \frac{1}{T} \tilde{\delta}_F(f) \quad \boxed{\tilde{\delta}_T(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{T} \tilde{\delta}_F(f), \text{ ahol } T=1/F.}$$

Megjegyzés:

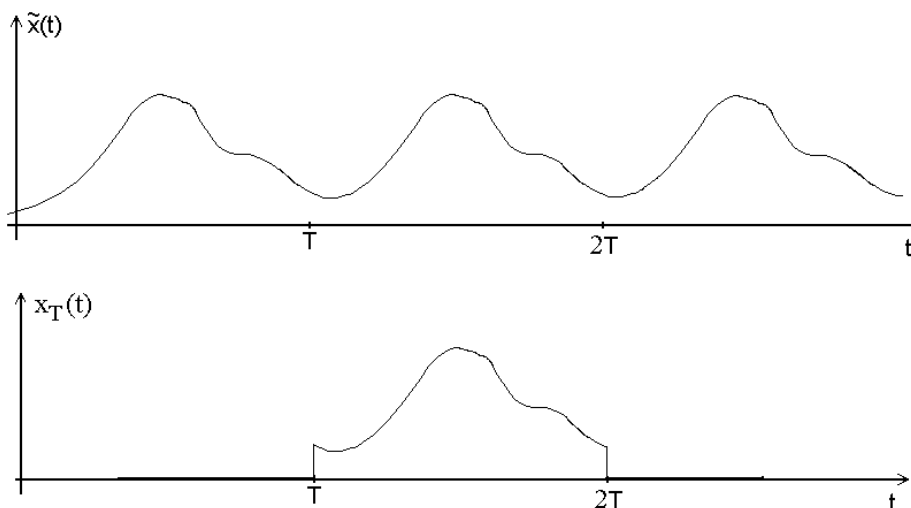
A $\delta(t)$ függvényt gyakran definiálják más egységnyi területű függvények határfüggvényeként.
Pl.:



A többi Fourier-transzformáció visszavezetése a Fourier-integrálra:

I. A Fourier-sor visszavezetése

Vegyünk egy $\tilde{x}_T(t)$ periodikus függvényt. Négyszögletes ablakolással válasszuk ki egy periódusát. Ezt a véges tartójú jelet jelöljük $x_T(t)$ -vel.



Az $x_T(t)$ periodikus kiterjesztésével visszkapjuk az eredeti $\tilde{x}_T(t)$ periodikus jelet:

$$\tilde{x}_T(t) = x_T(t) * \tilde{\delta}_T(t).$$

$\tilde{x}_T(t)$ -nek ez az előállítása már Fourier-integrálható, felhasználva, hogy a Dirac delta sorozat Fourier-integrálja szintén Dirac delta sorozat, és hogy az időtartományban elvégzett konvolúció a frekvenciatartományban szorzás:

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}_T(t)\} = X_T(f) \cdot \tilde{\delta}_F(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_T(nF) \cdot \delta(f - nF), \text{ amely egyértelműen megfeleltethető az } X_{nF} \text{ sorozattal: } X_n \xleftrightarrow{\text{izomorfia}} \sum X_T(nF) \delta(f - nF).$$

Megjegyzés:

Az időtartománybeli periodikus kiterjesztés mintavételezésnek felel meg a frekvenciatartományban. A periodikus jelnek vonalas diszkrét spektruma van. Ezzel az $\tilde{x}_T(t)$ jel Fourier-sorát az $x_T(t)$ véges tartójú jel spektrumának mintavételezésével nyerjük.

II. A diszkrét idejű Fourier-transzformáció visszavezetése

A diszkrét idejű Fourier-transzformáció az x_{nT} sorozat és $\tilde{X}_F(f)$ spektrum között teremt kapcsolatot: $x_{nT} \xleftrightarrow{DTFT} \tilde{X}_F(f)$.

Az x_{nT} számsorozat izomorf a következő jellel:

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{nT} \cdot \delta(t - nT).$$

$x^*(t)$ – amely már Fourier-integrálható – egyértelműen meghatározza az x_{nT} számsorozatot.

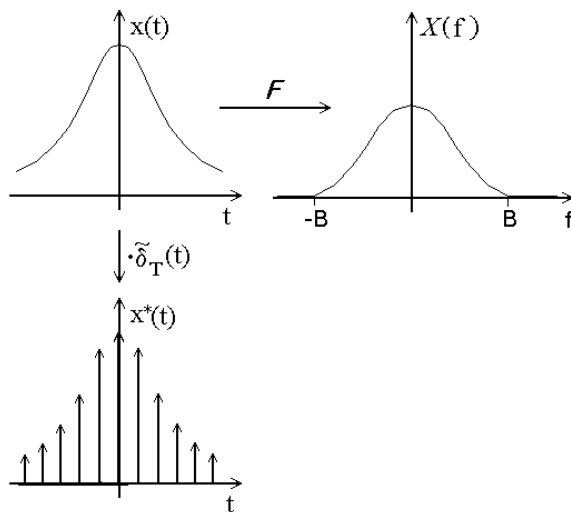
Minthogy $\mathcal{F}\{\delta(t-t_0), f\} = e^{-j2\pi ft_0}$,

$\mathcal{F}\{x^*(t), f\} = \tilde{X}_F(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{nT} \cdot e^{-j2\pi fnT}$, ahol $F=1/T$. Ezzel a DTFT definícióját is elő tudtuk állítani a Fourier-integrállal.

A DTFT-hez szorosan kapcsolódik az alábbi igen fontos tétel.

Shannon mintavételi tétele:

- Legyen az $x(t)$ egy Fourier-integrálható, folytonos idejű jel.
- $\mathcal{F}\{x(t), f\} = X(f)$
- Mintavételezzük $x(t)$ -t T mintavételi időközzel: $x^*(t) = x(t) \cdot \tilde{\delta}_T(t)$.
- A mintavételezett jel Fourier-integrálja: $\mathcal{F}\{x^*(t), f\} = X^*(f) = X(f) * \tilde{\delta}_F(f)$, mivel az időtartománybeli szorzás a frekvenciatengely fölött konvolúciónak felel meg, és a Dirac delta sorozat Fourier integrálja szintén Dirac delta sorozat. (Vagyis $X^*(f)$ nem más, mint az eredeti $x(t)$ jel $X(f)$ spektrumának periodikus kiterjesztése.)



Ha az $x(t)$ jel sávkorlátozott, azaz $X(f) = 0$, ha $|f| \geq B$, és a mintavételi frekvencia $F = 1/T \geq 2B$, akkor az $x^*(t)$ mintavételezett jelből egyértelműen visszaállítható az eredeti $x(t)$ jel.

Ugyanis, ha $X(f) = 0$, ha $|f| \geq B$ és $F = 1/T \geq 2B$, akkor az $X(f)$ F szerinti periodikus kiterjesztése veszteségmentesen megy végbe. Így az $X^*(f)$ -ből egyszerű ablakolással visszaállítható $X(f)$. (Ez a frekvenciatartománybeli ablakolás ideális B törésponti frekvenciájú aluláteresztő szűrést jelent.) $\square$

III. A diszkrét Fourier-sor visszavezetése

A diszkrét idejű Fourier-sor az $\tilde{x}_N$ periodikus sorozat és az $\tilde{X}_N$ diszkrét spektrum között teremt kapcsolatot: $\tilde{x}_N \xrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}_N$.

Vegyünk egy véges tartójú $x_T(t)$ időfüggvényt, amelynek spektrumát jelöljük $X(f)$ -fel és periodikus kiterjesztését $\tilde{x}_T(t)$ -vel: $\mathcal{F}\{x_T(t), f\} = X(f)$, $\tilde{x}_T(t) = x_T(t) * \tilde{\delta}_T(t)$.

Mintavételezzük $\tilde{x}_T(t)$ -t $t_s = T/N$ mintavételi idővel:

$\tilde{x}_T^*(t) = \tilde{x}_T(t) \cdot \tilde{\delta}_{T/N}(t) = (x_T(t) * \tilde{\delta}_T(t)) \cdot \tilde{\delta}_{T/N}(t)$. Az így kapott $\tilde{x}_T^*(t)$ jel kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető az $\tilde{x}_N$ számsorozattal: $\tilde{x}_N \xrightarrow{\text{izomorfia}} \tilde{x}_T^*(t)$.

Most vegyük $\tilde{x}_T^*(t)$ Fourier-integrálját:

$\mathcal{F}\{\tilde{x}_T^*(t), f\} = \mathcal{F}\{(x_T(t) * \tilde{\delta}_T(t)) \cdot \tilde{\delta}_{T/N}(t), f\} = (X(f) \cdot \tilde{\delta}_{1/T}(f)) * \tilde{\delta}_{N/T}(f)$.

$\Rightarrow$ Periodikus sorozatok Fourier-transzformáltja periodikus sorozat.

IV. A diszkrét Fourier-transzformáció visszavezetése

A DFT az $\underline{x}$ idővektor és az $\underline{X}$ frekvenciavektor között teremt kapcsolatot: $\underline{x} \xrightarrow{\text{DFT}} \underline{X}$.

A DFT visszavezethető a DFS-re ugyanis az $\underline{x}$ vektor az $\tilde{x}_N$ periodikus számsorozat egy

periódusát, az $\underline{X}$ vektor pedig az $\tilde{X}_N$ számsorozat egy periódusát tartalmazza. Vagyis a DFT vektorok periodikus kiterjesztésével kapjuk a DFS számsorozatokat. Mivel a DFS-t már visszavezettük a Fourier-integrálra, így a DFT is képezhető vele.

1.2.7 Jelműveletek összefoglalása

Művelet a jelen	Időtartománybeli művelet	Frekvenciatartománybeli művelet
Lineár kombináció	Lineár kombináció	Lineár kombináció
Modulálás, keverés	szorzás szorzás vivővel	konvolúció eltolás a vivőfrekvenciával
Ablakolás (időben)	szorzás ablakolás	konvolúció konvolúciós torzítás, elkenődés, áttevődés
Szűrés	konvolúció konvolúciós torzítás, tranziens torzítás	szorzás ablakolás
Mintavételezés	mintavételezés szorzás (Dirac delta sorozattal)	periodikus kiterjesztés konvolúció (Dirac delta sorozattal) átlapolódás
Spektrum mintavételezés	periodikus kiterjesztés átlapolódás	mintavételezés
Interpolálás	konvolúció (interpoláló jelalakkal)	szorzás, spektrum ablakolás

1.3 Operátor tartományi leírás: komplex függvénytan modellek, Z-transzformáció

A jelek operátortartománybeli leírásához a komplex függvénytan legfontosabb elemeivel kell megismerkednünk. Folytonos jelek operátortartománybeli képéhez a Laplace-transzformációval juthatunk el.

Mivel a digitális jelfeldolgozás során legtöbbször diszkrét idejű jelek kerülnek előtérbe, amelyek operátortartománybeli leírása a Z-transzformációval adható meg, a Laplace transzformációval itt nem foglalkozunk.

1.3.1 A Z-transzformáció

Legyen adott egy x_n számsorozat, amelynek Z-transzformáltja a z komplex változónak egy gyűrű felett analitikus függvénye, melynek formális definíciója egy hatványsor:

$$x_n \xleftrightarrow{\text{z-transzformáció}} X(z)$$

$$\mathcal{Z}\{x_n, z\} = X(z), z \in R, \text{ ahol } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n},$$

$X(z)$ komplex függvény, és R a konvergencia gyűrűt jelöli.

Vizsgáljuk meg, mikor létezik egy sorozat Z-transzformáltja, azaz a formális Z-transzformáció mikor állít elő létező (komplex) függvényt. Ehhez ismételjünk át néhány ide tartozó matematikai fogalmat.

Definíció:

Az a_n végtelen sorozat elemeinek összegzésével kapott *végtelen sor* akkor *konvergens*, ha a részletösszegek sorozatának határértéke véges. Ezt a határértéket a végtelen sor összegének nevezzük.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n = S.$$

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ sor is konvergens, akkor azt mondjuk, hogy az a_n *abszolút konvergens*.

Kérdés, hogy ha átindexeljük az a_n végtelen számsorozatot, azaz az elemeit más sorrendben adjuk össze, akkor ugyanahhoz az S összeghez jutunk-e.

Tétel:

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, akkor az elemek tetszőleges átrendezésével nyert sor is

abszolút konvergencia és a sor összege az összeadás sorrendjétől független.

Tétel: (Riemann-féle átrendezési tétel)

Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergens sor, de nem abszolút konvergens, akkor mindig átrendezhető úgy, hogy összege egy előre meghatározott tetszőleges véges szám legyen, illetve a sor $+\infty$ -hez, vagy $-\infty$ -hez divergáljon.

Tehát csak az abszolút összegezhető sort tekinthetjük olyannak, mely az összeadás sorrendjétől független összeget állít elő, tehát létező függvényt hoz létre.

A definíció alapján csak ritkán dönthető el egy sorról, hogy konvergens-e. Ezért a konvergencia eldöntésére különböző kritériumokat használunk, mint pl. a majoráns, minoráns kritériumot, a gyök- és hányadoskritériumot, vagy az integrálkritériumot. Ezek közül most csak a gyökkritériumot ismételjük át.

Tétel:

Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = C$, ahol $C < 1$,

határérték létezik, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens. Ha $C > 1$ vagy a határérték nem létezik, akkor

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ sor divergens. (Ha $C=1$, akkor nem dönthető el, hogy konvergens-e a sor.)

Most a gyökkritérium felhasználásával ellenőrizzük, hogy $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$ sor konvergens-e. Ehhez bontsuk fel $X(z)$ -t két sorra:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty} x_{-m} z^m + \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

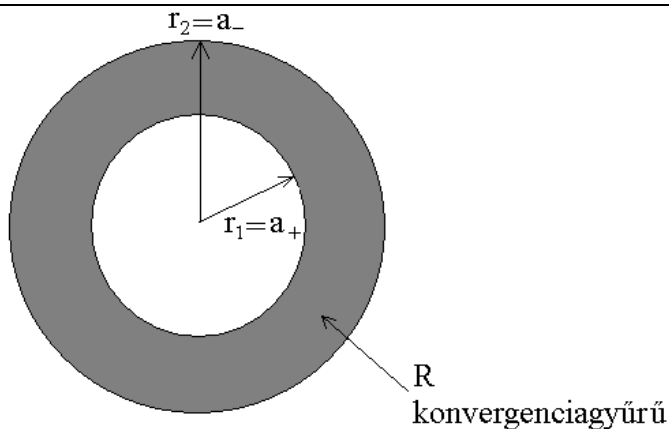
Ha mindkét sor abszolút összegezhető, akkor létezik a Z-transzformált és az egyértelmű.

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n z^{-n}|} = |z|^{-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n} \text{ akkor konvergens, ha } |z| > \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = a_+.$$

(Az a_+ az x_n aszimptotikus jövőbeni viselkedésétől függő szám.)

$$\bullet \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|x_{-m} z^m|} = |z| \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|x_{-m}|} < 1 \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} x_{-m} z^m \text{ akkor konvergens, ha } |z| < \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|x_{-m}|}} = a_-.$$

Ebből adódóan $X(z)$ akkor létezik, ha z az $r_1 = a_+$ és az $r_2 = a_-$ sugarú körökkel határolt konvergenciagyűrűben van.



Megjegyzés:

- Ha az x_n sorozatnak csak múltja van, azaz $\forall n > 0$ -ra $x_n = 0$, akkor az a_+ sugár zérus, azaz a konvergencia tartomány egy korong.
- Ha az x_n sorozat belépő sorozat (csak jövője van, $\forall n < 0$ -ra $x_n = 0$), akkor $1/a_- = 0$, azaz a konvergencia tartomány egy korong kivételével a teljes komplex sík.

Konvergens hatványsorok analitikus függvényt állítanak elő (folytonos, akárhányszor differenciálható, valós és képzetes rész függvényeik kielégítik a Cauchy-féle diff. egyenleteket, stb.). Tehát a diszkrét idejű jel (számsorozat) Z-transzformáltja - ha létezik, akkor - körgyűrű felett analitikus függvény. Másrészt minden analitikus függvény egyértelműen konvergens hatványsorba fejthető. Az

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$ hatványsorral való előállítás a Laurent-sor.

- Az inverz Z-transzformáció voltaképpen $X(z)$ Laurent sora x_n együttthatóinak a meghatározását jelenti. Ez a komplex függvénytan szerint:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{X(z), z \in R\} = x_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c \in R} X(z) \cdot z^{n-1} dz.$$

1.3.2 A Z-transzformáció tulajdonságai

Legyen x_n egy számsorozat, amelynek Z-transzformáltja $X(z)$: $x_n \xrightarrow{Z} X(z)$.

1. Lineáris kombináció:

$$\sum_i \lambda_i \cdot x_n^{(i)} \xrightarrow{Z} \sum_i \lambda_i \cdot X^{(i)}(z).$$

2. Eltolási tulajdonság:

$$x_{n-n_0} \xrightarrow{Z} z^{-n_0} \cdot X(z), \text{ mert } \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n-n_0} z^{-n} \Big|_{\substack{m=n-n_0 \\ n=m+n_0}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m z^{-m} \cdot z^{-n_0}.$$

3. Exponenciális sorozattal való szorzás:

$$a^n \cdot x_n \xrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{a}\right), \text{ mert } \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left(\frac{z}{a}\right)^{-n}.$$

4. Lineáris sorozattal való szorzás:

$$n \cdot x_n \xrightarrow{Z} -z \cdot \frac{dX(z)}{dz}.$$

5. Konjugálás:

$$x_n^* \xrightarrow{Z} X^*(z^*).$$

6. Fordított sorozat Z-transzformáltja:

$$x_{-n} \xrightarrow{Z} X(1/z)$$

(Ez annyit jelent, hogy ami eddig az $X(z)$ egységgörön kívül eső pontja az egységgörön belülre transzformálódnak és viszont.)

7. Két sorozat konvolúciójának Z-transzformáltja:

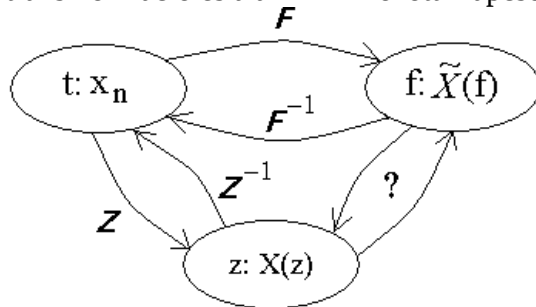
$$x_n * y_n \xrightarrow{Z} X(z) \cdot Y(z) \text{ (a két sorozat Z-transzformáltjának szorzata).}$$

8. Két sorozat szorzatának Z-transzformáltja:

$$x_n \cdot y_n \xrightarrow{Z} \frac{1}{2\pi j} \oint_{c \in R_x \cap R_y} X(\nu) \cdot Y(z/\nu) \cdot \nu^{-1} d\nu, \text{ ahol}$$

R_x az $X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$ és R_y az $Y(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}$ konvergencia tartománya.
(Az összefüggés a komplex függvényekre értelmezett konvolúció.)

9. A Z-transzformáció és a DTFT közötti kapcsolat:



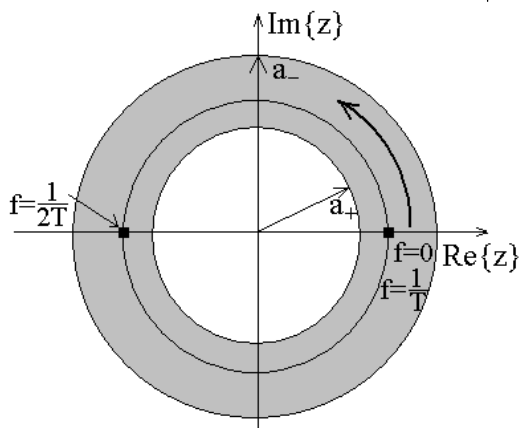
• Kontúrfüggvény:

Mivel $x_n \xrightarrow{F} \tilde{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot e^{-j2\pi n f T}$ és $x_n \xrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$, ezért ha a

$z = e^{j2\pi f T}$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor $X(z)$ -ből előállítható $\tilde{X}(f)$:

$\tilde{X}(f) = X(z)|_{z=e^{j2\pi f T}}$. Az így kapott $\tilde{X}(f)$ függvényt az $X(z)$ egységsugarú körre vonatkozó

kontúrfüggvényének nevezzük. ($|z| = |e^{j2\pi f T}| = 1$).



Ebből adódóan egy számsorozatnak csak akkor van spektruma (Fourier transzformáltja), ha Z-transzformáltjának konvergencia tartománya tartalmazza az egységgörte. (Tehát van olyan számsorozat, amelynek létezik a Z-transzformáltja, de Fourier-transzformáltja nincs.)

• Analitikus kiterjesztés:

Az $\tilde{X}(f) \rightarrow X(z)$ átmenet meghatározása ritkán van szükség a mérnöki gyakorlatban, ezért ezzel részletesen nem foglalkozunk. Megjegyezzük, hogy ha a komplex sík egységkörére vonatkozó kontúrfüggvény, $\tilde{X}(f)$ adott, akkor ebből a z síkra kiterjedő analitikus függvény, $X(z)$, az ún. analitikus kiterjesztés határozható meg.

Megjegyzés:

Határozzuk meg az $u_n = x_n \cdot y_n$ szorzat Fourier-transzformáltját a Z-transzformáltak segítségével!

$$U(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c \in R_x \cap R_y} X(\nu) \cdot Y(z/\nu) \cdot \nu^{-1} d\nu \text{ és } \tilde{U}(f) = \mathcal{F}\{x_n \cdot y_n\} = U(z) \Big|_{z=e^{j2\pi fT}}.$$

Ekkor $U(z)$ kifejezésében a következő helyettesítéseket kell használnunk:

$z = e^{j2\pi fT}$, $\nu = e^{j2\pi \varphi T}$ és ekkor a kontúrintegrálást elég a $c = e^{j2\pi \varphi T}$ egységkörre elvégezni:

$$\tilde{U}(f) = \mathcal{F}\{x_n \cdot y_n\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c=e^{j2\pi \varphi T}} X(\nu) \cdot Y\left(\frac{z}{\nu}\right) \cdot \nu^{-1} d\nu \Bigg|_{\substack{z=e^{j2\pi fT} \\ \nu=e^{j2\pi \varphi T}}}, \text{ ahol } d\nu = j2\pi T \cdot e^{j2\pi \varphi T} \cdot d\varphi,$$

$$\tilde{U}(f) = \mathcal{F}\{x_n \cdot y_n\} = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{1/T} X(e^{j2\pi \varphi T}) \cdot Y(e^{j2\pi(f-\varphi)T}) \cdot e^{-j2\pi \varphi T} \cdot 2\pi j T \cdot e^{j2\pi \varphi T} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{f_c} \cdot \int_0^{f_c} \tilde{X}(\varphi) \cdot \tilde{Y}(f - \varphi) d\varphi, \text{ ahol } f_c = 1/T.$$

Ezzel a komplex függvények konvolúciójának kontúrfüggvényét visszavezettük a valós függvénytanból megismert folytonos periodikus konvolúcióra.

1.3.3 Az inverz Z-transzformáció

Az inverz Z-transzformáció definíció szerint: $x_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c \in R} X(z) \cdot z^{n-1} dz$.

Ennek az integrálnak a kiértékelésére több módszer is nyílik. Ehhez ismételjünk át néhány alapvető komplex függvénytan fogalmat.

Definíció:

A $H(z)$ komplex függvénynek a $z_0 \in \mathbb{R}$ *izolált szinguláris pontja*, ha $H(z)$ a z_0 pont (egy "átszúrt") környezetében reguláris (vagyis Laurent sorba fejthető).

Ha létezik a $\lim_{z \rightarrow z_0} H(z) = A < \infty$ véges határérték, akkor z_0 -t a $H(z)$ *megszüntethető* izolált szingularitási pontjának nevezzük.

Definíció:

A $H(z)$ függvény a $z = z_0$ izolált szingularitási pontja körüli Laurent sorának -1 -edik együtthatóját a $H(z)$ függvény z_0 ponthoz tartozó *residuum*ának nevezzük:

$$\text{res}_{z=z_0}\{H(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c \in R} H(z) dz, \text{ ahol } c \text{ olyan pozitív körüljárású rektifikálható Jordan görbe, amely}$$

benne van a $z=z_0$ pont átszúrt környezetében.

Tétel: (Residuum-tétel)

Ha a $H(z)$ függvény reguláris a pozitív irányítású c rektifikálható zárt Jordan-görbén és belsejében – a belsejében lévő véges számú $z_1, z_2, \dots, z_n$ szinguláris pont kivételével, akkor

$$\oint_{c \in \mathbb{R}} H(z) dz = 2\pi j \cdot \sum_{i=1}^n \text{res}\{H(z)\}.$$

Tétel (a residuum számítására):

Ha a $z = z_0 \neq \infty$ pont a $H(z)$ függvény m -edrendű pólusa, akkor

$$\text{res}_{z=z_0}\{H(z)\} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m \cdot H(z) \right].$$

$$(\text{Pl. Ha } H(z) = \frac{1}{z-2} \text{ (} z_0=2, m=1 \text{)} \Rightarrow \text{res}_{z=z_0}\{H(z)\} = 1.)$$

Az inverz Z-transzformáció számítása a residuum-tétellel:

A residuum tétel alkalmazásával az inverz Z-transzformáció formulájában szerelő integrál már könnyen számítható. Ezzel

$$x_n = \sum_{i=1}^n \text{res}\{X(z) \cdot z^{n-1}\}.$$

1.3.4 Racionális tört inverz Z-transzformációja

A gyakorlatban nagyfontosságúak azok a jelek, melyek Z-transzformáltja két polinom hányadosa:

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_M z^M + a_{M-1} z^{M-1} + \dots + a_1 z + a_0}{z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \dots + b_1 z + b_0} \quad (M \leq N).$$

Az ilyen jeleket ARMA (auto-regressive moving-average) jeleknek is szokták nevezni.

Megjegyzés:

Mind az $A(z)$ mind a $B(z)$ polinom felírható gyöktényezős alakban is:

$$A(z) = \sum_{i=0}^M a_i \cdot z^i = a_M \cdot \prod_{i=1}^M (z - z_i),$$

$$B(z) = \prod_{j=1}^N (z - z_j). \text{ A } z = z_j \text{ pontok az } X(z) \text{ függvény szingularitási pontjai.}$$

Az inverz Z-transzformáció számítása a residuum-tétellel:

Az inverz Z-transzformáltat ebben az esetben (az n -től is függő) racionális tört pólusaihoz tartozó residuumok összegeként számíthatjuk:

$$x_n = \sum_{i=1}^n \operatorname{res}_{z=z_i} \left\{ \frac{A(z)}{B(z)} \cdot z^{n-1} \right\}$$

ahol a z_i pólusok az n értékétől függően vagy a $B(z)$, $n \geq 1$ vagy a $z^{-(n-1)} B(z)$, $n < 1$ polinomok gyökei. (Negatív n -ek estén az origóban többszörös multiplicitású pólus keletkezik!)

Megjegyezzük, hogy egyszeres pólus esetén a residuum igen egyszerűen számolható:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \left\{ \frac{A(z)}{B(z)} \right\} = \frac{A(z)}{B'(z)} \Big|_{z=z_0}, \text{ ahol } B'(z) = \frac{dB(z)}{dz}.$$

Feladat:

Vezessük le a fenti összefüggést a residuum számításra adott általános képletből ($m = 1$ esetén).

Példa:

$$\text{Legyen } X(z) = \frac{z+1}{(z-2) \cdot (z-0,5)} = \frac{z+1}{z^2 - 2,5z + 1}.$$

Határozzuk meg az $x_n = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ sorozatot!

$$x_n = \sum_i \operatorname{res}_i \left\{ \frac{(z+1) \cdot z^{n-1}}{z^2 - 2,5z + 1} \right\} = \sum_i \operatorname{res}_i \left\{ \frac{(z+1) \cdot z^n}{z^3 - 2,5z^2 + z} \right\}.$$

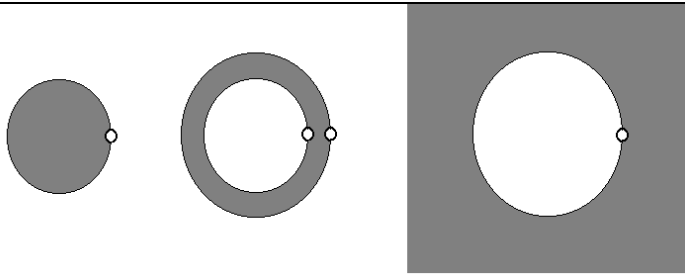
De melyik az a körgyűrű alakú konvergencia tartomány, mely felett összegezni kell az abban lévő pólusokhoz tartozó residuumokat?

Először nézzük mely körgyűrűk felett analitikus $X(z)$:

$z_1 = 0,5$ és $z_2 = 2$ pontban pólusa van $X(z)$ -nek, vagyis ezekben a pontokban nem analitikus.

Ebből adódóan 3 olyan konvergencia tartomány adható meg, ahol $X(z)$ Laurent-sorba fejthető:

$$I. |z| < 0,5 \quad II. 0,5 < |z| < 2 \quad III. |z| > 2$$



Tehát három különböző konvergencia tartomány lehetséges, így az inverz Z-transzformáltra is három különböző megoldás van.

Első konvergencia gyűrű: $I. |z| < 0,5$

Ebben az esetben csak a változó multiplicitású, origóbeli pólus van (az is csak $n < 1$ esetében) a konvergencia gyűrűn belül, tehát a fenti összeg csak egy tagú:

$$x_n^{(1)} = \begin{cases} 0 & , n > 1 \\ \text{res}_{z=0} \left\{ \frac{z+1}{(z^3 - 2,5z^2 + z) \cdot z^{-n}} \right\} & , n \leq 0 \end{cases}$$

Második konvergencia gyűrű: $II. 0,5 < |z| < 2$

Ekkor a konvergencia tartományban haladó zárt kontúron belül már két pólus van a 0 és a 0.5 , tehát második tagként a $z=0.5$ -höz tartozó residuumokat is figyelembe kell venni $x_n^{(2)}$ számításakor:

$$x_n^{(2)} = x_n^{(1)} + \text{res} \left\{ \frac{(z+1) \cdot z^n}{z^3 - 2,5z^2 + z} \right\} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = x_n^{(1)} + \frac{(z+1) \cdot z^n}{3z^2 - 5z + 1} \Big|_{z=\frac{1}{2}}$$

$$x_n^{(2)} = x_n^{(1)} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Harmadik konvergencia gyűrű: $III. |z| > 2$

Most már negatív n értékeknél három pólus (0, 0.5, 2), pozitív n értékeknél pedig két pólus veendő figyelembe.

A megoldást most csak a gyakorlatban leggyakrabban előforduló III. esetben adjuk meg (amikor $x_n = 0 \ \forall n \leq 0$ -nál):

$$\begin{aligned}
x_n^{(3)} &= \sum_i \operatorname{res}_i \left\{ \frac{(z+1) \cdot z^n}{z^3 - 2,5z^2 + z} \right\} = \sum_i \left(\frac{(z+1) \cdot z^n}{\frac{d}{dz}(z^3 - 2,5z^2 + z)} \right) \bigg|_{z=z_i} = \\
&= \operatorname{res} \left\{ \frac{z+1}{(z^3 - 2,5z^2 + z) \cdot z^{-n}} \right\} \bigg|_{z=0} + \frac{(z+1) \cdot z^n}{3z^2 - 5z + 1} \bigg|_{z=\frac{1}{2}} + \frac{(z+1) \cdot z^n}{3z^2 - 5z + 1} \bigg|_{z=2}
\end{aligned}$$

Negatív indexeknél a három residuum összege nulla, így

$$x_n^{(3)} = \begin{cases} 0 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \cdot 2^n, & \text{ha } n > 0 \\ 0, & \text{ha } n \leq 0 \end{cases}$$

Inverz Z-transzformáció polinom osztással:

1. Írjuk fel a $X(z)$ ARMA jel számlálóját és nevezőjét z csökkenő hatványai szerinti sorrendben, majd vegyük az első tagok hányadosát. Ezzel megkapjuk a $X(z)$ sorfejtésének első tagját.

$$\text{Pl.: } (\underline{z}+1):(\underline{z}^2-2,5z+1) \rightarrow z^{-1}$$

2. A kapott eredményt (most: z^{-1}) szorozzuk vissza az osztóval ($(\underline{z}^2-2,5z+1) \cdot z^{-1} = z-2,5+ z^{-1}$) majd az így kapott eredményt vonjuk ki az osztandóból. $(z+1-z+2,5-z^{-1} = 3,5-z^{-1})$

3. Az előző ponttal kapott módosított osztandóval végezzük el újra az első pontot. Így megkapjuk a $H(z)$ sorfejtésének következő tagját.

$$(\text{Most: } (\underline{3,5}-z^{-1}):(\underline{z}^2-2,5z+1) \rightarrow 3,5z^{-2})$$

Összegezve (a példán keresztül):

$$X(z) = (\underline{z}+1):(\underline{z}^2-2,5z+1) = z^{-1} + 3,5z^{-2} + 7,75z^{-3} + \dots$$

$$-(z-2,5+ z^{-1})$$

$$\underline{3,5-z^{-1}} \text{ -----} \nearrow$$

$$-(3,5-(2,5 \cdot 3,5)z^{-1}+3,5 z^{-2})$$

$$\underline{7,75 z^{-1}-3,5z^{-2}} \text{ -----} \nearrow$$

...

Ezzel az algoritmussal előállítottuk a $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot z^{-n}$ alakot, amelyből az x_n tagok kiolvashatók.

(Mivel ennek az algoritmusnak sosincs vége *long division*-nek is szokták nevezni.)

Megjegyzés:

A fenti példánál csökkenő kitevők szerinti rendezésben végeztük el az osztást. Ezzel a $|z| > 2$, azaz a legkülső körhöz tartozó sorfejtést állítottuk elő. Ha a sorrendet felcseréljük, vagyis z növekvő hatványai szerint írjuk föl a polinomokat, akkor az origó körüli legbelső körhöz tartozó sorfejtést állítjuk elő:

$$X(z) = (1+z) \cdot (1-2,5z+z^2) = 1 + 3,5z + 7,75z^2 + \dots$$

$$-(1-2,5z+z^2)$$

$$3,5z - z^2 \text{ -----} \nearrow$$

$$-(3,5z - 8,75z^2 + 3,5z^3)$$

$$7,75z^2 - 3,5z^3 \text{ -----} \nearrow$$

...

Inverz Z-transzformáció részlettörtekre bontással:

Tételezzük föl, hogy az $X(z)$ ARMA jel valódi tört:

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i \cdot z^i}{\sum_{j=0}^N b_j \cdot z^j}, \text{ ahol } M < N.$$

Az algebra alaptétele szerint a nevezőnek M , a számlálónak N számú gyöke van, ezért $X(z)$ felírható az alábbi – ún. gyöktényezős – alakban:

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_M \cdot \prod_{i=1}^M (z - z_i)}{b_N \cdot \prod_{j=1}^N (z - p_j)}, \text{ ahol a } z_i\text{-k } X(z) \text{ zérusai és } p_j\text{-k } X(z) \text{ pólusai.}$$

Egyszeres pólusok esetén $X(z)$ parciális törtek összegeként is felírható:

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \sum_{i=1}^N \frac{r_i}{z - p_i}, \text{ ahol } r_i = \operatorname{res}_{z=p_i} \{X(z)\} = \frac{A(p_i)}{B'(p_i)}.$$

Mivel a Z-transzformáció lineáris művelet, a fenti összeg tagjainak külön-külön vehetjük az inverz Z-transzformáltját, és az így kapott részsorozatokat a végén összegezzük.

Ezeket a részsorozatokat a geometriai sorok összegére vonatkozó tétel segítségével határozzuk meg.

Tétel:

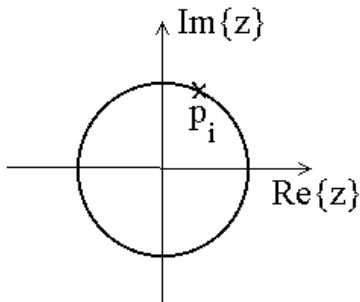
$$A \sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ sor akkor és csak akkor konvergens, ha } |q| < 1. \text{ Ekkor } \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

$$\text{Mert: } q^0 + q^1 + \dots + q^n + \dots = S \quad / \cdot q$$

$$q^1 + q^2 + \dots + q^n + \dots = qS = q^0 + S = 1 + S \Rightarrow 1 = (1-q) \cdot S.$$

(Ha az összegzés $n = 1$ -től történik: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$.)

x_n i-edik összetevőjéhez nézzük meg, hogy $\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{r_i}{z - p_i}, z \in \mathbb{R} \right\} = ?$



A megoldás két tartományban adható meg:

1. Ha $|z| > |p_i|$, akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{r_i}{z - p_i}, |z| > |p_i| \right\} &= \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{r_i}{p_i} \cdot \frac{p_i}{z - p_i}, \left| \frac{p_i}{z} \right| < 1 \right\} = \frac{r_i}{p_i} \cdot \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p_i}{z} \right)^n \right\} = \begin{cases} \left(\frac{r_i}{p_i} \right) \cdot p_i^n, & \text{ha } n > 0 \\ 0, & \text{ha } n \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Ha $|z| < |p_i|$, akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{r_i}{z - p_i}, |z| < |p_i| \right\} &= \\ &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \left(-\frac{r_i}{p_i} \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{p_i}}, \left| \frac{z}{p_i} \right| < 1 \right\} = \left(-\frac{r_i}{p_i} \right) \cdot \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{p_i} \right)^n \right\} = \begin{cases} \left(-\frac{r_i}{p_i} \right) \cdot p_i^{-n}, & \text{ha } n \leq 0 \\ 0, & \text{ha } n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ha az origó körüli legbelső körhöz tartozó sorfejtést akarjuk meghatározni, akkor mindig a 2. eredményt kell minden i -re kiszámolni, ha pedig a legkülső körhöz tartozót, akkor az elsőt. Az 1. és 2. típusú sorfejtések különböző kombinációival való összegzésével tetszőleges gyűrűtartományban meghatározható az inverz Z-transzformált. Így az

$$x_n = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{r_i}{z - p_i} \right\} \text{ sorozat rész exponenciális sorozatok összegéből áll.}$$

Megjegyzés:

Ha $X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\}$ -nek p komplex pólusa, noha x_n valós, akkor $X(z)$ -nek p^* is pólusa. (Mint látni fogjuk, máskülönben nem lehetne x_n valós.) Ezért az előbbi parciális törtre bontáskor a konjugált-komplex pólusokhoz tartozó tört pároknak együtt vesszük az inverz Z-transzformáltját.

Tétel:

Ha $\text{res}_{z=p}\{X(z)\} = r$, akkor $\text{res}_{z=p^*}\{X(z)\} = r^*$.

A fenti tétel szerint ha $X(z)$ -nek K számú konjugált-komplex pólus párja van, akkor a parciális törtre bontást az alábbi alakban adjuk meg:

$$X(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \sum_{i=1}^{N-2K} \frac{r_i}{z - p_i} + \sum_{j=1}^K \left(\frac{r_j}{z - p_j} + \frac{r_j^*}{z - p_j^*} \right).$$

A második összeg tagjait másodfokú parciális törtnek nevezzük. Természetesen a másodfokú parciális tört sorfejtése is két tartományban adható meg. Például a $|z| > |p_j|$ tartományban:

$$x_{n,j}^{(1)} = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \left(\frac{r_j}{z - p_j} + \frac{r_j^*}{z - p_j^*} \right), |z| > |p_j| \right\} = \begin{cases} \frac{r_j}{p_j} \cdot p_j^n + \frac{r_j^*}{p_j^*} \cdot (p_j^*)^n, & \text{ha } n > 0 \\ 0, & \text{ha } n \leq 0 \end{cases}$$

Ezt közös nevezőre hozva és a $p = a \cdot e^{j\varphi}$ ($p^* = a \cdot e^{-j\varphi}$) és $r = b \cdot e^{j\gamma}$ ($r^* = b \cdot e^{-j\gamma}$) jelölésekkel továbbírva (a j indexeket az egyszerűség kedvéért most ne írjuk ki),

$$\begin{aligned} x_{n,j}^{(1)} &= \frac{r \cdot p^* \cdot p^n + r^* \cdot p \cdot (p^*)^n}{|p|^2} = \frac{ab \cdot e^{j(\gamma-\varphi)} \cdot a^n \cdot e^{j\varphi n} + ab \cdot e^{-j(\gamma-\varphi)} \cdot a^n \cdot e^{-j\varphi n}}{a^2} = \\ &= \frac{b}{a} \cdot a^n \cdot (e^{j(n\varphi-\varphi+\gamma)} + e^{-j(n\varphi-\varphi+\gamma)}) = 2ba^{n-1} \cos((n-1)\varphi + \gamma) \text{ ha } n > 0, \text{ egyébként } 0. \end{aligned}$$

Feladat:

Határozzuk meg a másodfokú parciális tört sorfejtését a $|z| < |p_j|$ gyűrűtartományban.

$$x_{n,j}^{(2)} = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \left(\frac{r_j}{z - p_j} + \frac{r_j^*}{z - p_j^*} \right), |z| < |p_j| \right\} = ?$$