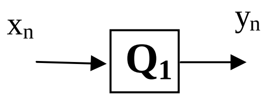
6. Jeldigitalizálás és jelrekonstrukció: kvantálás, kódolás

6.1 Memória mentes kvantálás

6.1.1 A kvantálás definíciója, fogalmai

A kvantálást legegyszerűbben az alábbiak szerint definiálhatjuk:

<u>Definíció1:</u>



Az L szintű $Q = Q_1$ *kvantáló* olyan diszkrét idejű input-output rendszer, melyre az alábbi tulajdonságok igazak:

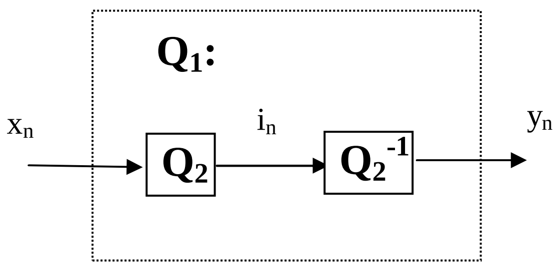
- valós (be- és kimenetű),
- memóriamentes: $y_n = Q\ (n, x_n\ )$,
- invariáns: $y_n = Q\ (x_n\ )$ minden mintára, azaz n-től függetlenül,
- véges kimeneti értékkészletű (L elemű halmaz): $y_n \in\ [Y_1, Y_2, ...\ Y_L\ ]$
- monoton $y = Q\ (x\ )$ karakterisztikájú.

A fenti definíciónak megfelelően, a kvantáló úgy működik, hogy

- a bemeneti értelmezési tartomány az $[-\infty, X_1, X_2, ...\ X_{L-1}, +\infty]$ intervallum határok monoton növekvő rendszerével L darab intervallumra van felosztva,
- ha az x bemeneti érték az $[x_{i-1}, x_i)$ intervallumba esik, akkor a kimeneti érték az i-edik $Y_i, \in\ [Y_1, Y_2, ...\ Y_L\ ]$ döntött (rekonstruált, kerekített, kvantált) érték.

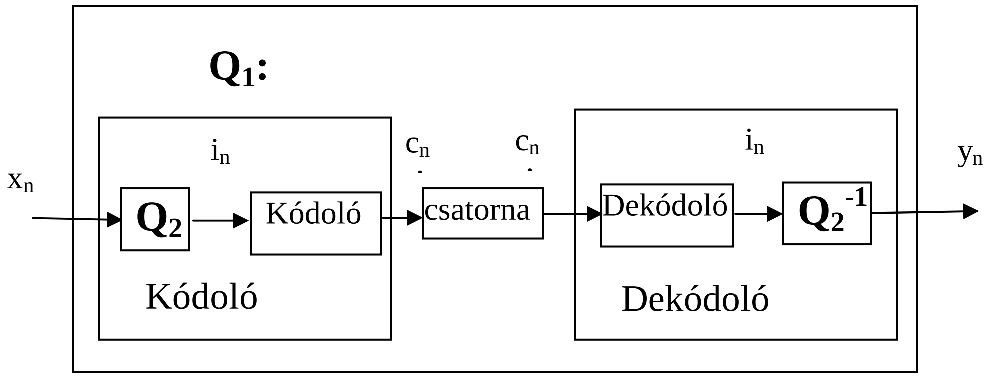
A fentiek szerint definiált Q_1 kvantálót felfoghatjuk az alábbiakban definiálandó Q_2 kvantáló és Q_2^{-1} inverz kvantáló párból álló összetett rendszerként is:

<u>Definíció2:</u> Kvantáló és inverz kvantáló



A Q_2 kvantáló, ez esetben, egy döntést végző eszköz (eldönti, hogy az aktuális bemeneti minta melyik, hányadik intervallumba esett), azaz a **bemeneti valós** x_n sorozat alapján egy **egész** értékű i_n intervallum-indexsorozatot állít elő a kimenetén, ahol i_n: $Q(x_n) = y^{(i_n)}$. Az y_n **kimeneti valós** kvantált sorozatot, a rekonstruált jelet, a Q_2^{-1} inverz kvantáló állítja elő az egész értékű i_n indexsorozatból .

Analóg, valós x_n mintasorozatnak - térbeli (távközlés) vagy időbeli (pl. CD-re írás) - digitális átviteli csatornán való továbbításához a cím sorozatnak további digitális szimbólum sorozattá történő kódolására is szükség lehet. (Láthatjuk, hogy ebben az esetben a kódoló és dekódoló fogalmai is több értelműek, van, az ábrán látható szűkebb és tágabb értelmezése is.)



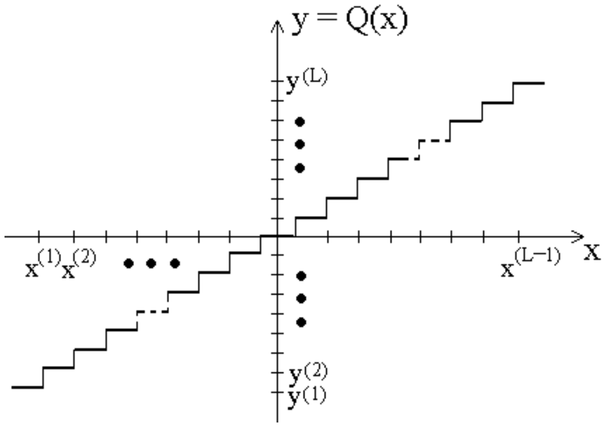
A továbbiakban kvantáló alatt – alap értelmezésként – az 1. definíció szerinti (valós bemenetű, valós kimenetű) kvantálót értjük, de gyakran előfordul, hogy 2. definícióban szereplő kvantáló-inverzkvantáló dekomponálással kell élnünk azaz, a kódolóbeli döntési funkciót (valós bemenethez intervallum cím meghatározása) szétválasztjuk a dekódolóbeli rekonstrukciós funkciótól (címből valós kimeneti minta előállítása). Ha, az ábrán vagy a szövegben inverz kvantálóról is szó van, akkor kvantálóról a 2. definíció szerint van szó, egyébként pedig az első definíció az érvényes.

6.1.2 Kvantálók kvantálási- és a hiba-karakterisztikái

Az előző pontban definiált kvantálók az $\{L, X_1, X_2, \ldots X_{L-1}, Y_1, Y_2, \ldots Y_L\}$ struktúrával (a szintek száma, az L-1 darab valós, a végesben lévő intervallum határ és az L darab valós kimeneti érték) egyértelműen meghatározott.

A kvantálók leírhatók az **y = Q(x)** függvénnyel az ún. **kvantáló karakterisztikával,** amely mindig az intervallumok felett konstans értékű **lépcsős függvény :**

$$y = Q(x) = \begin{cases} Y_1, \text{ha } x \in (-\infty, X_1) \\ Y_i, \text{ha } x \in [X_{i-1}, X_L), i = 2,\ldots, L-1: \\ Y_L, \text{ha } x \in [X_{L-1}, -\infty) \end{cases}$$



A kvantáló karakterisztikák általában mindig olyanok, hogy a lehetséges Y_i kimeneti értékek az i-edik, $q_i = X_i - X_{i-1}$ szélességű $[X_{i-1}, X_i]$ intervallumokon belülre esik. A két szélső, nem korlátos intervallumot leszámítva, a kimeneti Y_i értékek gyakran a megfelelő intervallumhatárok számtani közepe (kerekítéses kvantálás). Ebből következik, hogy a lehetséges kimeneti értékek lépésköze is a q_i intervallumszélességek nagyságrendjébe esik (vagy gyakran azokkal egyenlő). A q_i értékeket a **kvantáló felbontásának** is nevezhetjük. **Finom kvantálás**ról sok, kis értékű q_i esetén van szó, ezzel szemben **durva kvantálás**ról kevés és nagy értékű q_i –k esetén van szó.

Kvantálási hiba, kvantálási torzítás:

Kvantálók bemeneti x_n és kimenet y_n számsorozatai mellett bevezethetjük az

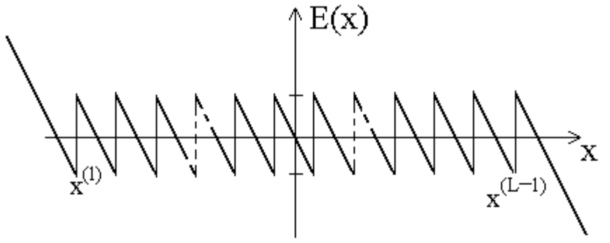
$e_n = y_n - x_n$

hibajel sorozatot is. Ezt a jelet gyakran torzításnak is nevezik.

A kvantálók az u.n. **hibakarakterisztikával** is teljesen leírhatóak, amely az alábbi

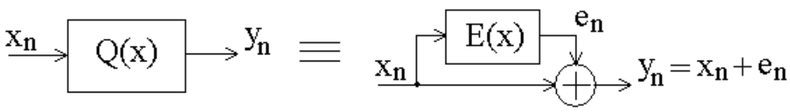
$E(x) = Q(x) - x$

szerint származik a Q(x) kvantálási karakterisztikából. Amíg a Q(x) mindig szakaszonként konstans, azaz lépcsős függvény, addig az E(x) karakterisztika mindig egy fűrész jellegű függvény, azaz szakaszonként (kvantálási intervallumokként) -1 meredekségű egyenesek:



A kvantálók működése úgy is felfogható, hogy a kvantálók a bemenethez a hibajelet hozzáadva adják a kimenetüket:

$y_n = x_n + e_n$



A kantálóknak azE(x) hibakarakterisztikával leírt modelljét additív hiba (torzítás) modellnek nevezzük.

6.1.3 Kvantálók üzemmódjai, működési tartományai

A Q(x) kvantálási illetve az E(x) hiba-karakterisztikák alapján a kvantálók működésének – a kvantálandó x értéktől (vagy értékektől) függően - három üzemmódját különböztetjük meg:

Kisjelű (speciálisan nulla bemenetű) üzemmód, tartomány:

> Az x kvantálandó értékek, vagy annak megváltozásai a kvantáló q_i felbontásának nagyságrendjébe esnek, vagy azoknál kisebbek. (Speciális eset: nulla bemenetű kvantáló)

Normál, kerekítéses, granuláris üzemmód, tartomány:

> Az e hiba értékek korlátosak, a kvantáló q_i felbontásának nagyságrendjébe esnek, vagy azoknál kisebbek. (Speciális eset: kerekítés esetén $|e| < q/2$)
>
> Az x értékek azon tartományát, melyeknél a kvantáló normál üzemmódban működik, **a kvantáló dinamika** tartományának nevezzük.

Nagyjelű, túlvezérléses, túlterhelt, telítéses üzemmód, tartomány:

> Az x kvantálandó értékek, a szélső, nem korlátos intervallumokba esnek, az e hibajel nagyobb, mint a kerekítéses üzemmód felső határa.

6.1.4. Kvantálók nevezetes típusai, osztályai

1. *Szimmetrikus* kvantáló: $Q(-x) = -Q(x)$

2. *Egyenletes* kvantáló: $y_{i+1} - y_i = dy = q = dx = x_{i+1} - x_i$ i=1...(L-1)

3. *Egyenletes és szimmetrikus* kvantáló:

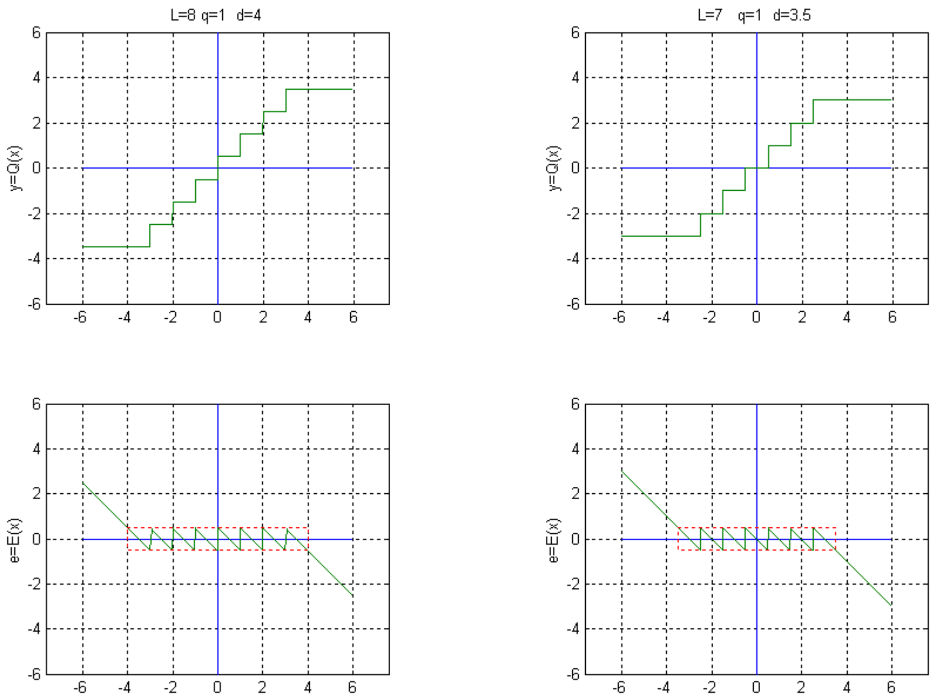
4. *Nem* e*gyenletes* kvantáló

5. *Logaritmikus* kvantáló

6. *Max Lloyd* kvantáló:

6.1.5. Egyenletes és szimmetrikus kvantáló

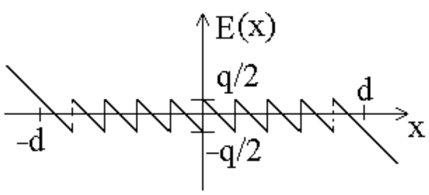
Egyenletes és szimmetrikus kvantálót egyértelműen meghatározza a szintek L száma és a kvantáló q felbontása (lépes nagysága, intervallum szélessége).



Az ábrán L=8 és L=7 szintű, q=1 felbontású egyenletes és szimmetrikus kvantálók kvantálási- és hiba-karakterisztikáit látjuk.

A kvantáló **dinamika tartománya** a [+d –d] intervallum:

ezen belül igaz az e hibára, hogy korlátos, nevezetesen e≤q/2.



Az L, q és d paraméterek közötti összefüggések:

$q = 2d/L$ illetve $d = Lq/2$.

Normál üzemmódban a hiba maximum: $e_{max} = q/2 = d/L$.

Az intervallum határok: $X_i = -d + iq = (-L/2+i)q$, i= 1,2, ... (L-1).

A kimeneti lehetséges értékek: $Y_i = -d + q/2 + (i-1)q = (-L/2+i-1/2)q$, i= 1,2, ... L.

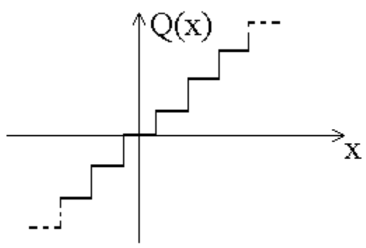
A kvantálók intervallum indexeit gyakran **r bites** szimbólumokkal kódolják. Ekkor a szintek maximális száma: $L= 2^r$. Ebben az esetben az r, q és d, e_{max} paraméterek közötti összefüggések:

$q = d/2^{(r-1)}$ illetve $d = 2^{(r-1)} q$.

Normál üzemmódban a hiba maximum: $e_{max} = q/2 = d/2^r$.

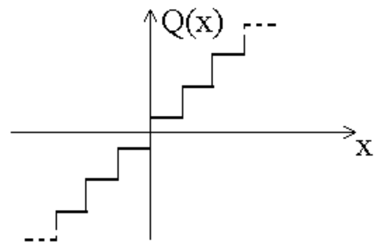
A szimmetrikus, egyenletes kvantálók **kisjelű működés**ében lényeges különbség van attól függően, hogy L páros vagy páratlan.

a, Páratlan L esetén:



Ekkor az x = 0 pont egy intervallum közepe, a 0 érték lehetséges döntési szint, de nem komparálási szint (nem intervallum határ). Nulla bemenetre a kvantáló (hibamentes) nulla értéket ad a kimenetén.

b, Páros L esetén:



Ekkor az x = 0 pont döntési határ, de nem lehetséges kimeneti érték. Nulla bemenetre a kvantáló kimenetén ekkor ±q/2 lehetséges értékű, 0.5 valószínűség szerinti eloszlású, kétállapotú, memóriamentes, stacioner véletlen (fehér) zaj jelenik meg, melynek várható értéke nulla, átlagteljesítménye (=szórása) $q^2/4$.

6.1.6. Memória mentes, stacionárius forrás kvantálása

Ha a kvantáló bemenetén ξ_n memória mentes, stacionárius, $F_\xi(x)$ valószínűség eloszlású, $f_\xi(x)$ valószínűség sűrűségű (pdf) véletlen jel van, akkor a kvantáló kimenetén kapott

$\zeta_n = Q(\xi_n)$

véletlen jel is memória mentes, stacionárius sorozat lesz mely **diszkrét eloszlású**:

$$p_{\zeta i} = p_i = \Pr\{\zeta_n = Y_i\} = \Pr\{\xi_n \subset [X_{i-1}, X_i]\} = \int_{X_{i-1}}^{X_i} f_\xi(x)dx\,, \; i = 1,2, \ldots L.$$

(Az $f_\zeta(x)$ sűrűség függvény p_i területű Dirac-deltákat tartalmaz $x = Y_i$ helyeken.)

A kvantáló $\varepsilon_n = \zeta_n - \xi_n = E(\xi_n)$

hibajele is véletlen jel, folytonos eloszlású stacioner folyamat (mint majd később megállapítjuk, tipikus esetekben korrelálatlan, tehát fehér zaj). A hibajel, egyrészt a kimeneti és a bemeneti stacioner eloszlású valószínűségi változók különbsége, tehát ezért stacionárius, másrészt a ξ valószínűségi változó E(x) szerinti függvénye. Ezen utóbbi alapján, az ε_n hiba jel $f_\varepsilon(x)$ valószínűség sűrűségét a ξ_n $f_\xi(x)$ sűrűségéből az $f_\xi(x)$ sűrűségnek a kvantálási intervallumok feletti

$$f_{\xi i}(x) = \begin{cases} f_{\xi(x)} & \text{ha } x \subset (X_{i-1}, X_i] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

szegmenseinek a Q(x) szakaszonként -1 meredekségű részei szerinti belapolódások összegeként kapjuk:

$$f_\varepsilon(x) = \sum_i f_{\xi,i}(Y_i - x).$$

Stacionárius forrás kvantálásakor (feltételezve, hogy nem kisjelű működésről van szó) a kvantáló karakterisztika paramétereiből (például –d és +d intervallum felett kerekítéses üzemmód) és a forrás $f_\xi(x)$ valószínűség sűrűségéből kiszámítható a normál (kerekítéses) és a túlvezérléses üzemmódok valószínűségei:

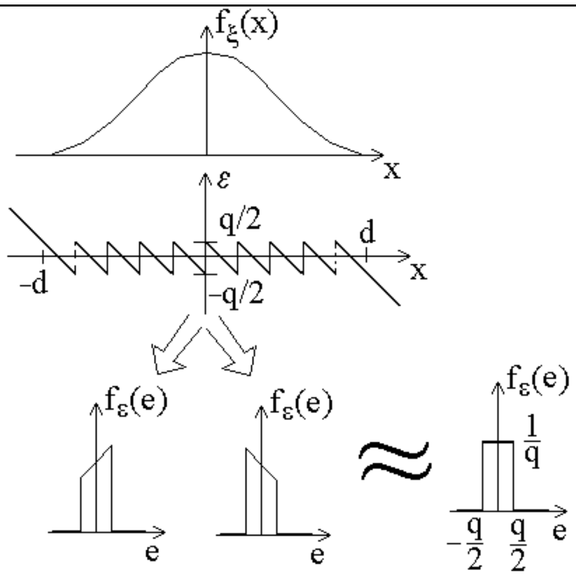
- a normál működés valószínűsége: $P_{\text{normal}} = \int_{-d}^{d} f_\xi(x)dx$
- a túlvezérlés valószínűsége: $P_{\text{overload}} = \int_{-\infty}^{-d} f_\xi(x)dx + \int_{d}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1 - \int_{-d}^{d} f_\xi(x)dx\,.$

Vizsgáljuk meg az **egyenletes kvantáló és normális üzemmódú kvantálás** esetén mit mondhatunk részletesebbet a hibajel statisztikájáról!

A normális üzemmód azt jelenti, hogy nulla a túlvezérlés valószínűsége, azaz

$$p_{\text{overload}} = 0$$

ami ekvivalens azzal, hogy az $f_\xi(x)$ sűrűség tartója nem „lóg le” a kvantáló $[x_{\min,}, \; x_{\max,}]$ dinamika tartományáról, de ugyanakkor nem kisjelű üzemmódról van szó, azaz elég sok q szélességű döntési intervallumot lefed (elég finom a kvantálás). Ekkor nyilvánvaló, hogy az ε hibajel $f_\varepsilon(x)$ sűrűségének a tartója a [-q/2, +q/2] intervallum, mely felett a bemeneti sűrűség q szélességű szegmenseinek összege, tehát igen jó közelítéssel egyenletes valószínűség sűrűséget eredményez.



A [-q/2, +q/2] intervallum felett egyenletes eloszlású, memória mentes, stacionárius folyamat

várhatóértéke $E\{\varepsilon_n\} = 0$,

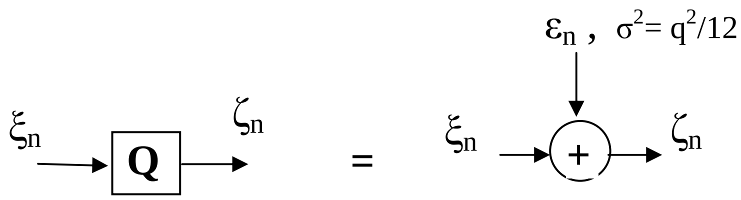
átlagteljesítménye $E\{\varepsilon_n^2\} = P_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 = q^2/12$,

autokorrelációja $r_\varepsilon(n) = \sigma_\varepsilon^2\,\delta(n)$,

teljesítmény sűrűsége: $S_\varepsilon(z) = \mathcal{S}_\varepsilon(f) = \sigma_\varepsilon^2$

További plauzibilis feltevéssel élhetünk: a kvantálási zajt a kvantálandó jeltől is függetlennek tekinthetjük.

Összefoglalva, tehát **egyenletes kvantáló normál üzemmód**jában a kvantálási ε_n hibát a kvantálandó ξ_n jeltől független, egyenletes eloszlású, nulla várható értékű, $\sigma_\varepsilon^2 = q^2/12$ szórásnégyzetű (átlagteljesítményű) **fehér zaj**nak tekinthetjük, azaz használhatjuk a **lineáris additív zajhelyettesítő képet**:



6.1.7. Jel-zaj viszony, optimális kvantálás, illesztett kvantálás

Stacioner forrás kvantálása esetén az általánosan használt minőségjellemző a kvantálás jel-zaj viszonya (SNR), melynek definiciója:

SNR = átlagos jelteljesítmény / átlagos hibateljesítmény, azaz

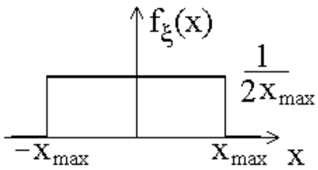
$$SNR = \frac{P_\xi}{P_\varepsilon} = \frac{E\{\xi^2\}}{E\{\varepsilon^2\}} = \frac{E\{\xi^2\}}{E\{(\xi-\zeta)^2\}}$$

A jel-zaj viszonyt gyakran logaritmikus egységben, dB-ben mérik:

$SNR^{dB} = 10 \log_{10}(SNR)$

A kvantálás annál jobb, minél nagyobb a jel-zaj viszonya.

Vizsgáljuk meg először nulla várható értékű, $[-x_{max}, +x_{max}]$ felett **egyenletes eloszlású** stacionárius forrásnak r-bites, [-d,d] dinamika tartományú, egyenletes kvantálóval kapott jel-zaj viszonyát.



A ξ_n jel teljesítménye: $P_\xi = E\{\xi^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \int_{-x_{max}}^{x_{max}} x^2 \frac{1}{2x_{max}} dx = \frac{x_{max}^2}{3}$,

tehát a jel eloszlásának tartójától, azaz a lehetséges legnagyobb előforduló értéktől négyzetesen függ.

A túlvezérlés mentesség feltétele ebben az esetben: $x_{max} \le d$.**Normál működési tartományban** a kvantáló kerekítési zajának teljesítménye – mint azt az előző pontban láttuk - a jeltől függetlenül

$P_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^2 = q^2/12$.

Ezek után, tehát adott kvantáló esetén az SNR^{dB} (x_{max}) függvény - logaritmikusan ábrázolva – 20dB/dekád meredekségű egyenes, azaz annál nagyobb az SNR minél nagyobb a jel teljesítmény azaz minél nagyobb a maximális értéke. Ez a megállapítás természetesen csak a normál működési tartományban, ($q << x_{max} \le d$) érvényes.

A maximális SNR értéket tehát akkor kapjuk, ha a forrás és a kvantáló viszonyára fennáll, hogy $x_{max} = d$. Ebben az esetben beszélhetünk **illesztett kvantálás**ról és ekkor az r-bites ($L=2^r$ szintű) kvantáló maximális jel-zaj viszonya:

$$SNR_{\max} = \frac{P_{\xi\max}}{P_{\varepsilon\,\text{normal}}} = \frac{\frac{d^2}{3}}{\frac{q^2}{12}} = 4\left(\frac{d}{q}\right)^2 = 4\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 2^{2r}$$

és ezt decibellben kifejezve kapjuk az alábbi jól ismert szabályt:

$\mathrm{SNR}_{\max}^{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}(2^{2r}) = 20\ \log_{10}(2)\,r = 6\,r \quad [\mathrm{dB}]$ azaz
a kvantáló jel-zaj viszonya bitekként 6 decibellel növekszik.

Ha kilépünk a normál működési tartományból, azaz $x_{\max} > d$, akkor már $p_{\text{overload}} = 1\text{-}d/x_{\max}$ valószínűséggel a **túlvezérléses tartományban** vagyunk.
Ekkor a kvantálási hiba átlagteljesítménye:

$$P_{\varepsilon\,\text{overload}} = E\left\{\varepsilon^2 \,\middle|\, |\xi| > \mathrm{d}\right\} = \frac{\int_{-\infty}^{-d} (x - y_{\min})^2 f_\xi(x)dx + \int_{d}^{\infty} (x - y_{\max})^2 f_\xi(x)dx}{\int_{-\infty}^{-d} f_\xi(x)dx + \int_{d}^{\infty} f_\xi(x)dx},$$

ahol a kvantálási torzítás átlagteljesítménye már nem független a jel teljesítménytől, hanem $x_{\max}$ –tól négyzetesen függ, ez azt jelenti, hogy túlvezérlés valószínűségének, azaz $x_{\max}$ –nak a növelésével a jel-zaj viszony drasztikusan lecsökken. Ennek illusztrálására nézzünk egy konkrét számpéldát!

Példa:
Mekkora lesz egy 8 bites szimmetrikus, egyenletes kvantáló jel-zaj viszony 10dB-es túlvezérlés esetén? (A bemenő jelet egyenletes eloszlásúnak tekintjük.)

$10\lg\dfrac{\sigma_\xi^2}{\sigma_{\xi\,\max}^2} = 10\mathrm{dB} \Rightarrow \sigma_\xi^2 = 10\cdot\sigma_{\xi\,\max}^2 = 10\dfrac{\mathrm{d}^2}{3}$, ahol d a kvantáló dinamikatartománya.

A zajteljesítményt külön kell számolni, abban az esetben, amikor nincs túlvezérlés és abban, amikor van, majd az alábbiak szerint vegyük a két eredmény átlagát:
$\sigma_\varepsilon^2 = P_n\cdot\sigma_{\varepsilon\,n}^2 + (1 - P_n)\cdot\sigma_{\varepsilon\,t}^2$, ahol $\sigma_{\varepsilon\,t}^2$ a túlvezérléskor kapott kvantálási zaj teljesítmény (szórásnégyzete), $\sigma_{\varepsilon\,n}^2$ a normál működésnél mért zaj szórása, P_n a normál működés valószínűsége.

- $P_n = ?$

  Mivel egyenletes eloszlást tételeztünk föl,

  $P_n = \int_{-\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} \mathrm{f}_\xi(\mathrm{x})dx = \int_{-\mathrm{d}}^{\mathrm{d}} \dfrac{1}{2x_{\max}}dx = \dfrac{d}{x_{\max}}$, ahol

  $$\mathrm{x}_{\max}:\ \sigma_\xi^2 = \frac{\mathrm{x}_{\max}^2}{3} \rightarrow \mathrm{x}_{\max} = \sqrt{3}\sigma_\xi = \sqrt{3}\sqrt{10}\frac{d}{\sqrt{3}} = d\sqrt{10} \rightarrow$$

  $$P_n = \frac{d}{x_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

- $\sigma^2_{\varepsilon n} = ?$

$$\sigma^2_{\xi n} = \frac{q^2}{12} = \mathrm{d}^2 \cdot \frac{2^{-2R}}{3} = \frac{d^2}{3 \cdot 2^{16}}$$

- $\sigma^2_{\varepsilon t} = ?$

$$\sigma^2_{\varepsilon t} = 2\int_d^{x_{max}} \frac{1}{2(x_{max} - d)}(e-d)^2\,dx = \int_d^{\sqrt{10}d} \frac{e^2 - 2ed + d^2}{d\left(\sqrt{10}-1\right)}\,de =$$

$$= \frac{1}{d\left(\sqrt{10}-1\right)}\left[\frac{e^3}{3} + e^2 d + ed^2\right]_d^{\sqrt{10}d} = d^2\,\frac{3\sqrt{10} - \frac{1}{3}}{\sqrt{10}-1} \approx d^2 \cdot 4{,}233$$

Mivel $\sigma^2_{\varepsilon n} << \sigma^2_{\varepsilon t} \rightarrow \sigma^2_{\varepsilon} \approx (1 - P_n)\cdot\sigma^2_{\varepsilon t} = \frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}}\sigma^2_{\varepsilon t} = d^2\left(3 - \frac{1}{3\sqrt{10}}\right)$.

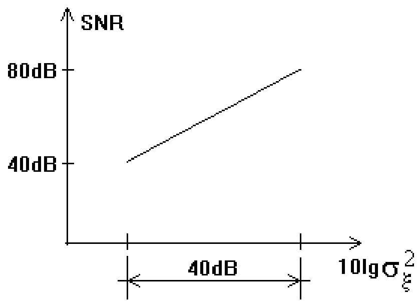
$$SNR = \frac{10\frac{\mathrm{d}^2}{3}}{\sigma^2_{\varepsilon}} = \frac{10\sqrt{10}}{9\sqrt{10}-1} \approx 1{,}15\ (0{,}6\mathrm{dB})$$

Látható, hogy a túlvezérlés megjelenésével meredeken csökken a jel-zaj viszony.

Egyenletes kvantálók jel-zaj viszonyával kapcsolatban oldjuk meg az alábbi számpéldát!

Hány bites lineáris kvantáló kell ahhoz, hogy legalább 40dB-es jel-zaj viszonyt kapjunk 40dB-es dinamikatartomány felett?

Megoldás:
A 40dB-es bemeneti dinamikatartomány azt jelenti, hogy a bemeneti jel legkisebb és legnagyobb teljesítményű része között 40dB a különbség $\rightarrow P_{max}/P_{min} = 10^4$. Ha a legkisebb jelszintnél is 40dB-es jel-zaj viszonyt kell biztosítanunk, akkor a legnagyobb jelszintnél 80dB a jel-zaj viszony:



Tehát SNR_{max} = 80dB $\rightarrow$ R = [80/6] =14 (bit).

6.1.8. Nem egyenletes kvantáló

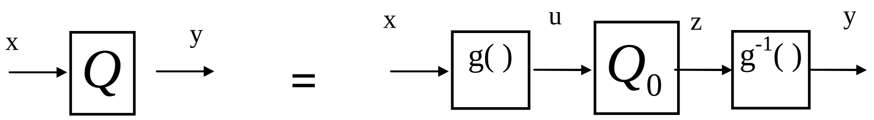
Ha a kvantáló döntési (kerekítési) intervallumai nem egyforma szélességűek (és így, persze a lehetséges kimeneti kerekített étékek távolságai sem egyenlők), akkor nem egyenletes kvantálóról van szó.

Például, okunk lehet a kvantálási karakterisztikát úgy megtervezni, hogy kisebb értékeket kisebb kerekítési hibával, finomabban, nagyobb értékeket nagyobb kerekítési hibával, durvábban kvantáljon. Ezen gondolat részletesebb vizsgálata vezet a következő pontban tárgyalandó logaritmikus kvantáláshoz.

Egy másik meggondolás szerint a gyakrabban előforduló mintanagyságokat érdemes lehet kisebb hibával kvantálni, mint a ritkábban előforduló minta-nagyságokat, annak érdekében, hogy az eredő jel-zaj viszonyt maximalizáljuk. Ez az ötlet vezet a stacioner forrás valószínűség sűrűsége alapján optimalizált nem egyenletes kvantálóhoz, az u.n. Max-Lloyd kvantálóhoz (lásd 6.1.10. pont)

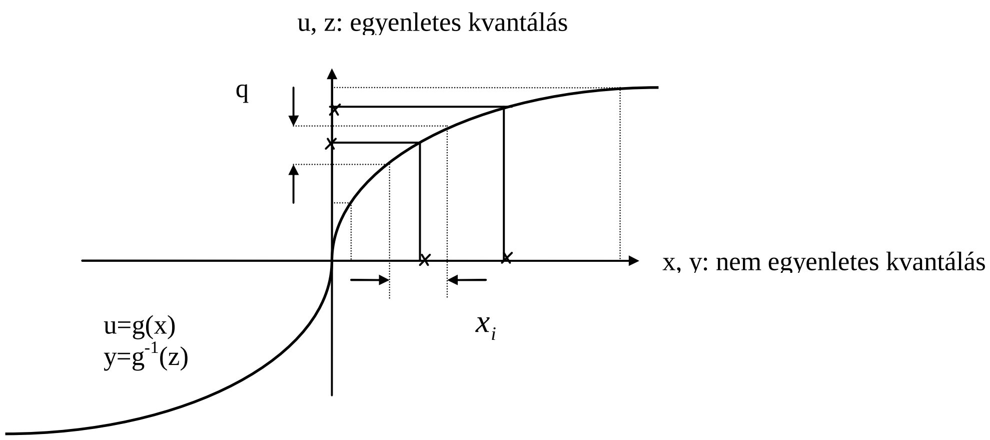
A nem egyenletes kvantálók anlízisénél, tervezésénél és adott esetben az implementációjánál is felhasználható az alábbi tétel:

Minden nem egyenletes Q(x) kvantáló, egy megfelelő g(x) nemlineáris függvénny segítségével visszavezethető egy $Q_0(x)$ egyenletes kvantálásra:



A g(x) nemlineáris függvényt kompandálási karakterisztikának, a $g^{-1}(x)$ inverz függvényt expander karakterisztikának nevezik.

Nem egyenletes kvantálóra egy példát az alábbi ábrán látunk:



6.1.9. A logaritmikus kvantáló

Szimmetrikus kvantálás esetén a kvantálást két részre lehet bontani: előjel meghatározás és abszolút érték kvantálás. A teljesítmény csak az abszolút értéktől függ. A továbbiakban abszolút érték kvantálását vizsgáljuk. Az 6.1.7. pontban láttuk, hogy az egyenletes kvantálóknál, ha csökken a bemenő jel szintje, akkor csökken a jel-zaj viszony. Sok esetben kedvezőbb megoldás lenne, ha a bemeneti jelteljesítménytől (bizonyos dinamika tartományon belül) független lenne a kvantálás jel-zaj viszonya. Ehhez az kell, hogy alacsonyabb jelszinteknél kisebb kvantálási lépésközt alkalmazzunk, a kisebb kvantálási hiba érdekében (*nem egyenletes* kvantáló).

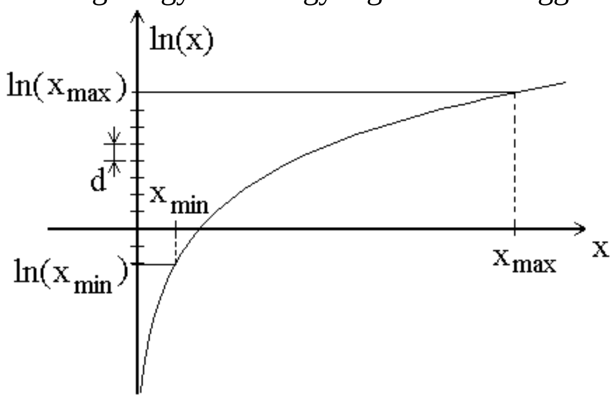
Osszuk fel a bemeneti jeltartományt L intervallumra: $X_1, X_2, ..., X_L$. Ha $\xi_n \in X_i$, akkor $\eta_n = y_i$. Jelöljük annak a valószínűségét p_i-vel, hogy a bemenet az i-edik intervallumba kerül: $p_i = \Pr\{\xi_n \in X_i\}$. A bemeneti jel és a kvantálási zaj teljesítményét írjuk fel a az egyes halmazokra vonatkozó feltételes szórásnégyzetek segítségével:

$$E\left\{\xi^2\right\} = \sum_{i=1}^{L} p_i\, E\left\{\xi^2 \middle| \xi \in X_i\right\} \text{ és } E\left\{\varepsilon^2\right\} = \sum_{i=1}^{L} p_i\, E\left\{\varepsilon^2 \middle| \varepsilon \in X_i\right\}$$

Ezek alapján definiálható a feltételes jel-zaj viszony is: $SNR_i = \dfrac{E\left\{\xi^2 \middle| \xi \in X_i\right\}}{E\left\{\varepsilon^2 \middle| \xi \in X_i\right\}}$..

Figyeljük meg, hogy $SNR' = \sum_{i=1}^{L} p_i \cdot SNR_i \neq SNR$ (!). Az egyenlőség csak akkor áll fenn, ha minden SNR_i megegyezik, azaz a jel-zaj viszony független attól, hogy melyik intervallumba esik a bemeneti jel. Ezt a tulajdonságot a *logaritmikus* kvantáló teljesíti.

Tegyük fel, hogy $x_{min} < |\xi| < x_{max}$.$\Rightarrow$ A Q(x) kvantáló kvantálási határait az x_{min} és x_{max} között válasszuk meg. Vegyünk fel egy logaritmikus függvényt a kvantáló x tengelye fölött,



és osszuk fel a függőleges tengelyt $\ln(x_{min})$ és $\ln(x_{max})$ között L egyenlő (d) közű részre:

$d = \dfrac{\ln(x_{max}) - \ln(x_{max})}{L} \rightarrow L = \dfrac{\ln \dfrac{x_{max}}{x_{max}}}{d}$. Vetítsük vissza a logaritmikus skálán egyenletesen elhelyezkedő intervallumhatárokat az x tengelyre. Az így meghatározott döntési küszöbökkel működő kvantáló jel-zaj viszonya állandó lesz, amely például az x_{max} környezetében az alábbi módon számítható:

$SNR = \dfrac{x_{max}^2}{\dfrac{q_{max}^2}{12}}$, ahol q_{max} az alábbi egyenlettel határozható meg:

$$d = \ln\left(x_{max} + \frac{q_{max}}{2}\right) - \ln\left(x_{max} - \frac{q_{max}}{2}\right) = \ln\frac{x_{max} + \frac{q_{max}}{2}}{x_{min} - \frac{q_{max}}{2}} = \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{x_{max}}{q_{max}} - \frac{1}{2}}\right)$$

Nézzük az alábbi számpéldát:

Hány bites logaritmikus kvantálót kell alkalmaznunk, ha a bemeneti dinamikatartomány 40dB és 40dB-es állandó jel-zaj viszonyt kell biztosítanunk?

Megoldás:

$$SNR = \frac{x_{max}^2}{\frac{q_{max}^2}{12}} = 10^4 \rightarrow \frac{x_{max}}{q_{max}} = \frac{100}{2\sqrt{3}} \rightarrow d = \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{100}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}}\right) = 0{,}0346$$

Mivel a bemeneti dinamikatartomány 40dB,

$$L = \frac{\ln\frac{x_{max}}{x_{min}}}{d} = \frac{\ln 100}{d} \approx 132{,}92 \Rightarrow R = \lceil \log_2 L + 1 \rceil = 9.$$

Azért kellett még 1-et hozzáadni a $\log_2 L$-hez, mert a logaritmikus kvantálóval csak az $|\xi|$-et kvantáljuk, ezért még szükség van egy előjelbitre is.

Látható, hogy a lineáris kvantálónál kapott 14 bit helyett logaritmikus kvantálót alkalmazva már 9bit is elegendő ugyanolyan minőségi paraméterek biztosításához.

Megjegyzés:

A PCM beszédátvitelnél (f_c = 8kHz) 8 bites logaritmikus kvantálást alkalmaznak. Ez kb. 40dB-es dinamikatartománynál 36dB-es jel-zaj viszonyt bisztosít, amely jó beszédérthetőséget eredményez.

6.1.10. Max-Lloyd kvantáló

Egy memória mentes, stacioner forrást teljesen leír a forrás mintáinak $f_\xi(x)$ valószínűség sűrűség függvénye. Ezen forráshoz optimálisan illeszkedő (azaz a jel-zaj viszonyt maximalizáló) L-szintű kvantálót nyílván meghatározza a forrás $f_\xi(x)$ valószínűség sűrűség függvénye.

A feladat tehát: adott $f_\xi(x)$ és L, meghatározandó a jel-zaj viszonyt maximalizáló kvantáló karakterisztika, azaz az X_1, X_2, ... $X_{(L-1)}$ intervallum határok és az Y_1, Y_2, ... Y_L, rekonstruált értékek. A feladat egy bonyolult, nemlineáris, optimalizálási probléma, melyre általános érvényű, zárt alakú megoldás nem ismert.

Egy iteratív eljárásról – bizonyos, gyakran fennálló feltételek esetén – bebizonyítható, hogy a kitűzött feladat megoldásához konvergál. Ezt az iterációt nevezzük Max-Lloyd iterációnak:

Az iteráció algoritmusa:

Vegyünk fel egy kiindulási karakterisztikát:

$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{L-1}^{(0)}; y_1^{(0)}, \ldots, y_L^{(0)}$

Az új rekonstrukciós értékek legyenek az előző intervalllumokbeli várható értékek:

$$y_k^{(i)} = E\left\{\xi \middle| x_{k-1}^{(i-1)} < \xi < x_k^{(i-1)}\right\} \qquad k = 1 \ldots L$$

Az új intervallum határok a szomszédos rekonstrukciós értékek számtani közepe legyen:

$$x_k^{(i)} = \frac{1}{2}\left(y_k^{(i)} + y_{k+1}^{(i)}\right) \qquad k = 1 \ldots L-1$$

Ha még van változás GOTO 2.

Ez az iteráció egy nemlineáris kvantálót eredményez, mely optimálisan illeszkedik a forrás valószínűség sűrűségéhez, azaz pdf optimalizált nem egyenletes kvantálónak is nevezik.

6.1.11. Normalizált kvantáló, optimális kvantáló illesztésének dekomponálása

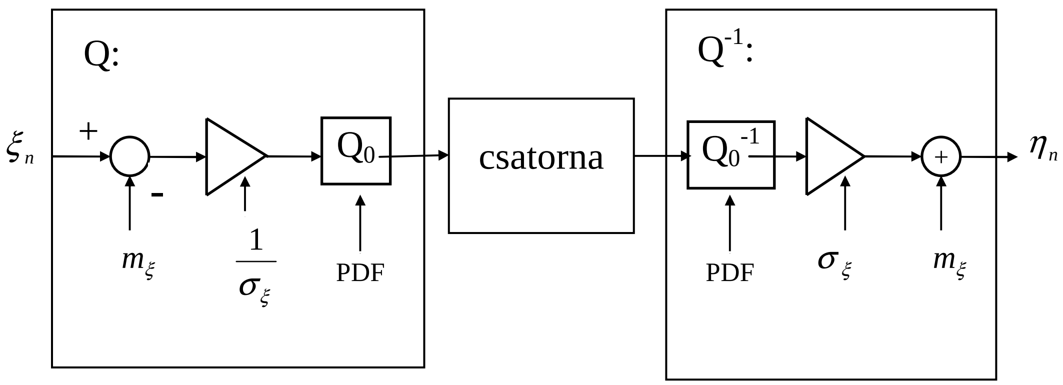
A nulla várható értékű és egységnyi szórású eloszlást standard vagy normalizált eloszlásnak nevezzük. Egy m_ξ vártható értékű és σ_ξ szórású ξ valószínűségi változóból a

$(\xi - m_\xi)/\sigma_\xi$

normalizálással kapunk standard eloszlású valószínűségi változót.

Standard eloszláshoz optimalizált L-szintű kvantáló (egyenletes vagy exponenciális vagy esetleg Max-Lloyd típusú kvantálót) normalizált Q_{01} kvantálónak nevezzük, mely nem függ a forrás várhatóértékétől és teljesítményétől (dinamikájától) sem, csak az eloszlás típusától.

Egy m_ξ vártható értékű és σ_ξ szórású stacioner ξ_n forráshoz az optimális normalizált kvantálót az ábrán látható módon illesztve kapunk optimális kvantálást:



Látható, hogy a kvantáló optimalizálása az optimális normalizált kvantálón túl egy

- additív vagy centrális és egy
- multiplikatív vagy dinamika tartomány optimalizált

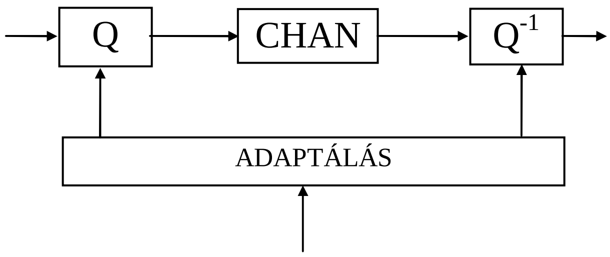
illesztést igényel.

A centrális illesztéshez a forrás várhatóértékét kell ismerni, vagy becsülni, a kvantáló bemenetére egy differenciális jel kerül.

A dinamika tartomány illesztéshez szükséges skálázó faktort a (már nulla várhatóértékű) forrás átlag teljesítménye határozza meg, azt kell ismerni vagy becsülni.

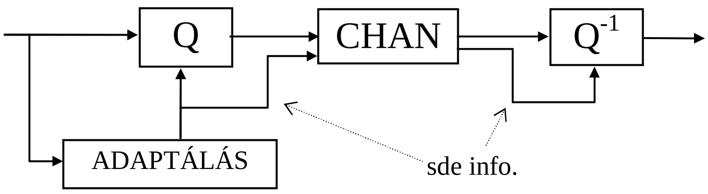
6.2. Adaptív kvantálás

Ha a kvantáló statisztikája időben változó (nem stacioner forrás), vagy állandó de eredetileg ismeretlen paraméterű, akkor az optimális, azaz illesztett kvantáló időben változó paraméterű, un. adaptív kvantáló lesz. Az adaptív kvantálók időben változó paramétereit egy külön alrendszer állítja elő.



Az adaptációs részrendszer az optimális paraméterek becsléséhez szükséges információt vagy a kvantálandó jelből, vagy a már kvantált jelből szerezheti, azaz vagy előrecsatolt, vagy hátracsatolt adaptációról beszélhetünk.

- Előre csatolt adaptáció



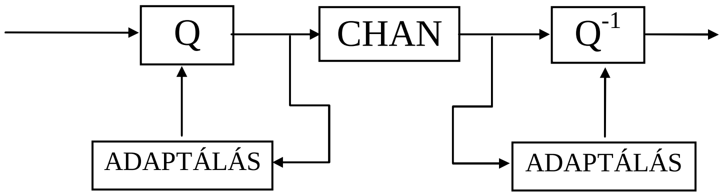
Pl: digitásis TV, mpeg kódoló

- kódolóban koncentrált intelligenciájú kódoló
- egyszerű dekódoló
- rosszabb csatornakihasználtság (a kódolandó jelből határozzuk meg a kódolási algoritmus paramétereit, amelyet a csatornán viszünk át)

- a forrás statisztikáira *blokkos* becslést állít elő (pufferelés kell), de így adott blokkra jól optimalizált kvantáló, valamint nagy a kódolási késleltetés

- tipikusan nagy kódolási késleltetés

- Hátracsatolt adaptáció



- csak hullámforma információ átvitel kell, a paraméterek a dekóderben is kiszámolhatóak (jobb a csatornakihasználtság)
- elosztott intelligenciájú, szimmetrikus kódoló (emiatt bonyolult a dekódoló)
- rekurzív becslések, nem blokkonként, hanem a bejövő adatra azonnal reagál. Emiatt nincs nagy késleltetés, ez real-time információknál előnyös

- Adaptáció dinamikus és statikus jellemzői

Dinamikus szempontból

A változásokat kell követni minél gyorsabban

Jó dinamikájú adaptáció

Stacioner jelekre szuboptimális

Statikus szempontból

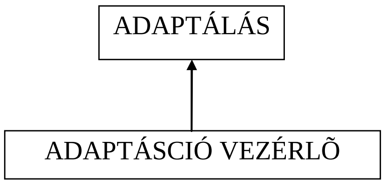
Ha nincs változás, akkor nagyon jó minőségű beállás az optimumra

Jó statikus adaptáció
(rövisd távon nem mozdul a változásokra, azaz, meg tudja különböztetni a gyors változásokat

Gyorsan változó jelekre szuboptimális

Pl.: Távközlő hálózatban: beszédjel nem stacioner, adatjel stacioner

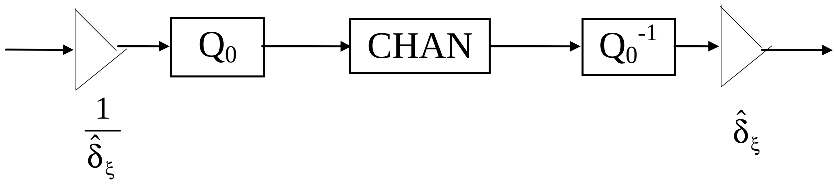
Az adaptív kódnak mindkettőre jónak kell lennie, így kompromisszum kell.



: beállítja a dinamikus/statikus optimalizálást

- Skálázó faktor (dinamikatartomány) adaptív kvantáló

Ha $\mathrm{E}\{\xi_n\} = 0$ és a dinamikatartományra illesztünk:



A jel $\mathrm{P} = \sigma^2 = \mathrm{E}\{\xi^2\} = \mathrm{E}\{\mathrm{g}(\xi)\}$ átlag teljesítményét kell megbecsülni, ebből számítható az egység teljesítményre skálázó szorzó faktor, $1/\sqrt{\mathrm{P}}$, mellyel a jelet a standard kvantálóhoz illesztjük.

- A statisztikai becslésekről általában:

  Az $\mathrm{E}\{\mathrm{g}(\xi)\} = \mathrm{a}$ számot akarjuk becsülni. ($\hat{\mathrm{a}}$)

  Adott a forrás minták sorozata $\xi_n, \xi_{n-1}, ..., \xi_{n-N}$ és belőlük az $\hat{a} = S(\xi_n, \xi_{n-1}, ..., \xi_{n-N})$ statisztika szerint számítjuk a becslést (ez is valószínűségi változó).

  Becslés torzítása: $\mathrm{d} = \mathrm{a} - \mathrm{E}\{\hat{\mathrm{a}}\}$

  Aszimptotikusan torzítatlan becslés: $\lim\limits_{N\to\infty} \mathrm{E}\{\hat{\mathrm{a}}\} = \mathrm{a}$

  A becslés hatákonysága, a szórásnényzete minél kisebb: $\mathrm{var}\{\hat{a}\}$

  Konzisztens becslés: $\lim\limits_{N\to\infty} \mathrm{var}\{\hat{\mathrm{a}}\} = 0$

  Várható árték becslés: vagy **blokkos**, vagy **rekurzív**

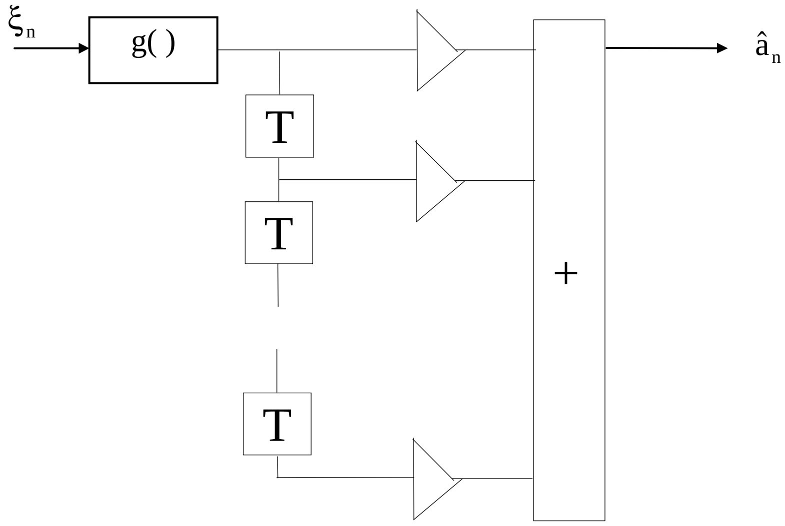
- Blokkos becslés ⇒ FIR (MA) szűrő

  Becslés véges hosszú blokk egyenletes súlyozású számtani közepével:

  $$\hat{\mathrm{a}}_n = \frac{1}{N}\left[\mathrm{g}(\xi_n) + \mathrm{g}(\xi_{n-1}) + ... + \mathrm{g}(\xi_{n-N+1})\right]:$$

  A becslés tozítatlan: $E\{\hat{a}_n\} = E\{g(\xi)\} = a$

  szórásnégyzete, korrelálatlan mintákra: $\mathrm{var}\{\hat{a}_n\} = \dfrac{1}{N}\mathrm{var}\{g(\xi)\}$



Jó dinamikus tulajdonság: rövid blokk hossz, nagyobb szórás

Jó statikus tulajdonság: hosszú blokk, kis szórás, gyosr vátozást nem követ.

- Rekurzív becslés ⇒ IIR (AR) szűrő

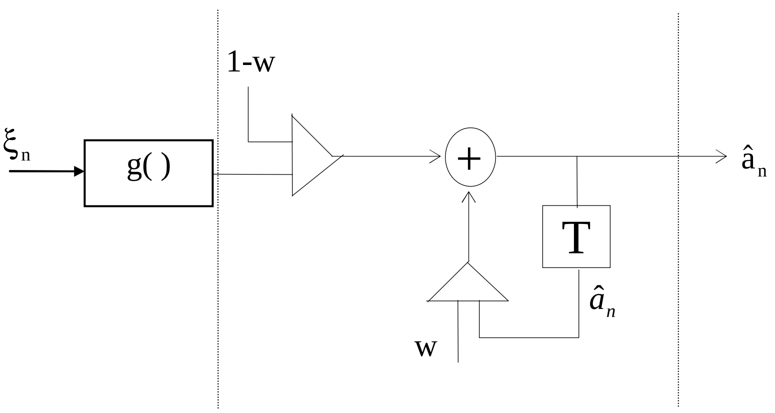
  Exponenciális súlyozású, nem véges memóriájú becslés:

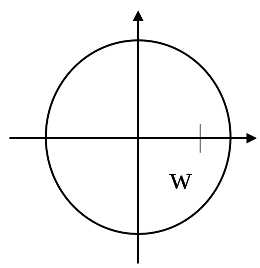
  $\hat{a}_{n+1} = (1-w)\left[g(\xi_n) + wg(\xi_{n-1}) + w^2 g(\xi_{n-2}) + ...\right]$, mely ekvivalens az alábbi rekurzív becsléssel:

  $\hat{\mathrm{a}}_{\mathrm{n+1}} = (1-\mathrm{w}) \cdot \mathrm{g}(\xi_{\mathrm{n}}) + \mathrm{w} \cdot \hat{\mathrm{a}}_{\mathrm{n}}$

  A becslés torzítatlan: $E\{\hat{a}_n\} = E\{g(\xi)\} = a$

  szórásnégyzete, korrelálatlan mintákra: $\mathrm{var}\{\hat{a}_n\} = \dfrac{1-w}{1+w}\mathrm{var}\{g(\xi)\}$





$$\mathrm{H(z)} = \frac{1-\mathrm{w}}{1-\mathrm{wz}^{-1}}$$

- ha w~1 ⇒ nagy súllyal veszi figyelembe a régebbi mintát, jó statikus tulajdonságú
- ha w<1 ⇒ az aktuális mintát veszi nagy súllyal, gyorsan felejt, jó dinamika

Példa egy hátracsatolt adaptív kvantálóra: