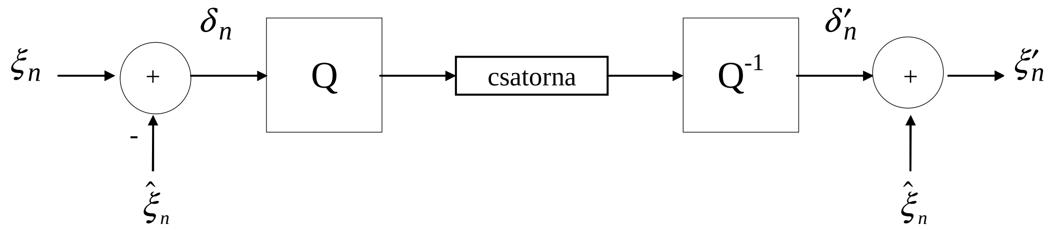
6. JELDIGITALIZÁLÁS ÉS JELREKONSTRUKCIÓ: KVANTÁLÁS, KÓDOLÁS 2

6. Jeldigitalizálás és jelrekonstrukció: kvantálás, kódolás

6.3. Differenciális, prediktív kvantálás, kódolás

6.3.1. A differenciális kvantálás alapelve



ahol $\hat{\xi}_n$ a ξ_n -nek valamilyen becslése, jóslása (predikció).

δ_n a különbségi (predikciós hiba-) jel, Q pedig ehhez a különbségi jelhez illesztett kvantáló, melynek jel-zaj viszonya az előző pontok szerint optimalizált SNR_Q jel-zaj viszony érték. A kvantált differenciális jel:

$\delta'_n = \delta_n + \varepsilon_n$

ahol ε_n a kvantálási hiba.

Az eredő rendszer jel-zaj viszonyára írhatjuk:

$$SNR = \frac{E\{\xi_n^2\}}{E\{\varepsilon_q^2\}} = \frac{E\{\xi_n^2\}}{E\{\delta_n^2\}} \frac{E\{\delta_n^2\}}{E\{\varepsilon_q^2\}} = G_p \cdot SNR_Q \,,$$

ahol G_p az u. n. *predikciós nyereség*,

$$G_P = \frac{E\{\xi_n^2\}}{E\{\delta_n^2\}}$$

amely megmutatja, hogy a bejövő jel teljesítményéhez képest mekkora a hibajel teljesítménye. SNR_Q pedig a sémán *Q*-val jelölt kvantáló jel-zaj viszonya. Az eredmény tehát:

$$\boxed{SNR = G_p \cdot SNR_Q}.$$

azaz a differenciális kvantálás elvét alkalmazva a nem differenciális kvantáláshoz képest a predikciós nyereséggel megnövelt jel-zaj viszony érhető el.

6.3.2. A lineáris predikció

A predikciós nyereség maximalizálásához a $\delta_n = \xi_n - \hat{\xi}_n$ differenciális jel $P_\delta = E\left\{\left|\xi_n - \hat{\xi}_n\right|^2\right\}$ teljesítményét kell minimalizálni.

A $\hat{\xi}_n$ predikció legyen a forrás korábbi N mintájának valamilyen függvénye:

$\hat{\xi}_n = S(\xi_{n-1},\ldots,\xi_{n-N})$,

ahol *S* egy *N*-ed fokú predikció.

A továbbiakban lineáris predikcióval fogunk foglalkozni, a mikor $\hat{\xi}_n = S(\xi_{n-1},\ldots,\xi_{n-N})$ lineáris függvény, azaz

$$\hat{\xi}_n = a_1\xi_{n-1} + a_2\xi_{n-2} + \ldots + a_N\xi_{n-N}\,.$$

Az a_i i=1,2,...N együtthatókat az N-ed fokú predikciós együtthatóknak nevezzük.

Ekkor a lineáris predikció alapfeladata: határozzuk meg a predikciós együtthatók azon értékét, melyeknél a differenciális jel teljesítménye minimális:

$$\min_{a_1,\ldots,a_N} E\left\{\left|\xi_n - \hat{\xi}_n\right|^2\right\}.$$

A továbbiakban legyen:

$$\underline{a} = [a_1,\ldots,a_N]^T \text{ és } \underline{\xi_{n-1}} = [\xi_{n-1},\ldots,\xi_{n-N}]^T$$

Ekkor a predikciós egyenlet vektoros formában:

$$\hat{\xi}_n = \underline{a}^T\underline{\xi_{n-1}}\,.$$

A minimalizálandó kifejezés:

$$E\left\{\left|\xi_n - \hat{\xi}_n\right|^2\right\} = P_\delta = E\left\{\xi_n^2 - 2\xi_n\underline{a}^T\underline{\xi_{n-1}} + \underline{a}^T\underline{\xi_{n-1}}\underline{a}^T\underline{\xi_{n-1}}\right\} = E\left\{\xi_n^2 - 2\xi_n\underline{a}^T\underline{\xi_{n-1}} + \underline{a}^T\underline{\xi_{n-1}}\underline{\xi_{n-1}}^T\underline{a}\right\}$$

Amiből az *N* változós kvadratikus alak:

$$P_\delta = r_\xi(0) - 2\underline{a}^T\begin{bmatrix} r_\xi(1)\\ r_\xi(2)\\ \ldots\\ r_\xi(N)\end{bmatrix} + \underline{a}^T\begin{bmatrix} r_\xi(0) & r_\xi(1) & \ldots & r_\xi(N-1)\\ r_\xi(1) & r_\xi(0) & & r_\xi(N-2)\\ \ldots & \ldots & & \\ r_\xi(N-1) & r_\xi(N-2) & \ldots & r_\xi(0)\end{bmatrix}\underline{a}\,,$$

ahol:

$$r_\xi(m) = E\{\xi_n\xi_{n+m}\} \text{ az autokorrelációs függvény,}$$

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} r_\xi(1)\\ r_\xi(2)\\ \ldots\\ r_\xi(N)\end{bmatrix}, \text{ és}$$

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} r_\xi(0) & r_\xi(1) & \dots & r_\xi(N-1) \\ r_\xi(1) & r_\xi(0) & & r_\xi(N-2) \\ \dots & \dots & & \\ r_\xi(N-1) & r_\xi(N-2) & \dots & r_\xi(0) \end{bmatrix},$$

ami a folyamat *N*-ed rendű autokorrelációs mátrixa (egyben Toeplitz mátrix).
A minimum megkereséséhez a

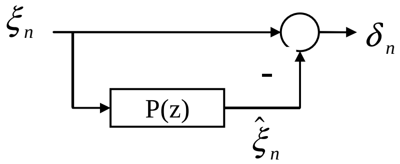
$$\underset{\underline{a}}{grad}\, \sigma_\delta^2 = -2\underline{r} + 2\underline{\underline{R}}\,\underline{a} = 0$$

normál egyenletet kell megoldani. A megoldás:

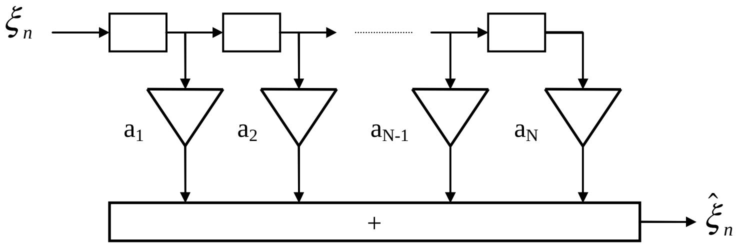
$$\boxed{\underline{a_{opt}} = \underline{\underline{R}}^{-1}\underline{r}}.$$

megj: az inverz autokorrelációs mátrixot Levinson módszerrel számítják.

A predikciós egyenletből látható, hogy a lineáris predikció egy hurokmentes FIR szűrőt valósít meg, vagyis



ahol a predikciót végző blokk (P(z)):



$$P(z) = \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i} .$$

6.3.3. A predikciós nyereség elvi határa

Az N-ed fokú predikció optimális együtthatóira kapott $\underline{a_{opt}} = \underline{\underline{R}}_N^{-1}\underline{r}_N$ eredményünket a predikciós hiba teljesítményének $P_\delta = r_\xi(0) - 2\underline{a}^T\underline{r}_N + \underline{a}^T\underline{\underline{R}}_N\underline{a}$ képletébe visszaírva kapjuk, hogy

$$P_{\delta\, N\,\min} = r_\xi(0) - \underline{r}_N^T\underline{\underline{R}}_N^{-1}\underline{r}_N$$

és a predikciós nyereség értéke:

$$G_{PN} = \frac{r_\xi(0)}{r_\xi(0) - \underline{r}_N^T \underline{\underline{R}}_N^{-1} \underline{r}_N}$$

Nyilvánvaló, hogy a predikciós nyereség az N fokszámnak monoton nem csökkenő függvénye, így létezik határértéke, melyre bebizonyítható, hogy

$$\lim_{N\to\infty} G_{P,N} = G_{P\max} = \frac{1}{\gamma_\xi}, \qquad \gamma_\xi = \frac{\exp\left(\frac{1}{F}\int_{-F/2}^{F/2} \ln\left(S_\xi(f)\right) df\right)}{\frac{1}{F}\int_{-F/2}^{F/2} S_\xi(f)\,df}$$

ahol a γ_ξ szám a stacioner ξ forrás spektrális laposság mértéke, mely az S_ξ(f) teljesítménysűrűség spektrum mértani közepének és számtani közepének a hányadosa.

Ennek belátásához tételezzünk fel egy Δf = F/N szélességű intervallumok felett S_i konstans értékű, lépcsős *S*(f) spektrumot, (vagy ami ezzel ekvivalens, az integrálokat téglányösszeggel közelítjük):

$$\gamma_\xi = \frac{\exp\left(\frac{1}{F}\sum_i \ln(S_i)\Delta f\right)}{\frac{1}{F}\sum_i S_i \Delta f} = \frac{\exp\left(\frac{1}{N}\sum_i \ln(S_i)\right)}{\frac{1}{N}\sum_i S_i} = \frac{\sqrt[N]{\prod_i S_i}}{\frac{1}{N}\sum_i S_i} ,$$

ezért $\gamma_\xi \le 1$.

Tehát $G_{P\max} \ge 1$ és akkor 1, ha a forrás fehér zaj. A fehér zaj tehát nem predikálható.

Egy jel annál hatásosabban predikálható, minél egyenlőtlenebb a teljesítménysűrűség spektruma.

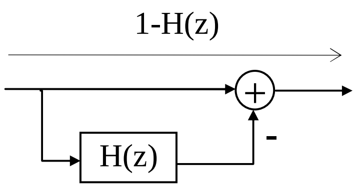
Az is nyilvánvaló, hogy a nulla sávszélességű, azaz vonalas spektrumú összetevő periodikus komponenst jelent, mely nulla predikciós hibával rekonstruálható. Ez azt jelenti, hogy a harmonikus összetevők mintáit nem kell kvantálni és átvinni a csatornán, a dekóderben egy megfelelően beállított kezdőértékekkel működő oszcillátor tökéletesen rekonstruálja őket.

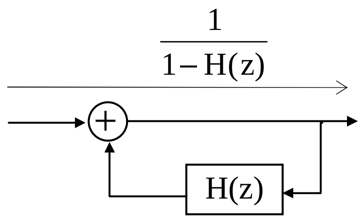
6.3.4. A differencia képző és rekonstruáló lineáris hálózatok

A differenciális kódolásnál a jel-zaj viszonynak a predikciós nyereséggel megnövelt értékének remélt realizálásához vizsgáljunk meg néhány differenciaképző ötletet.

Egyelőre tegyük fel, hogy normál üzemmódú, nagyon finom kvantálókat használunk, azaz most eltekintünk a nemlineáris kvantálási torzítástól, és a lineáris modell keretein belül a kódolóbeli differencia képzés és a hozzátartozó dekódolóbeli rekonstrukció néhány strukturális lehetőségét vizsgáljuk meg. A vizsgált struktúrákban a H(z) transzferfüggvényű dobozok alatt mindig a bemeneti minták késleltetettjeinek valamilyen súlyozott összegét értjük (FIR szűrők).

1. Előrecsatolt differenciaképzés



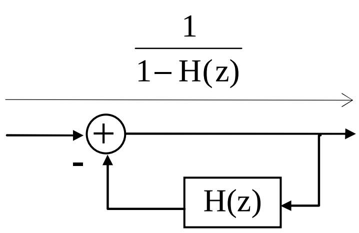


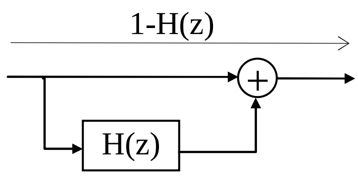
all zero koder (MA) all pole dekoder (AR)

Megjegyzések:

- H(z) együtthatóinak optimális értékét a **jól ismert lineáris predikció** feladatának 6.2.2.-beli „egyszerű” megoldása adja.
- A kódoló hurokmentes hálózat, így feltétel nélkül **stabil**.
- A differenciális jel **hurkon kívűl** keletkezik.
- A rekurzív dekóder esetleges instabil pólusainál a bemeneti differenciális jelnek zérusa van (a kódoló miatt), igy az esetleges instabil pólus nem gerjesztődik.
- Minél nagyobb predikciós nyereséget érünk el a kódolóban, azaz minél kisebb a differenciális jel teljesítménye, annál inkább „**teljesítmény-erősítő**ként” üzemel a **dekóder**.

2. Hátracsatolt differenciaképző



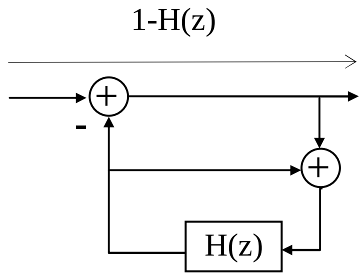


all zero decoder (MA)

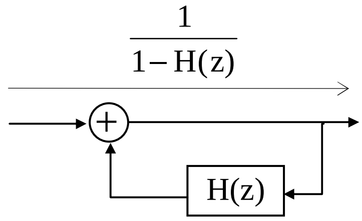
Megjegyzések:

- H(z) együtthatóinak optimális értékét egy nagyon bonyolult, nemlineáris optimalizálási feladat „nem ismert” megoldása adja.
- A rekurzív kódoló stabilitását semmi sem garantálja.
- A differenciális jel hurkon belül keletkezik.

3. <u>Hátracsatolt differencia képzés lineáris prediktorral</u>



Ekvivalens 1.-gyel

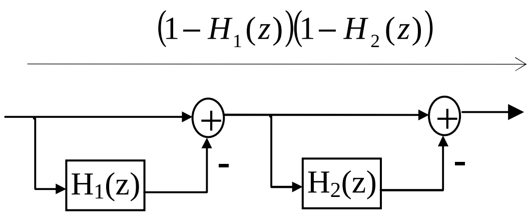


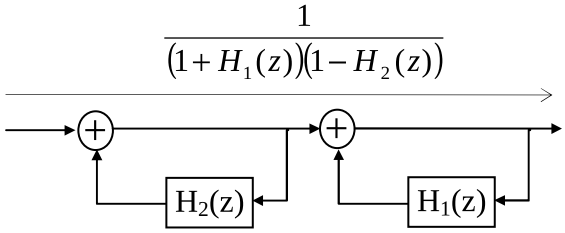
(AR) dekóder

Megjegyzések:

- Ha H(z) ugyanaz az egyszerű lineáris prediktor, mint az első esetben, akkor a kódoló (és természetesen a dekódoló is) ekvivalens az 1. esettel, és így megörökli annak ismert és stabil tulajdonságait.
- Ugyanakkor ez a kódoló rekurzív hálózat, a differenciális jel egy hurkon belül keletkezik.

4. <u>Többfokozatú differencia képzés</u>

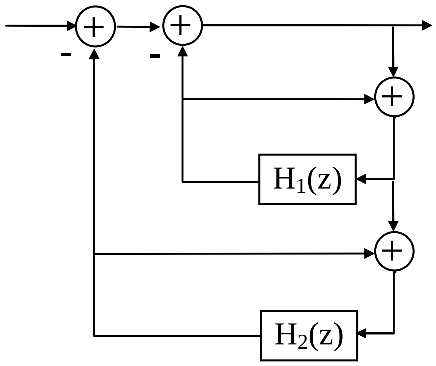




Megjegyzések:

- Az egyes fokozatokra ugyanaz igaz, mint az 1. esetre.
- Több fokozatú predikció lehetővé teszi a különböző típusú predikciók (például közeli mintákon alapuló és távoli mintákon alapuló) szétválasztását.

5. Több hurkú differencia képzés



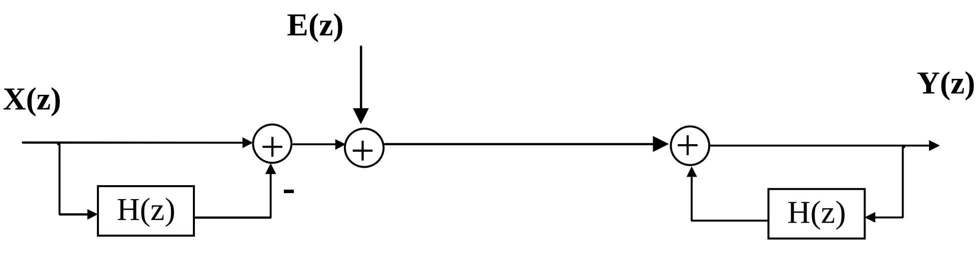
Megjegyzések:

- A kódoló és így a dekódoló is ekvivalens az előzővel
- A differenciális jelek hurkokban képződnek, így ezekre ugyanaz igaz, mint a 3. esetre.

6.3.5. A differencia képzés és kvantálás

A továbbiakban a differenciális jel kvantálását is figyelembe vesszük, feltéve, hogy a differenciális jelhez illesztett kvantálókat alkalmazunk, és így a normál üzemmódú kvantálókat lineáris, additív zajhelyettesítő képükkel vesszük figyelembe. Ebben az esetben két bemenetű (az x jel, és az e kvantálási hibajel, zaj) és egy kimenetű (az y rekonstruált jel) lineáris hálózatokat vizsgálhatunk, alkalmazva a szuperpozició elvét.

1. Előrecsatolt lineáris prediktor



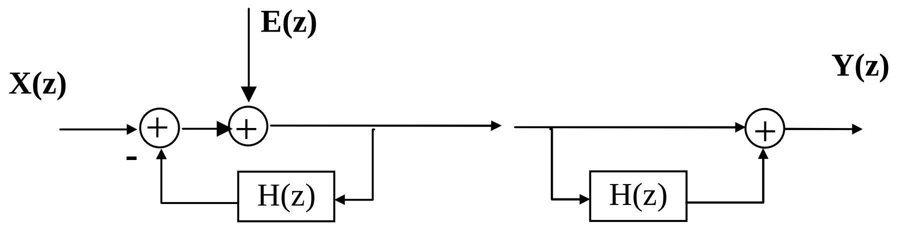
Az analízis eredménye:

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{1 - H(z)} E(z)$$

Megjegyzések:

- Nagy baj van: a rekonstruált jelben a kvantálási hiba a dekóder teljesítményerősítő jellegű transzferfüggvényén keresztül, felerősítve jelenik meg, így nem realizálódik a predikciós nyereség, értelmetlen a differenciális kvantálás.

2. Hátracsatolt differenciaképző



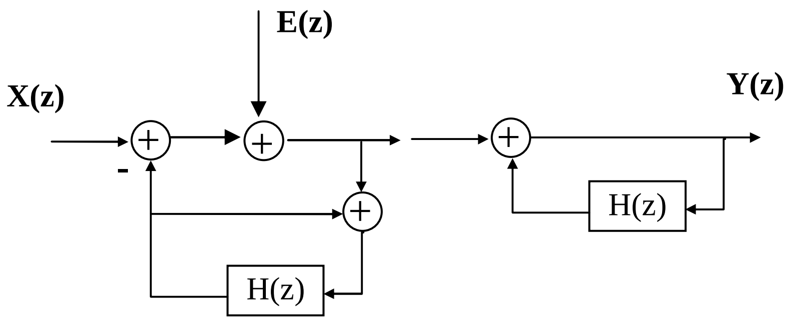
Az analízis eredménye:

Y(z) = X(z) + E(z)

Megjegyzések:

- A kvantálási hiba erősítés nélkül kerül a rekonstruált kimenetre, realizálható lenne a predikciós nyereség,
- ha a többi, az előző pontban leírt nehézség nem állna fenn továbbra is.

3. Lineáris prediktor visszacsatolt változata



Az analízis eredménye:

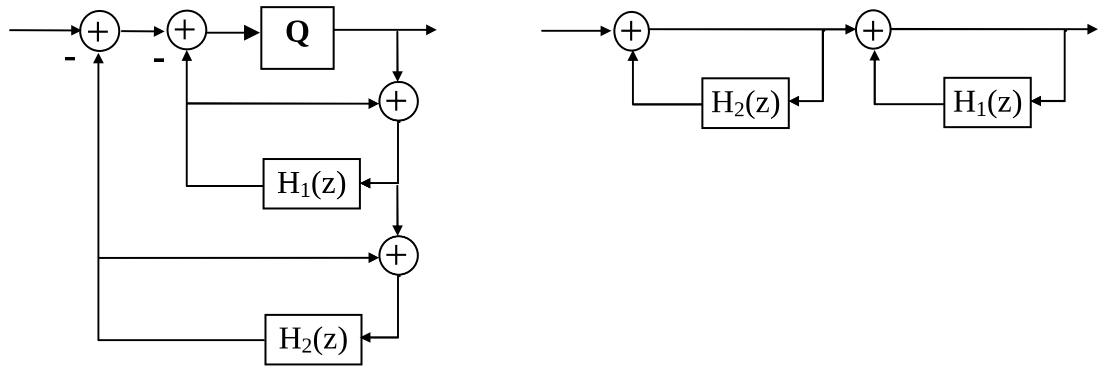
Y(z) = X(z) + E(z)

Örömteli felismerés:

- Sikerül realizálni a predikciós nyereséget a H(z) lineáris prediktor felhasználásával stabil kódolóval, ha
- a kvantálót a differenciaképző hurkon belül helyezzük el.

Ez a struktúra a differenciális, prediktív kódolók alapstruktúrája.

A többfokozatú prediktív kódolókat több hurkú, diferenciális kódolókkal valósíthatjuk meg:



6.4. Részsávú, kódolás

6.4.1. A részsávú kódolók felépítése, analízise

Az eddigiek során az F órajelű, P átlagteljesítményű ξ_n stacioner forrást az F órajellel működtetett R bites illesztett (optimális) kvantálóval kvantáltuk:

Az illesztett kvantálás eredményeként a normál működésű kvantálóban keletkező $\varepsilon = \eta - \xi$ zaj teljesítményre írhatjuk, hogy

$P_\varepsilon = c\,P\,2^{-2R}$, ahol c eloszlás és kvantáló típus függő konstans,

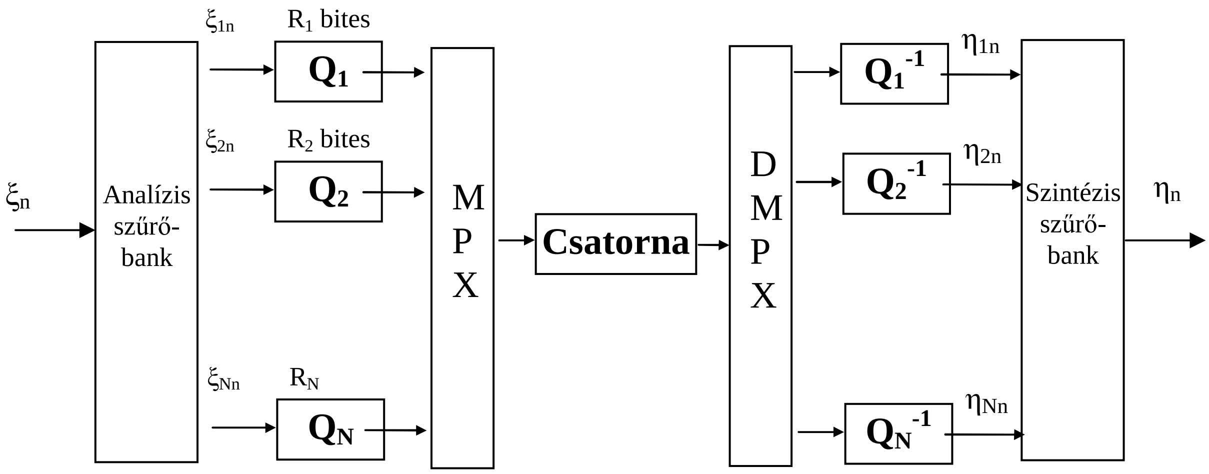
tehát jel-zaj viszony:

$SNR_Q = k\,2^{2R}$, $k=1/c$.

Az adott minőséghez (jel-zaj viszony) szükséges csatorna sebesség:

$I_Q = F.R$ (bit/sec).

A részsávú kódolás esetén a nagy F sebességű ξ_n bemenetet az analízis szűrőbank N-darab kisebb F_i , i = 1, 2, ... N sebességű ξ_{in} i = 1, 2, ... N összetevőkre bontja, melyek teljesítményei P_i , i = 1, 2, ... N . ξ_{in} részsávú összetevőket külön-külön, F_i sebességgel működtetett R_i bites illesztett kvantálókkal kvantáljuk. A részsávú összetevők kvantálóinak kimeneteit az MPX multiplexer szervezi a digitális csatornán átvihető szimbólum sorozattá. A dekóder a DMPX demultiplexerrel kezdődik, a kissebességű részsávú összetevők mintáit az inverz kvantálók rekonstruálják, majd az eredő nagysebességű kimenetet a szintézis szűrőbank állítja elő.



A részsávú összetevők P_i teljesítményeire feltesszük, hogy

$$P = \sum_{i=1}^{N} P_i \quad ,$$

ugyanis át nem lapolódó részsávokba eső spektrumú stacioner folyamatok korrelálatlanok, tehát összeg négyzetes várható értéke egyenlő a négyzetek várható értékeinek összegével. Hasonlóképpen a részsávú kvantálás eredő zajteljesítménye egyenlő a rész kvantálók zajteljesítményinek összegével:

$$P_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{N} P_{\varepsilon,i}$$

Továbbá a részsávú összetevők illesztett kvantálásainál keletkező zajteljesítményre írhatjuk, hogy

$$P_{\varepsilon i} = c\ P_i\ 2^{-2Ri} ,$$

ahol c ugyanaz a konstans, amit az referenciául tekintendő nem részsávú illesztett kvantálónál bevezettünk.

A részsávú (SubBand) kódolás eredő jel-zaj viszonya tehát

$$SNR_{SB} = \frac{\sum_i P_i}{\sum_i cP_i 2^{-2R_i}} = k \frac{\sum_i P_i}{\sum_i P_i 2^{-2R_i}} = \frac{2^{-2R} \sum_i P_i}{\sum_i P_i 2^{-2R_i}} k 2^{2R} = G_{SB} SNR_Q$$

ahol

$$G_{SB} = \frac{2^{-2R} \sum_i P_i}{\sum_i P_i 2^{-2R_i}}$$

az egyszeri illesztett kvantálóhoz képest elért részsávú nyereség, ami tehát a részsávú felbontás által létrejött P_i teljesítmény eloszlástól és a kvantálók bitszámainak R_i kiosztásától függ.

A szükséges csatorna sebesség:

$$I_{SB} = \sum_i F_i R_i \quad \text{(bit/sec).}$$

Ha egyenközű részsávú felbontást végzünk, akkor $F_i = F/N$, $i = 1, 2, ... N$ és ekkor az azonos csatorna sebességhez ($I_{SB} = I_Q$) szükséges bitkiosztásra adódik:

$$\sum_i R_i = NR$$

6.4.2. Az optimális bitallokáció

Ha a frekvencia tengely felett egyenközű részsávú felbontás mellett döntünk, akkor már adott a részsávú felbontás P_i teljesítmény eloszlása és a részsávú kódolástól várható nyereség már csak a kvantálók bitszámainak R_i kiosztásától függ.

A feladat tehát:

- adott P_i , $i = 1, 2, \dots N$ teljesítmény eloszlású sávfelbontás és
- adott összbitszám mellet, $\sum_i R_i = NR$
- keressük a kvantálók azon R_i kiosztását, melynél minimális ez eredő kvantálási zaj teljesítmény:.

$$\min_{R_1,R_2,\dots R_N} P_{\varepsilon,SB} \quad \text{feltéve, hogy} \sum_i R_i = NR$$

azaz

$$\min_{R_1,R_2,\dots R_N} \sum_{i=1}^{N} P_i 2^{-2R_i} \quad , \quad \sum_i R_i - NR = 0$$

Többváltozós függvény **feltételes szélsőértékét** keressük. A Lagrange multiplikátoros módszer szerint a feladatot visszavezetjük az alábbi (N+1) változós, **feltétel nélküli** szélsőérték keresésre:

$$\min_{R_1,R_2,\dots R_N\lambda} \left\{ \sum_{i=1}^{N} P_i 2^{-2R_i} + \lambda \left(\sum_i R_i - NR \right) \right\} = \min_{R_1,R_2,\dots R_N\lambda} \varphi(R_1, R_2, \dots R_N \lambda)$$

A differenciálható célfüggvény szélsőértékére írhatjuk: grad $\varphi(R_1, \dots R_N, \lambda)=0$, azaz

$$\frac{\partial}{\partial R_i} \left\{ \sum_{i=1}^{N} P_i 2^{-2R_i} + \lambda \left(\sum_i R_i - NR \right) \right\} = \frac{\partial}{\partial R_i} \left(P_i 2^{-2R_i} \right) + \lambda = -2 \ln 2\, P_i 2^{-2R_i} + \lambda \quad , i = 1,2,\dots N$$

ahol ln a természetes alapú logaritmus. R_i –t kifejezve:

$$R_i = \frac{1}{2} \mathrm{ld}\, P_i + \frac{1}{2} \mathrm{ld} \left(\frac{2 \ln 2}{\lambda} \right) \quad i= 1,2,\dots N$$

Ezeket összegezve és $\sum_i R_i = NR$ feltételt felhasználva:

$$\sum_i R_i = \frac{1}{2} \sum_i \mathrm{ld}\, P_i + N \frac{1}{2} \mathrm{ld} \left(\frac{2 \ln 2}{\lambda} \right) = NR \text{ , melyből } \frac{1}{2} \mathrm{ld} \left(\frac{2 \ln 2}{\lambda} \right) = R - \frac{1}{2N} \sum_i \mathrm{ld}\, P_i \text{ . Ezt } R_i \text{ –be}$$

visszahelyettesítve kapjuk:

$$R_i = \frac{1}{2}\,\mathrm{ld}\,P_i + R - \frac{1}{2N}\sum_i \mathrm{ld}\,P_i = R + \frac{1}{2}\left(\mathrm{ld}\,P_i - \frac{1}{N}\,\mathrm{ld}\left(\prod_i P_i\right)\right) \quad \text{azaz}$$

$$\boxed{R_i = R + \frac{1}{2}\,\mathrm{ld}\frac{P_i}{\sqrt[N]{\prod_i P_i}}, \quad i = 1,2,\ldots N}$$

Eredményünk szerint, tehát az optimális bit kiosztás azt jelenti, hogy az átlagos R bitszámnál nagyobb R_i bitszámot (azaz finomabb kvantálást) azon részsávok kvantálására osztunk ki, melyek P_i teljesítménye nagyobb a részsávú felbontásnál kapott teljesítmény eloszlás mértani közepénél, azaz $P_i > \sqrt[N]{\prod_i P_i}$. A kis teljesítményű részsávok az átlagnál kevesebb bitszámot kapnak, azaz ezeket durvábban kvantáljuk.

Az optimális bit kiosztásnál az egyes részsávokban keletkező kvantálási zajra kapjuk:

$$P_{\varepsilon i} = c\,P_i\,2^{-2R_i} = c\,P_i\;2^{-2R}\left(\frac{P_i}{\sqrt[N]{\prod_i P_i}}\right)^{-1} = c\;\sqrt[N]{\prod_i P_i}\;\;2^{-2R}$$

Tehát $P_{\varepsilon i}$ i-től független, a kvantálási zaj teljesítményegyenletes eloszlású a részsávokban.

A részsávú kódolással elérhető nyereség:

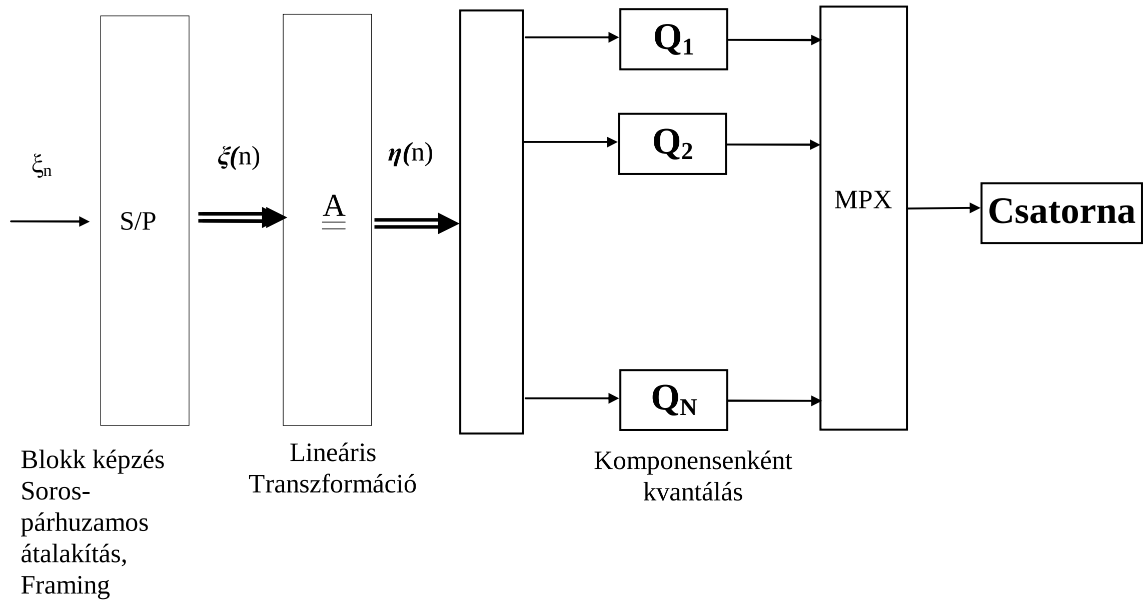
$$G_{SB} = \frac{SNR_{SB}}{SNR_Q} = \frac{P_{\varepsilon,Q}}{\sum_i P_{\varepsilon,i}} = \frac{cP2^{-2R}}{Nc\;\sqrt[N]{\prod_i P_i}\;\;2^{-2R}} = \frac{\frac{1}{N}\sum_i P_i}{\sqrt[N]{\prod_i P_i}} \geq 1$$

Részsávú kódolással tehát, annál nagyobb jel-zaj viszony érhető el, minél jobban eltér a részsávú összetevők teljesítményeinek mértani közepe a számtani középtől, azaz minél egyenlőtlenebb a teljesítmény eloszlás. Az elérhető jel-zaj viszony javulásra kapott eredményünk lényegében ugyan az mint a differenciális-prediktív kódolóknál megismert határ.

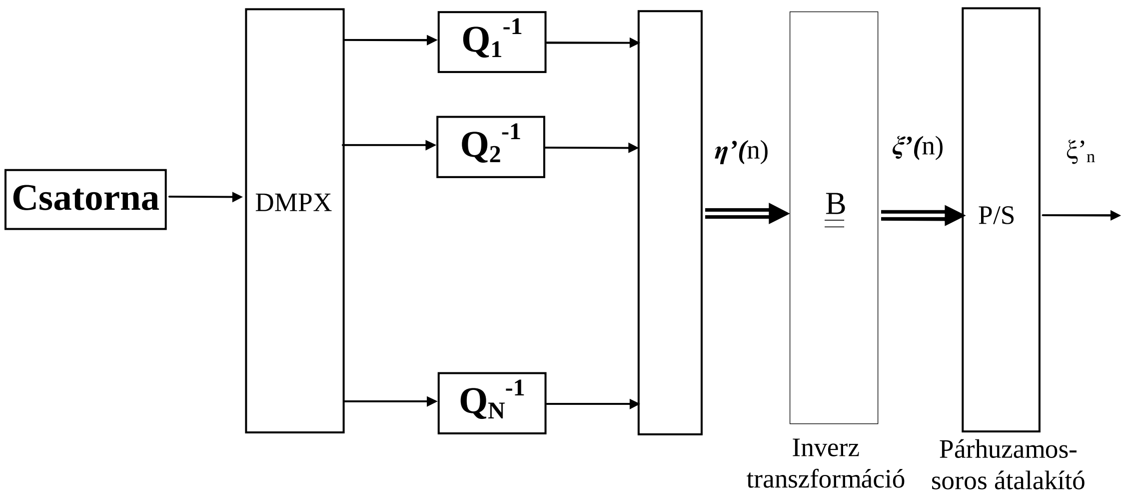
6.5. Transzformációs, kódolás

6.5.1. A transzformációs kódolók felépítése, analízise

A kódoló:



Dekódoló:



ahol: $\boldsymbol{\xi}(n) = [\,\xi_n,\ \xi_{n-1}, \ldots \xi_{n-(N-1)}\,]^T$, $\boldsymbol{\eta}(n) = \underline{\underline{A}}\ \boldsymbol{\xi}(n)$ és $\boxed{}$.

6.5.2. Az optimális transzformációs kódolás: KLT

Olyan transzformációs mátrixot keresünk, amely a stacioner folyamat korrelált ξ(n-i), i=0,1, ...(N-1) mintáinak egyenletes energia-eloszlású vektorából egyenetlent állít elő.

A stacioner ξ_n forrás N hosszú blokkjainak autokorrelációs mátrixa az alábbi

$$E\left\{\underline{\xi}(n)\cdot\underline{\xi}^T(n)\right\}=\underline{\underline{R}}_{\xi}=\begin{bmatrix} R(0)\,\mathrm{R}(1)\ldots\mathrm{R}(\mathrm{N}-1) \\ \mathrm{R}(0)\ldots \\ \ldots \end{bmatrix},$$

mely egy Toeplitz mátrix, átlójában a konstans átlag teljesítménnyel.

A transzformált vektor autokorreláció mátrixa:

$$E\left\{\underline{\eta}(n)\cdot\underline{\eta}^T(n)\right\}=E\left\{\underline{\underline{A}}\underline{\xi}(n)\cdot\underline{\xi}^T(n)\underline{\underline{A}}^T\right\}=\underline{\underline{A}}\underline{\underline{R}}_{\xi}\underline{\underline{A}}^T=\underline{\underline{R}}_{\eta}$$

Olyan transzformációs mátrixot keresünk, amely a stacioner folyamat korrelált ξ(n-i), i=0,1, ...(N-1) mintáinak egyenletes energia-eloszlású vektorából olyan $\underline{\eta}(n)$ vektort állít elő, melynek komponensei

- korrelálatlanok, azaz az $\underline{\underline{R}}_{\eta}$ mátrix diagonál mátrix (nulla várható értékű forrást tételezzünk fel) és
- teljesítményeinek eloszlása a lehető legegyenlőtlenebb, azaz adott összeg mellett minimális a szorzatuk, mert az optimális bitallokáció mellett ekkor realizálható a legnagyobb nyereség.

A feladat megoldását a ξ_n forrás NxN-es $\underline{\underline{\mathrm{R}}}_{\xi}$ autokorrelációs mátrixának sajátvektorai és sajátértékei alapján kapjuk meg:

Az $\underline{\underline{\mathrm{R}}}_{\xi}$ mátrix d_i saját értékei és a hozzájuk tartozó v_i saját vektorai definiciója:

$$\underline{\underline{\mathrm{R}}}_{\xi}\,\underline{\mathrm{v}}_{\mathrm{i}}=\mathrm{d}_{\mathrm{i}}\underline{\mathrm{v}}_{\mathrm{i}}\quad \mathrm{i}=1,2,\ldots\mathrm{N}$$

ami másként is felírható:

$$\underline{\underline{\mathrm{R}}}_{\xi}\,\underline{\underline{\mathrm{V}}}=\underline{\underline{\mathrm{V}}}\,\underline{\underline{\mathrm{D}}}\qquad \text{ahol}\ \underline{\underline{\mathrm{V}}}=\left[\underline{\mathrm{v}}_1,\underline{\mathrm{v}}_2,\ldots\underline{\mathrm{v}}_{\mathrm{N}}\right]\quad \text{és}\quad \underline{\underline{\mathrm{D}}}=diag\left\{d_1,d_2,\ldots d_N\right\}$$

A pozitív definit $\underline{\underline{\mathrm{R}}}_{\xi}$ autokorrelációs mátrixra igaz, hogy sajátértékei pozitív számok, sajátvektorai ortogonálisak (és egyre normáltak)

$$\underline{\mathrm{v}}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{t}}\,\underline{\mathrm{v}}_{\mathrm{j}}=\delta_{\mathrm{i,j}}\quad \text{azaz}\quad \underline{\underline{\mathrm{V}}}^{\mathrm{t}}\,\underline{\underline{\mathrm{V}}}=\underline{\underline{\mathrm{I}}}\quad,\quad \text{azaz}\quad \underline{\underline{\mathrm{V}}}^{-1}=\underline{\underline{\mathrm{V}}}^{t}$$

Tehát

$$\underline{\underline{\mathrm{R}}}_{\eta}=\underline{\underline{\mathrm{D}}}=\underline{\underline{\mathrm{V}}}^{\mathrm{t}}\,\underline{\underline{\mathrm{R}}}_{\xi}\,\underline{\underline{\mathrm{V}}}$$

Az optimális transzformációs kódolóban alkalmazandó transzformációs mátrix a stacioner forrás autokorrelációs mátrixa sajátvektoraiból mint sorokból álló mátrix:

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{V}}^t = \begin{bmatrix} \underline{v}_1^{\,t} \\ \underline{v}_2^{\,t} \\ \dots \\ \underline{v}_N^{\,t} \end{bmatrix} \quad \text{illetve} \quad \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{V}} = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots \underline{v}_N]$$

Ezt a transzformációt Karhunen-Loeve transzformációnak nevezzük.

6.5.3. Szuboptimális transzformációk

Transzformációk:

- 4 pontos DWHT

$$^4\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- 4 pontos DFT

$$^4\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & j \end{bmatrix}$$

- 4 pontos DCT

$$^4\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & -b & -a \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -a & a & -b \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} a &= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8} \\ b &= \sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

DCT-t használják gyakran, ami visszavezethető DFT (FFT)-re. Az N-pontos, valós DCT transzformáció N-pontos bemenetét kiegészíthetjük 2N pontos valós-páros bemenetté a komplex 2N-pontos FFT számára, ekkor a kimenet 2N-pontos valós-páros lesz, melynek N-pontos része az N-pontos valós DCT transzformáció kimenete.

6.5.4. Képjelek transzformációs kódolása