2. Diszkrét idejű rendszerek

Definíció: Rendszer az, amelynek van be- és kimenőjele, és a kimenőjel a bemenőjeltől függ. A rendszer a lehetséges bemenőjelek halmazának leképezése a lehetséges kimenőjelek halmazába. (Input-output system).

Rendszer: {bemeneti jeltér} → {kimeneti jeltér}

A továbbiakban csak olyan rendszerekkel foglalkozunk, amelyek bemenetén és kimenetén diszkrét idejű jelek vannak (→ diszkrét idejű rendszerek), amelyek megadhatók mind az idő-, mind a frekvencia-, mind az operátortartományban.

Definíció: A **rendszeregyenlet**ek a bemeneti és a kimeneti jelek között teremtenek kapcsolatot ún. rendszerjellemző függvények segítségével. A rendszeregyenletek ill. a rendszerjellemzők szintén megadhatók az idő-, a frekvencia- és az operátortartományban:

$\boldsymbol{R}_t\{x_{mT1}\} = y_{nT2}$;

$\boldsymbol{R}_f\{X(f)\} = Y(f)$;

$\boldsymbol{R}_z\{X(z_1)\} = Y(z_2)$.

A továbbiakban rendszerek osztályozásának alábbi néhány fontos szempontját fogjuk áttekinteni:

lineáris	↔	nemlineáris
memóriamentes	↔	memóriás
invariáns	↔	variáns
valós	↔	komplex
kauzális	↔	nem kauzális
stabil	↔	labilis
FIR	↔	IIR
lineáris fázisú	↔	nem lineáris fázisú
ARMA	↔	nem ARMA
minimál fázisú	↔	nem minimál fázisú

2.1 Linearitás

Definició: Lineáris a **rendszer**, ha a rendszer által megvalósított leképezés homogén és additív, másképpen, ha a rendszerleképzés a lineárkombináció képzéssel felcserélhető.

Az időtartományban felírva:

$$\boldsymbol{R}\left\{\sum_i \lambda_i \mathrm{x}_{\mathrm{m}}^{(i)}\right\} = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{R}\left\{\mathrm{x}_{\mathrm{m}}^{(i)}\right\}.$$

Megjegyzés:

A homogenitás azt jelenti, hogy arányos a leképezés: $\boldsymbol{R}\{\lambda \mathrm{x}_{\mathrm{m}}\} = \lambda \boldsymbol{R}\{\mathrm{x}_{\mathrm{m}}\}$,
míg az additivitás: $R\{\mathrm{x}_{\mathrm{m}}^{(1)} + \mathrm{x}_{\mathrm{m}}^{(2)}\} = R\{\mathrm{x}_{\mathrm{m}}^{(1)}\} + R\{\mathrm{x}_{\mathrm{m}}^{(2)}\}$ (Szuperpozició).

2.1.1 Időtartománybeli leírás, rendszeregyenletek, rendszerjellemzők

Definíció: **Egységsorozat**:

$$\delta_{\mathrm{m}} = \begin{cases} 1, \text{ ha m} = 0 \\ 0, \text{ ha m} \neq 0 \end{cases} \text{ ill. } \delta_{\mathrm{m}-\mathrm{m}_0} = \begin{cases} 1, \text{ ha m} = \mathrm{m}_0 \\ 0, \text{ ha m} \neq \mathrm{m}_0 \end{cases} \text{ (eltolt egységsorozat).}$$

Minden sorozat felírható eltolt egységsorozatok lineárkombinációjával:

$\mathrm{x}_{\mathrm{m}} = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \mathrm{x}(n) \cdot \delta_{\mathrm{m}-\mathrm{n}}$, ahol x(n) az x_{m} sorozat n-edik mintájának számértéke.

Jelöljük a $\mathrm{s}_{\mathrm{m,n}}$-nel a rendszer $\delta_{\mathrm{m}-\mathrm{n}}$ egységsorozatra adott válaszát: $\mathrm{s}_{\mathrm{m,n}} = R\{\delta_{\mathrm{m}-\mathrm{n}}\}$.

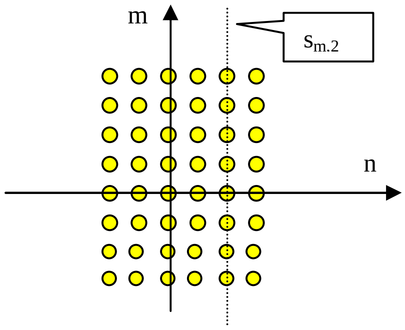
$\mathrm{s}_{\mathrm{m,n}}$ egy kétdimenziós, kétirányban végtelen számsorozat.

Az $\mathrm{s}_{\mathrm{m,n}}$ a legáltalánosabb alakú rendszerjellemző, amellyel az időtartománybeli rendszeregyenlet:

$$\boxed{\mathrm{y}_{\mathrm{m}} = R\{\mathrm{x}_{\mathrm{n}}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{s}_{\mathrm{m,n}} \cdot \mathrm{x}_{\mathrm{n}}} \; .$$

Lineáris rendszerek esetén, tehát az összes eltolt egységsorozatra adott rendszerválaszok ismeretében ($\mathrm{s}_{\mathrm{m,n}}$) bármely x_{n} bemenethez kiszámolható a rendszer válasz, a kimeneti y_{m} sorozat.

A lineáris rendszereket az időtartományban leíró $\mathrm{s}_{\mathrm{m,n}}$ kétdimenziós sorozatot a kétdimenziós sík integer raszterpontjai feletti számokkal szemléltethetjük, a bemeneti sorozathoz rendelt index a vízszintes irányban nő, a kimeneti időindex a függőleges irány:



Általános lineáris rendszer $s_{m,n}$ időtartományi rendszerjellemzője

Adott n értékhez tartozó abszcissza feletti függőleges egyenes mentén elhelyezkedő számok az m ordináta függvényében egy egydimenziós sorozatot adnak, mely a rendszer kimeneti sorozata, ha a bemenetre az n időponthoz eltolt egységsorozatot adtuk.

2.1.2 Frekvenciatartománybeli leírás, rendszeregyenletek, rendszerjellemzők

Vegyük a Fourier-transzformáltját az időbeli rendszeregyenletnek:

$$\tilde{Y}_{F_2}(f_2) = \mathcal{F}\{y_n\} \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m \cdot e^{-j2\pi m f_2 T_2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{m,n} \cdot x_n \cdot e^{-j2\pi m f_2 T_2}$$, amelyben

x_n felírható a Fourier-transzformáltjával:

$$x_n = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{X}_{F_1}(f_1)\} \equiv T_1 \int_0^{F_1} \tilde{X}_{F_1}(f_1) \cdot e^{j2\pi n f_1 T_1} df_1$$. Ezzel

$$\tilde{Y}_{F_2}(f_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{m,n} \cdot T_1 \int_0^{F_1} \tilde{X}_{F_1}(f_1) \cdot e^{j2\pi n f_1 T_1} df_1 \cdot e^{-j2\pi m f_2 T_2}$$

Mivel a integrálás és az összegzés felcserélhető,

$$\tilde{Y}_{F_2}(f_2) = T_1 \int_0^{F_1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{m,n} e^{-j2\pi(-n f_1 T_1 + m f_2 T_2)} \right) \tilde{X}_{F_1}(f_1) df_1$$

A fenti egyenletben a ()-ben lévő függvény (egy előjeltől eltekintve) az időtartománybeli $s_{m,n}$ sorozat kétdimenziós Fourier-transzformáltja.

$$\mathcal{F}_m\{\mathcal{F}_n\{s_{m,n}, f_1\}, f_2\} = S(f_1, f_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{m,n} e^{-j2\pi(n f_1 T_1 + m f_2 T_2)}$$

Így $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{m,n} e^{-j2\pi(-n f_1 T_1 + m f_2 T_2)} = S(-f_1, f_2)$, és a frekvenciatartománybeli rendszeregyenlet:

$$\boxed{\tilde{Y}_{F_2}(f_2) = T_1 \cdot \int_0^{F_1} S(-f_1, f_2) \cdot \tilde{X}_{F_1}(f_1) df_1}$$ (ami egy lineáris integrál transzformáció).

Itt a rendszerjellemző függvény az $S(f_1,f_2)$ kétdimenziós frekvenciaátviteli karakterisztika.

2.1.3 Operátortartománybeli leírás, rendszeregyenletek, rendszerjellemzők

Vegyük a z-transzformáltját az időbeli rendszeregyenletnek:

$$\mathrm{Y}(z_2) = Z\{\mathrm{y}_m, z_2\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{y}_m \cdot z_2^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{s}_{m,n} \cdot \mathrm{x}_n \cdot z_2^{-m}$$, amelyben

x_n felírható a z-transzformáltjával:

$$\mathrm{x}_n = Z^{-1}\{\mathrm{X}(z_1)\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \mathrm{X}(z_1)\cdot z_1^{n-1} dz_1$$. Ezzel

$$\mathrm{Y}(z_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{s}_{m,n} \cdot \frac{1}{2\pi j}\oint_c \mathrm{X}(z_1) z_1^{n-1} dz_1 \cdot z_2^{-m}$$

Mivel a integrálás és az összegzés felcserélhető,

$$\mathrm{Y}(z_2) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{s}_{m,n} \cdot z_1^{n} \cdot z_2^{-m}\right)\cdot z_1^{-1} \cdot \mathrm{X}(z_1) dz_1$$

A fenti egyenletben a ()-ben lévő függvény kifejezhető az időtartománybeli $s_{m,n}$ sorozat kétdimenziós z-transzformáltjával.

$$Z\{\mathrm{s}_{m,n}\} = Z_n\{Z_m\{\mathrm{s}_{m,n}, z_1\}, z_2\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{s}_{m,n} \cdot z_1^{-n} \cdot z_2^{-m} = \mathrm{S}(z_1, z_2)$$

Így $\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{s}_{m,n} \cdot z_1^{n} \cdot z_2^{-m} = \mathrm{S}(z_1^{-1}, z_2)$, és az operátortartománybeli rendszeregyenlet:

$$\boxed{\mathrm{Y}(z_2) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c S(z_1^{-1}, z_2)\cdot \mathrm{X}(z_1)\cdot z_1^{-1} dz_1}$$.

Itt a rendszerjellemző függvény az $\mathrm{S}(z_1, z_2)$ kétdimenziós átviteli függvény.

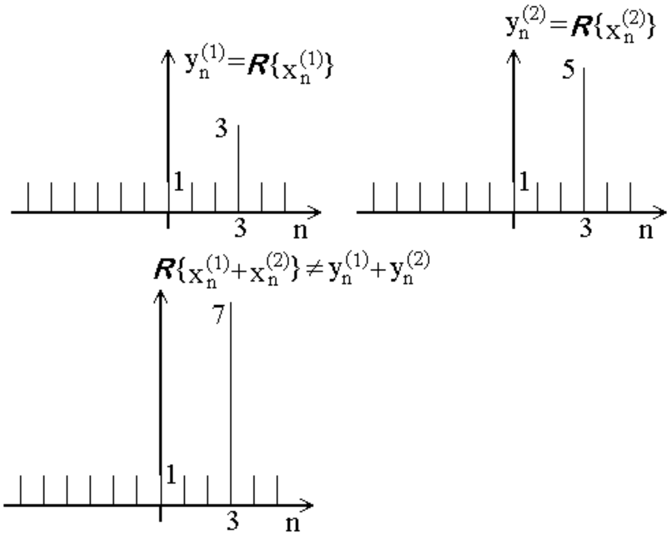
Feladatok:

1. Definiáljuk a diszkrét idejű rendszert az alábbi differenciaegyenlettel:
$2\cdot x_{n-2}+1 = y_n$. Lineáris-e a rendszer?

Megoldás: Ez nem lineáris rendszer, mert nem homogén (kétszeres gerjesztésre nem kétszeres lesz a válasz). Ez abból is látszik, hogy 0 gerjesztésre egy lineáris rendszernek 0-át kellene adnia a kimenetén, itt pedig állandó 0 helyett mindig 1-et kapunk. A teljesség kedvéért mutassuk be, hogy ez a rendszer nem is additív:

$\boldsymbol{R}\left\{\mathrm{x}_n^{(1)} + \mathrm{x}_n^{(2)}\right\} \overset{?}{\neq} \boldsymbol{R}\left\{\mathrm{x}_n^{(1)}\right\} + \boldsymbol{R}\left\{\mathrm{x}_n^{(2)}\right\}$, ahol pl. . $\mathrm{x}_n^{(1)} = \mathrm{e}_n$ és $\mathrm{x}_n^{(2)} = 2\mathrm{e}_n$.

Ekkor



2. Tekintsük az alábbi lineáris rendszert: $y_n = n \cdot x_n$. Gondoljuk végig, hogy valóban lineáris-e! Hogy néz ki az idő-, a frekvencia- és az operátortartománybeli rendszeregyenlete?

3. Legyen a rendszer differenciaegyenlete $y_n = x_{n^2}$. Kérdés, lineáris-e ez a rendszer. Ha igen, adjuk meg a rendszerjellemző függvényeit az idő-, a frekvencia- és az operátortartományban!

2.2 Memóriamentesség

Definíció az időtartományban: **Memóriamentes** a rendszer, ha a kimenőjel m-edik időpontban vett értéke csak a bemenet m-edik időpontbeli értékétől függ:

$$y_m \equiv R\{x_n, n = -\infty \ldots \infty\} = R\{x_n, n = m\}.$$

2.2.1 Lineáris és memóriamentes rendszerek (lineáris modulátorok)

Ha a rendszer lineáris is, akkor ennek megfelelően a kétdimenziós időtartománybeli rendszerjellemző függvény:

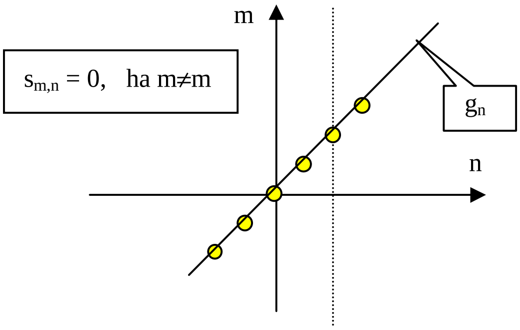
$$s_{m,n} = \begin{cases} g_n, & \text{ha } m = n \\ 0, & \text{ha } m \neq n \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{m,n} \cdot x_n = g_m \cdot x_m} .$$

Lineáris és memóriamentes rendszerek időtartománybeli rendszeregyenlete tehát:

$y_n = g_n \cdot x_n$,

ahol a lineáris rendszer kétdimenziós $s_{m,n}$ rendszerjellemzőjét egyértelműen meghatározza a memóriamentességet leíró g_n egydimenziós sorozat, az időtartománybeli egydimenziós rendszerjellemző (felfogható egy időben változó erősítésnek $\Rightarrow$ a lineáris memóriamentes rendszer egy modulátor).

A lineáris rendszereken belül a memóriamentesség az időtartományi kétdimenziós rendszerjellemzőnek az alábbi ábrán látható specialitását jelenti:



Lineáris és memóriamentes rendszer $s_{m,n}$ időtartományi rendszerjellemzője

Mivel az időtartománybeli szorzás a frekvencia- és az operátortartományban konvolúciónak felel meg,

$$\boxed{\tilde{Y}(f) = F_1 \int_0^{F_1} G(\varphi) \cdot \tilde{X}(f-\varphi) d\varphi = G(f) * \tilde{X}(f)}$$, $G(f) = \boldsymbol{F}\{g_n\}$, és

$$\boxed{Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c G(\nu) \cdot X\left(\frac{z}{\nu}\right) \cdot \nu^{-1} d\nu}$$, $G(z) = \boldsymbol{Z}\{g_n\}$.

2.3 időinvariancia

<u>Definíció az időtartományban:</u> **Invariáns** (pontosabban időinvariáns; időeltolás invariáns) a rendszer, ha n_0-lal eltolt bemenetre n_0-lal eltolt választ ad, azaz ha

$$y_m = \boldsymbol{R}\{x_n\}, \text{ akkor } y_{m-n_0} = \boldsymbol{R}\{x_{n-n_0}\} \text{ minden } x_n \text{ –re és } n_o \text{ –ra.}$$

2.3.1 Lineáris, invariáns rendszerek (lineáris szűrők)

Legyen a rendszer lineáris, és az egység sorozatra adott válasza, azaz az impulzus válasz sorozata $h_m = s_{m,o} = \boldsymbol{R}\{\delta(m-o)\}$. Ekkor ha a rendszer invariáns is, akkor

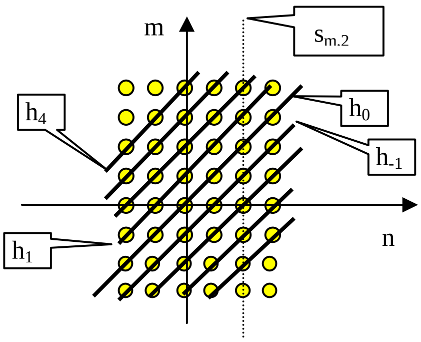
$$s_{m,n} \equiv \boldsymbol{R}\{\delta_{m-n}\} = h_{m-n}.$$

Vagyis létezik egy egydimenziós h sorozat, amely egyértelműen meghatározza a lineáris, invariáns rendszert. Ezzel az időtartománybeli rendszeregyenlet:

$$\boxed{y_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{m-n} \cdot x_n = h_m * x_m}.$$

A h_m sorozatot a rendszer impulzusválaszának nevezzük.

A lineáris rendszereken belül az időinvariáns tulajdonság az időtartományi kétdimenziós rendszerjellemzőnek az alábbi ábrán látható speciális sávos jellegét jelenti: az m=n átlóval párhuzamos egyenesek mentén azonos h_{m-n} értékek vannak:



Lineáris és invariáns rendszer $s_{m,n}$ időtartományi rendszerjellemzője

Az időtartományi egyenletnek véve a Fourier- és a z-transzformáltját, megkapjuk a frekvencia- és az operátortartománybeli rendszeregyenletet:

$$\boxed{Y(\mathrm{f}) = H(\mathrm{f}) \cdot X(\mathrm{f})},$$

ahol H(f) = $\boldsymbol{F}$\{h_n\} az ún. frekvenciaátviteli karakterisztika (X(f) = $\boldsymbol{F}$\{x_n\}), és

$$\boxed{\mathrm{Y}(z) = \mathrm{H}(z) \cdot \mathrm{X}(z)},$$

ahol H(z) = $\boldsymbol{Z}$\{h_n\} az átviteli függvény (X(z) = $\boldsymbol{Z}$\{x_n\}).

A lineáris invariáns rendszereket *lineáris szűrők*nek nevezzük.

A H(f) komplex értékű átviteli karakterisztikához több valós értékű rész-karakterisztika is rendelhető. A H(f)-et valós- és képzetes részre bontva

$$H(\mathrm{f}) = R(\mathrm{f}) + \mathrm{j}I(\mathrm{f}),$$

kapjuk az R(f) **valós rész** és I(f) **képzetes rész karakterisztiká**kat.
A H(f) komplex értékű függvényt a

$$H(\mathrm{f}) = A(\mathrm{f})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi(\mathrm{f})} = \mathrm{e}^{a(f)-\mathrm{j}\varphi(\mathrm{f})},$$

exponenciális alakba írva kapjuk az A(f) **amplitudó-karakterisztikát**, az a(f) logaritmikus abszolút értékkarakterisztikát és a φ(f) **fázis-karakterisztikát**.

Az A(f) amplitúdó-karakterisztika és a hozzátartozó φ(f) fázis-karakterisztika többféle értelmezése is használatos:

- Valós, előjeles A(f) karakterisztika, a hozzá tartozó φ(f)-ben nincsenek π értékű ugrások.
- A(f) abszolút érték karakterisztika, φ(f)-ben π értékű ugrások lépnek fel ott, ahol az előjeles amplitúdó előjelet váltana.
- Belapolt φ(f) fázis-karakterisztika, értéke csak 0 ... 2π (vagy -π ... +π) között lehetséges, 2π értékű ugrások vannak benne.
- Folytonos, nem korlátos φ(f) fázis-karakterisztika, értéke ugrás mentesen , de korlátlanul változik (unwrap).

A folytonos és differenciálható fáziskarakterisztika alapján értelmezhető a **futási idő karakterisztika:**

$$\tau(\mathrm{f}) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{d}{d\mathrm{f}}\varphi(\mathrm{f})\,.$$

2.3.2 Lineáris memóriamentes és lineáris, invariáns rendszerek viszonya

Csak egyféle olyan lineáris rendszer van, amelyik egyszerre memóriamentes és invariáns. Ez az állandó g erősítéssel való szorzás.

A lineáris modulátorok és szűrők idő- és frekvencia tartománybeli viselkedéseinek összefoglalása az alábbi táblázatban látható:

	lineáris	
	modulátor	szűrő
időtartomány	$y_n = g_n \cdot x_n$ memóriamentes	$y_n = h_n * \cdot x_n$ invariáns
frekvencia tartomány	$Y(\mathrm{f}) = G(\mathrm{f}) * X(\mathrm{f})$ invariáns	$Y(\mathrm{f}) = H(\mathrm{f})\,.\,X(\mathrm{f})$ memóriamentes

Az időtartománybeli memóriamentesség a frekvenciatartományban eltolás invarianciát jelent. Vagyis ha a bemenetre egy $X(\mathrm{f}-\mathrm{f}_0)$ spektrumú jel kerül, akkor a modulátor kimenetének spektruma $Y(\mathrm{f}-\mathrm{f}_0)$ lesz.
Az időtartománybeli invariancia a frekvenciatartományban memóriamentességnek felel meg: $Y(\mathrm{f}) = X(\mathrm{f})\cdot H(\mathrm{f})$. Nem tevődnek át spektrum összetevők más frekvenciára; adott frekvenciás kimeneti

spektrum érték csak a bemenet ezen frekvenciás értékétől függ.

2.4 Valós rendszerek

Definíció az időtartományban: Valós a rendszer, ha valós bemenetre valós választ ad.

Valós lineáris rendszer:

Az időtartományi $s_{m,n}$ rendszerjellemző valós kétdimenziós sorozat. A valós lineáris rendszerek $H(f_1,f_2)$ frekvencia tartományi és $H(z_1,z_2)$ operátor tartományi rendszerjellemzőinek tulajdonságai a Fourier és a Z-transzformáció valós jelekre vonatkozó tulajdonságait öröklik (konjugált komplex szimmetria).

2.5 Kauzalitás

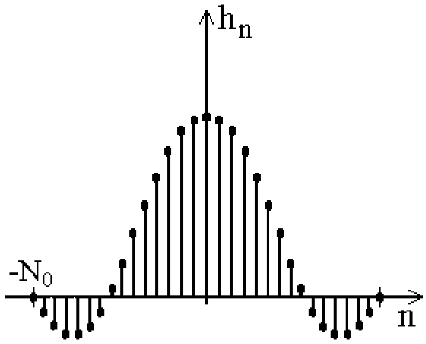
Definíció az időtartományban: Kauzális a rendszer, ha az *n*-edik kimeneti minta csak $m \le n$ indexű bemeneti mintáktól függ:

$y_n = \boldsymbol{R}\{x_m, m = -\infty\ldots\infty\} = \boldsymbol{R}\{x_m, m \le n\}$. (Vagyis a rendszer pillanatnyi válasza nem függ a bemeneti jel jövőjétől.)

Megjegyzés:

– Vegyük észre, hogy minden memóriamentes rendszer kauzális.

– A gyakorlatban csak kauzális rendszer implementálható. Pl. ha egy rendszer impulzusválasza az alábbi függvény:

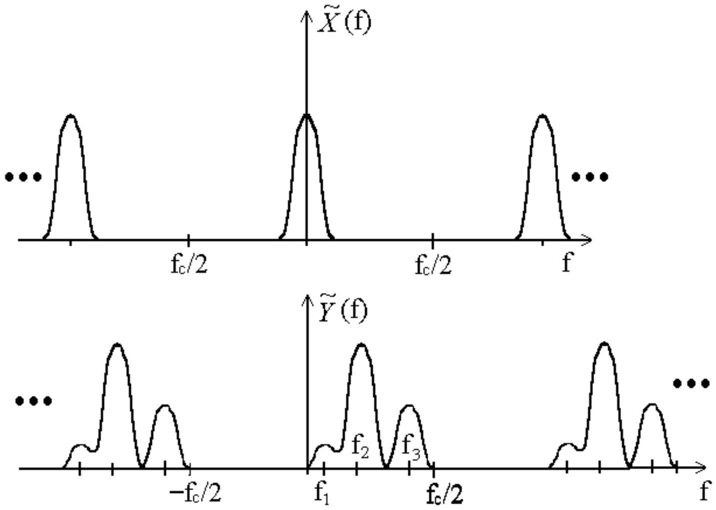


akkor már az x_n sorozat bemenetre tétele előtt N_0 idővel meg kellene jelennie a kimeneten a válasznak. Ez csak úgy lehetne lehetséges, ha a rendszer jósolni tudna, és kitalálná, hogy a felhasználó, mikor és milyen jelet akar majd N_0 idő múlva a bemenetre tenni.

– A lineáris, invariáns és kauzális rendszert *kauzális szűrő*nek is nevezzük a továbbiakban ezek tulajdonságaival foglalkozunk.

Feladat:

Adott egy diszkrét idejű rendszer és a bemeneti sorozat X(f)spektruma, valamint a kimeneti Y(f) spektrum az alábbi alakban:



$$\tilde{Y}(f) = 0{,}2 \cdot \tilde{X}(f - f_1) + 1 \cdot \tilde{X}(f - f_2) + 0{,}5 \cdot \tilde{X}(f - f_3)$$

A kérdés az, hogy kauzális-e ez a rendszer?

Megoldás:

$\tilde{Y}(f) = \left(0{,}2 \cdot \delta(f - f_1) + 1 \cdot \delta(f - f_2) + 0{,}5 \cdot \delta(f - f_3)\right) * \tilde{X}(f)$ alakban írható föl. Ha a konvolúció első tényezőjét *G*(f)-fel jelöljük, akkor $\tilde{Y}(f) = \tilde{G}(f) * \tilde{X}(f)$. Ilyen alakú leírása csak a lineáris memóriamentes rendszereknek van. A memóriamentes rendszerek halmazáról pedig tudjuk, hogy triviális részhalmaza a kauzális rendszerek halmazának.

2.5.1 Lineáris, invariáns és kauzális rendszerek leírása az idő tartományban

Lineáris rendszerek időtartománybeli rendszeregyenletét az $s_{n,m}$ kétdimenziós sorozattal írjuk le:

$$y_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{n,m} \cdot x_m$$

Ha a rendszer kauzális, akkor $s_{n,m} = 0$, ha $m > n$.

Ha a rendszer invariáns is, akkor az időtartománybeli rendszeregyenlet felírható az egydimenziós $h_n = s_{0,n}$ impulzusválasz sorozattal:

$$y_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{n-m} \cdot x_m = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m \cdot x_{n-m} = \sum_{m=\mathbf{0}}^{\infty} h_m \cdot x_{n-m},$$

mert a kauzalitás miatt $h_m = 0$, ha $m < 0$ (kauzális rendszerek impulzusválasza csak belépő lehet).

2.5.2 Valós kauzális szűrők a frekvencia tartományban

Mivel a kauzalitás a realizálhatóság szempontjából nagyon fontos tulajdonság, vizsgáljuk meg, hogyan dönthető el egy adott *H*(f) komplex frekvenciaátviteli karakterisztikáról, hogy kauzális rendszert ír-e le.

Tétel:

Legyen egy lineáris invariáns és valós rendszer komplex átviteli karakterisztikája valós és képzetes rézsre felbontva:

$$\tilde{H}_{1/T}(f) = \tilde{R}_{1/T}(f) + j\tilde{I}_{1/T}(f).$$

A rendszer akkor kauzális, ha

$$\tilde{I}_{1/T}(f) = -\text{ctg}(\pi\ f\ T) * \tilde{R}_{1/T}(f).$$

azaz a valós és képzetes részek nem függetlenek, a képzetes részt megkapjuk a valós rész és a cotangens függvény periodikus konvolúciójaként (a frekvenciakarakterisztika valós és képzetes része egymásnak Hilbert transzformáltja).

Bizonyítás:

Legyen a rendszer (valós) impulzusválasz sorozata h_n, amely felbontható egy páratlan és egy páros részsorozat összegére:

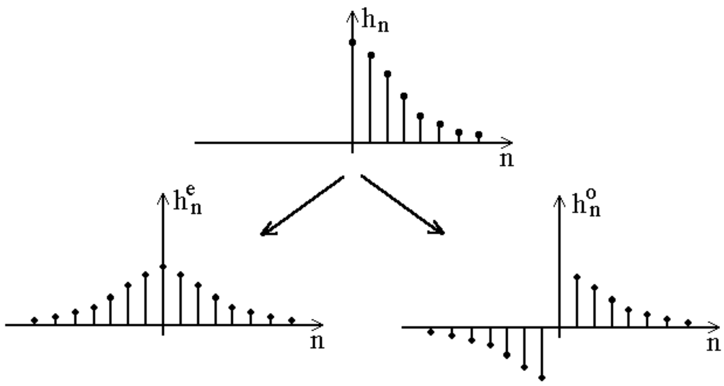
$$h_n = h_n^e + h_n^o,$$

ahol $h_n^e = \frac{1}{2}(h_n + h_{-n})$ és $h_n^o = \frac{1}{2}(h_n - h_{-n})$.

Kauzális rendszerek esetén: $h_n = 0$, ha $n < 0$, ezért a h_n^e és h_n^o között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$h_n^o = \text{sign}(n) \cdot h_n^e,$$

ahol $\text{sign}(n) = \begin{cases} -1, & \text{ha } n < 0 \\ 0, & \text{ha } n = 0 \\ 1, & \text{ha } n > 0 \end{cases}$



A Fourier-transzformáció tulajdonságai alapján, mivel h_n valós, $\tilde{R}(f) = \boldsymbol{F}\{h_n^e\}$ és $\tilde{I}(f) = \boldsymbol{F}\{h_n^o\}$

Figyelembe véve a h_n^e és a h_n^o közötti kapcsolatot,

$\tilde{I}(f) = \boldsymbol{F}\{\text{sign}(n)\} * R(f)$

A sign(n) Fourier-transzformáltját a sign(t) folytonos idejű függvény Fourier-transzformáltjának 1/T periódusú periodikus kiterjesztésével kapjuk. Fourier-transzformációs táblázatok alapján:

$\mathrm{sign(t)} \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{j}2\pi \mathrm{f}}$. Ennek a periodikus kiterjesztése $-\mathrm{j}\cdot\mathrm{ctg}(\pi \mathrm{fT})$ (ez a ctg(x) függvény sorfejtése alapján látható be).□

Megjegyzés:

A szignum és a hiperbola függvény közötti Fourier-transzformációs kapcsolat van szó a korábban említett Hilbert-transzformációnál is. Egy folytonos x(t) függvény Hilbert-transzformáltja:

$\mathrm{y(t)} = \boldsymbol{H}\{\mathrm{x(t)}\} \equiv \frac{1}{\mathrm{t}} * \mathrm{x(t)}$. Az így kapott y(t) függvény spektruma: $Y(\mathrm{f}) = -\mathrm{j}\cdot\mathrm{sign(f)}\cdot X(\mathrm{f})$.

2.5.3 Kauzalitás szűrők transzfer függvénye

Mivel kauzális szűrő H(z) transzfer függvénye kauzális h_n impulzus válasz sorozat Z-transzformáltja - mely h_n a negatív indexek felett azonos nullával és ezért H(z) konvergencia tartományát kívülről korlátozó konvergencia sugár végtelen - ezért H(z) konvergens kell legyen a z-sík végtelen távoli pontjában. Ha z = ∞-ben H(z) nem analitikus, mert például pólusa van ott, vagy nem korlátos az értéke, akkor a szóban forgó rendszer nem kauzális.

Ha adott egy H(z) transzfer függvény, mint pl. a korábbi példa szerinti $\mathrm{H}(z) = \frac{z+1}{(z-2)\cdot(z-0{,}5)}$, akkor ezzel még nem definiáltuk a rendszert egyértelműen. Ugyanis z-transzformált csak egy körgyűrű fölött analitikus függvény lehet. A példa szerinti H(z) pedig 3 tartományban lehet analitikus: I. $|z| < 0{,}5$, II. $0{,}5 < |z| < 2$, III. $\boxed{|z| > 2}$. Mivel a konvergencia körök külső korlátja függ a jelek múltbeli viselkedésétől, ezért kauzális rendszer esetén H(z) konvergencia tartományának a végtelent is tartalmaznia kell. Vagyis a példa szerinti 3 rendszer közül csak az a kauzális rendszer, amelyik a legnagyobb abszolút értékű póluson kívül analitikus (III.)

2.6 Stabilitás

A stabilitás négyféle definíciója:

(1) Egy rendszer akkor stabilis, ha korlátos bemenetre korlátos választ ad (BIBO stabilitás, Bounded Input, Bounded Output):

ha $|\mathrm{x_n}| < K_x < \infty$ ($\forall$n-re) $\rightarrow \exists K_y$: $|\mathrm{y_n}| < K_y < \infty$.

(2) Egy *lineáris* és *invariáns* rendszer stabilis, ha impulzusválasz sorozata abszolút összegezhető:

$$\sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} |\mathrm{h_n}| = A < \infty .$$

(3) Stabil az a rendszer, amely véges energiájú bemenetre véges energiájú jellel válaszol:

ha $\sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} |\mathrm{x_n}|^2 = E_x < \infty$ ($\forall$n-re) $\rightarrow \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} |\mathrm{y_n}|^2 = E_y < \infty$.

(4) Egy *lineáris, invariáns* rendszer stabil, az impulzusválasz sorozata négyzetesen összegezhető:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_n|^2 = E_h < \infty .$$

Megjegyzések:

– Az 1-es és a 2-es definíció lineáris és invariáns rendszereknél ekvivalens egymással. Ugyanis minden korlátos sorozat majorálható egy konstans sorozattal, $x_n = c \cdot 1$ $\forall$n-re, $c \in \mathbf{R}$. Ekkor $y_n = x_n * h_n = c \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{n-m}$, amely akkor korlátos, ha $\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_m| < A < \infty$.

– Az első két definíció szerinti stabilitást A típusú stabilitásnak nevezzük, és a gyakorlatban ha stabilitásról beszélünk, akkor erre kell gondolni.

– A 3. és a 4. definíció szerinti stabilitást B típusú stabilitásnak nevezzük. Ez egy enyhébb megszorítást jelent a rendszerre nézve. Az A típusú stabil rendszerek halmaza részhalmaza a B típusú stabil rendszerek halmazának.

– Véges erősítésű memória mentes rendszerek mindig stabilak, a fenti definíciók bármelyikének értelmében.

– Nem lineáris vagy nem invariáns rendszerek stabilitásával a továbbiakban nem foglalkozunk.

– További pontok lineáris szűrök stabilitásának frekvencia és operátor tartománybeli kérdéseivel foglalkoznak.

2.6.1 Stabilitás a z-tartományban

A $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \cdot z^{-n}$ ($z \in R$) átviteli függvénnyel leírható rendszer akkor stabil, ha $\{z, |z| = 1\} \subset R$, vagyis H(z) analitikus az egységsugarú kör felett (H(z) konvergenciatartománya tartalmazza az egységsugarú kört).

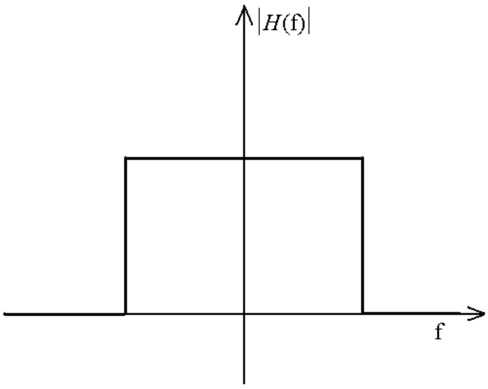
Ha rendszer kauzális, azaz R egy origó körüli körön kívüli tartomány, akkor H(z)-nek az egységkörön kívül nem lehet szingularitása. Máskülönben a H(z) legkülső konvergenciagyűrűje nem tartalmazná az egységkört.

2.6.2 Stabilitás a frekvenciatartományban

A *H*(f) frekvenciaátviteli függvényt úgy kapjuk, hogy vesszük a H(z) $z = e^{j2\pi fT}$ egységkörre vonatkozó kontúrfüggvényét. Mivel a rendszert akkor tekintjük stabilnak, ha H(z) analitikus az egységkör fölött, ebből az következik, hogy a $H(f) = H(z = e^{j2\pi fT})$ függvény folytonos és differenciálható minden f frekvencián.

Megjegyzés:

Az ideális aluláteresztő szűrő nem stabil rendszer, mert *H*(f) abszolút értéke nem folytonos ⇒ nem differenciálható.



2.7 FIR rendszer

Definíciók az időtartományban:

FIR (Finite Impulse Response; azaz véges impulzus válaszú) a rendszer, ha véges tartójú bemenetre véges tartójú választ ad. Ha a rendszer nem FIR akkor IIR (Infinite Impulse Response).

A lineáris rendszer FIR, ha $s_{m,n}$ kétdimenziós rendszerjellemzőjének minden oszlopában véges sok nem nulla van, azaz ha minden eltolt egységsorozatra adott válasza véges tartójú.

A lineáris, invariáns rendszer FIR rendszer (FIR szűrő) , ha a δ_n egység sorozatra adott h_n válasz sorozata véges tartójú (véges sok tagja nem nulla).

2.7.1 Lineáris, invariáns FIR rendszer transzfer függvénye

A lineáris, invariáns, FIR rendszer h_n impulzus válasz sorozata véges tartójú, tehát a véges sok nem nulla elem közt van legkisebb (m) és legnagyobb (M) indexű, tehát a H(z) transzfer függvénye véges tagú összeg, ilyen értelemben z-nek véges tagú Laurent polinomja (negatív és pozitív hatványok is előfordulhatnak), mely z megfelelő hatványával való szorzás erejéig mindig átírható z vagy z^{-1} (M-m)-ed fokú **polinomj**ává:

$$H(z) = \sum_{i=m}^{M} h_i z^{-i} = z^{-m} \sum_{i=0}^{M-m} h_{i+m} z^{-i} = z^{-m} \sum_{i=0}^{M-m} \alpha_i z^{-i} = z^{-m}\, \alpha(z^{-1}), \qquad \alpha_i = h_{m+i},\ i = 0...(M-m)$$

$$H(z) = \sum_{i=m}^{M} h_i z^{-i} = z^{-M} \sum_{i=0}^{M-m} h_{M-i} z^{i} = z^{-M} \sum_{i=0}^{i=M-m} a_i z^{i} = z^{-M}\, A(z), \qquad a_i = h_{M-i},\ i = 0...(M-m)$$

ahol tehát α( ) és A( ) (M-m)-ed fokú polinomok, melyek együtthatói a h_n sorozat ellentétes irányú felsoroltjaival egyeznek meg:

$$\alpha_i = a_{M-m-i}\ ,\ i = 0...(M - m)$$

és melyek gyökei egymásnak inverzei.

Tehát FIR szűrő H(z) transzferfüggvényét (origóbeli M darab pólus (esetleg zérus, ha az M maximális nem nulla idő-index negatív volt) erejéig nem egyértelműen) mindig meghatározza az (M-m)-ed fokú A(z) polinom, illetve ennek a z síkon található (M-m) darab gyöke, azaz a FIR szűrő nem triviális (nem origó-beli) **zérusa**i.

2.7.2 Kauzális FIR szűrő

A kauzalitásból következik, hogy lineáris és invariás rendszer (szűrő) h_n impulzus válasz sorozatának nem lehet negatív indexű nem nulla tagja. Tehát a legkisebb nem negatív m indexre írhatjuk: $m \geq 0$.

Az általánosság megszorítása nélkül a továbbiakban kauzális FIR szűrőre feltételezzük, hogy m = 0. (Ha szükséges nulla értékekkel kibővíthetjük a nem nulla h_n értékek intervallumát.) Tehát kauzális szűrőre:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{i=M} h_i z^{-i} = \sum_{i=0}^{i=M} \alpha_i\ z^{-i} = \alpha(z^{-1}) = z^{-M} \sum_{i=0}^{i=M} a_i\ z^{i} = z^{-M}\ A(z)$$

ahol $\alpha_i = h_i$, $a_i = h_{M-i}$, i = 0 ... M

továbbá $\alpha(\ )$ és A( ) M-ed fokú polinomok.

2.7.3 Szimmetrikus FIR szűrő

Ha az előző pont kauzális szűrőjére igaz, hogy

$\alpha(z) = A(z)$, azaz $\alpha_i = a_i$, i = 0 ... M

akkor ebből lényeges következmények adódnak.

Egyrészt ez a h_n impulzus válasznak a közepére szimmetrikus tulajdonságát jelenti:

$h_i = h_{M-i}$, i = 0 ... M

másrészt ez igaz az $\alpha(\ )$ és A( ) polinomok együtthatóira is:

$\alpha_i = \alpha_{M-i}$, $a_i = a_{M-i}$, i = 0 ... M

továbbá igaz, hogy

$A(z^{-1}) = z^{-M} A(z)$,

amiből következik, hogy ha q gyöke A(z)-nek akkor 1/q is gyöke, továbbá valós együtthatók esetén $1/q^*$ is gyöke. (* a konjugálást jelenti)

A fenti tulajdonság mellett az is igaz, hogy az ilyen FIR rendszer fázis karakterisztikája a frekvenciának lineáris függvénye. Ennek belátására az ARMA rendszerek ismertetése után kerül sor.

2.8 Az ARMA rendszer

2.8.1 Definíció, polinomok, együtthatók, zérusok, pólusok

Definíció (az operátor tartományban):

Az *ARMA* (auto-regressive, moving-average) rendszer olyan lineáris és invariáns rendszer, amelynek H(z) átviteli függvénye racionális törtfüggvény, azaz véges tagból alló Laurent polinomok (általában a z változó pozitív és negatív kitevőjű tagjai is lehetnek).

Az ARMA rendszer számláló polinomjának együtthatóit MA együtthatóknak, a nevező polinom együtthatóit AR együtthatóknak nevezzük.

Az ilyen törtfüggvényeket sokféle alakban fel lehet írni, attól függően, hogy a számláló vagy nevező mely tagjára vonatkozóan normalizálunk (mely taggal, vagy együtthatóval oszjuk a számlálót és nevezőt).

Ha az általános alakú racionális tört számlálóját és nevezőjét végig osztjuk a nevező legnagyobb kitevőjű tagjával és a számlálóból kiemeljük annak legnagyobb hatványát, akkor kapjuk az alábbi z^{-1} szerint kanonikus alakot, ahol a nevezőben és a számlálóban

z^{-1} szerinti $\alpha(z^{-1})$ és $\beta(z^{-1})$ polinomjait kapjuk:

$$H(z) = \frac{z^{-m}\,\alpha(z^{-1})}{\beta(z^{-1})} = \frac{\sum_{i=m}^{M} \alpha_{m-i} z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} \beta_i z^{-i}} = \frac{z^{-m} \sum_{i=0}^{M-m} \alpha_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N} \beta_i z^{-i}}, \qquad \beta_0 = 1,\ \ N \ge 0,\ \ M \ge m.$$

ahol N a nevező fokszáma, m ill. M pedig z^{-1} –nek számlálóbeli legkisebb ill. legnagyobb előforduló fokszámai.

H(z) másik szokásos alakját úgy kapjuk meg, hogy a törtet a nevező legkisebb kitevőjű tagjára normáljuk (($\beta_N.z^{-N}$)-nel végig osztjuk a számlálót és nevezőt). Ekkor a nevezőt és számlálóját z nem negatív hatványai szerinti polinomokkal írhatjuk fel:

$$H(z) = z^{N-M} \frac{A(z)}{B(z)} = z^{N-M} \frac{\sum_{j=0}^{M-m} a_j z^j}{\sum_{i=0}^{N} b_i z^i}, \qquad N \ge 0,\ \ M \ge m$$

ahol $b_i = \beta_{N-i} / \beta_N$, i = 0 ... N és $a_i = \alpha_{N-i} / \beta_N$, i = 0 ... (M –m).

Kauzális ARMA szűrő:

Mint korábban láttuk, kauzális szűrő impulzus válasz sorozata belépő sorozat, ezért H(z) transzferfüggvényének konvergencia tartománya tartalmazza a z sík végtelen távoli pontját, azaz analitikus $z = \infty$ -ben. Törtfüggvény ott nem analitikus, ahol pólusa van, ott nem korlátos. $z = \infty$ -ben egy polinom domináns része (aszimptótája) a legnagyobb kitevőjű tagja, racionális tört aszimptótája a számláló és a nevező legnagyobb kitevőjű tagjainak hányadosa.

Tehát kauzális ARMA rendszer számlálója nem lehet nagyobb fokszámú (z-ben), mint a nevezője. H(z) mindkét korábbi alakjában ez azt jelenti, hogy m ≥ 0. Az általánosság megszorítása nélkül a továbbiakban kauzális ARMA szűrőre feltételezzük, hogy m = 0. (Ha szükséges nulla értékekkel kibővíthetjük a számláló nem nulla értékű tagjainak intervallumát.) Tehát kauzális ARMA szűrőre a transzfer függvény lehetséges alakjai:

$$H(z)=\frac{\alpha(z^{-1})}{\beta(z^{-1})}=\frac{\sum_{i=0}^{M}\alpha_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{N}\beta_i z^{-i}}\ , \qquad \beta_0 = 1,\quad N, M \geq 0.$$

és

$$H(z)=z^{N\text{-}M}\,\frac{A(z)}{B(z)}= z^{N\text{-}M}\,\frac{\sum_{j=0}^{M}a_j z^{j}}{\sum_{i=0}^{N}b_i z^{i}}\ , \qquad N, M \geq 0,$$

ahol $b_i = \beta_{N-i} / \beta_N$, i = 0 ... N és $a_i = \alpha_{N-i} / \beta_N$, i = 0 ... M.

Az M-ed fokú A(z) polinomnak illetve az N-ed fokú B(z) polinomnak az algebra alaptétele értelmében a komplex síkon van M illetve N gyöke, melyek a H(z) transzfer függvénynek az a_i együtthatóitól (moving average; mozgó átlagú együtthatók) függő q_i zérusai illetve a b_i együtthatóitól (autoregressziv együtthatók) függő p_i pólusai. Kauzális ARMA szűrőnek mindig van annyi (az együtthatók értékeitől nem függő) zérusa vagy pólusa az origóban, hogy a pólusok és a zérusok száma végül megegyezzen.

Az ARMA rendszer fokszáma: max{M,N}.

Az ARMA rendszernek a nem origóbeli gyökeit, melyek a polinom együtthatóktól függnek, nem triviális gyököknek nevezzük. A polinom együtthatóktól nem függő, pusztán a polinom fokszámok általmeghatározott számú és típusú (zérus vagy pólus) gyökök mindig az origóban vannak, ezeket triviális gyököknek nevezzük.

Az A(z) és B(z) polinom, gyökei alapján felírható szorzat alakban is, így kapjuk az ARMA rendszer átviteli függvényének pólus-zérus alakját:

$$H(z)=z^{N\text{-}M}\,\frac{A(z)}{B(z)}=z^{N\text{-}M}\,\frac{a_M}{b_N}\,\frac{\cdot\prod_{i=1}^{M}(z-q_i)}{\cdot\prod_{j=1}^{N}(z-p_j)}.$$

A z^{-1} függvényében felírt gyöktényezős alak:

$$H(z)=\frac{\alpha(z^{-1})}{\beta(z^{-1})}=\alpha_0\frac{\cdot\prod_{i=1}^{M}(1-q_i\cdot z^{-1})}{\prod_{j=1}^{N}(1-p_j\cdot z^{-1})}.$$

Megjegyzés:

– Egy ARMA rendszert a pólusai és a zérusai (egy konstanssal való szorzástól eltekintve) egyértelműen meghatározzák. Ezek alapján, az ARMA rendszereket pólus-zérus modelleknek is nevezik.

– Egy ARMA rendszer akkor valós, ha az együtthatói is valósak $\Rightarrow$ gyökei valósak vagy konjugált-komplex párok.

2.8.2 AR rendszer, all-pole modell

Azokat az ARMA rendszereket, amelyek H(z) törtfüggvényének számlálója nulladfokú AR (auto-regressive) vagy all-pole rendszereknek nevezzük. Nincsenek nem triviális zérusai:

$$H(z)=\frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})}=\frac{a_0}{1+b_1\cdot z^{-1}+\ldots+b_N\cdot z^{-N}}=\frac{a_0\cdot z^N}{z^N+b_1\cdot z^{N-1}+\ldots+b_N}$$

$\Rightarrow$ Az origóban van egy N-szeres zérus.

Ha H(z) kauzális, stabil ARMA rendszert ír le, akkor pólusainak az egységkörön belül kell elhelyezkednie.

Az kauzális AR rendszer impulzusválasza:

$h_n=\boldsymbol{Z}^{-1}\{H(z),\ |z|>\max|p_i|\}$ (p_i-k a rendszer pólusai), amely meghatározható H(z) csökkenő sorrendbe rendezett polinom osztásával $\rightarrow$ $H(z) = a_0 - a_0\cdot b_1\cdot z^{-1} + \ldots\ \ldots$

Az ilyen típusú polinom osztásnak sosincs vége, végtelen sort kapunk, tehát az AR rendszer impulzusválasza végtelen tartójú (infinite impulse response), ezért az AR rendszereket IIR (nem véges impulzusválaszú) rendszerek.

2.8.3 MA rendszer, all-zero modell (FIR)

Az ARMA rendszerek másik nevezetes osztálya, amikor a $H(z)=\frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})}$ rendszerjellemző a z^{-1} változónak polinomja.

$$H(z)=A(z^{-1})=a_0+a_1\cdot z^{-1}+\ldots+a_M\cdot z^{-M}=\frac{a_0\cdot z^M+a_1\cdot z^{M-1}+\ldots+a_M}{z^M}$$

Csak nem triviális zérusai vannak,pólusai mind az origóban vannak. Az ilyen kauzális ARMA rendszereket MA vagy all-zero rendszereknek nevezzük.

Az MA rendszer impulzusválasza:

$\mathrm{h_n} = \boldsymbol{Z}^{-1}\{\mathrm{H}(z),\ |z| > 0\}$. Mivel $\mathrm{H}(z) = a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + \ldots + a_M \cdot z^{-M}$ sorfejtés véges, ezért $\mathrm{h_n}$ is véges tartójú lesz $\rightarrow \boxed{\mathrm{h}_n = a_n}$ (finite impulse response), ezért az MA rendszereket FIR rendszereknek is nevezzük.

2.8.4 ARMA szűrő időtartományi rendszer egyenlete

Az előző pontban adott z-tartományi definíció és a racionális tört alapján írhatjuk:

$$\mathrm{H}(z) = \frac{\mathrm{Y(z)}}{\mathrm{X(z)}} = \frac{\sum_{\mathrm{i=m}}^{\mathrm{M}} \alpha_{\mathrm{i}}\, \mathrm{z}^{-\mathrm{i}}}{\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{N}} \beta_{\mathrm{i}} \mathrm{z}^{-\mathrm{i}}} \quad , \qquad \beta_0 = 1, \quad \mathrm{N} \ge 0, \ \ \mathrm{M} \ \ge \mathrm{m}.$$

azaz

$$\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{N}} \beta_{\mathrm{i}} \mathrm{z}^{-\mathrm{i}} \mathrm{Y(z)} = \sum_{\mathrm{i=m}}^{\mathrm{M}} \alpha_{\mathrm{i}} \mathrm{z}^{-\mathrm{i}} \mathrm{X(z)} \ , \qquad \beta_0 = 1, \quad \mathrm{N} \ge 0, \ \ \mathrm{M} \ \ge \mathrm{m}.$$

Inverz z-transzformáció után kapjuk:

$$\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{N}} \beta_{\mathrm{i}} \mathrm{y}_{n-i} = \sum_{\mathrm{i=m}}^{\mathrm{M}} \alpha_{\mathrm{i}} \mathrm{x}_{\mathrm{n-i}} \ , \qquad \beta_0 = 1, \quad \mathrm{N} \ge 0, \ \ \mathrm{M} \ \ge \mathrm{m}.$$

Tehát az időtartománybeli lehetséges definició: ARMA rendszer az, melyre a bemeneti sorozat eltoltjainak MA együtthatókkal vett lineárkombinációja egyenlő a kimeneti sorozat AR együtthatókkal vett lineárkombinációjával.

A fenti általános időtartományi rendszer egyenlet mindig átírható az alábbi **rekurzív** egyenletbe:

$$\mathrm{y}_n = \sum_{\mathrm{i=m}}^{\mathrm{M}} \alpha_{\mathrm{i}} \mathrm{x}_{\mathrm{n-i}} - \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{N}} \beta_{\mathrm{i}} \mathrm{y}_{n-i} \ , \qquad \mathrm{N} \ge 0, \ \ \mathrm{M} \ \ge \mathrm{m}.$$

A mindenkori kimeneti minta egyenlő a bemeneti minták MA együtthatók szerinti és a korábbi kimeneti minták AR együtthatók szerinti lineárkombinációjával.

2.8.5 Az ARMA rendszer pólus-zérus elrendezése és amplitúdó- és fáziskarakterisztikája közötti kapcsolat

A komplex H(f) átviteli frekvencia karakterisztika és az amplitúdó- és a fáziskarakterisztikák közti kapcsolat:

$$H(\mathrm{f}) = A(\mathrm{f}) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\mathrm{f})}$$

azaz

$$A(\mathrm{f}) = |H(\mathrm{f})| \text{ és } \varphi(\mathrm{f}) = \mathrm{arc}(H(\mathrm{f})).$$

Induljunk ki H(z) gyöktényezős alakjából, majd a frekvencia függvényre való áttérésnél használjuk a $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}}$ helyettesítést:

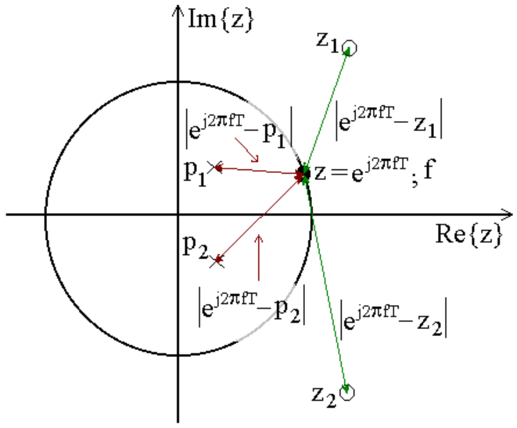
- $A(\mathrm{f}) = \left|\mathrm{H}\left(z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}}\right)\right| = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(\mathrm{N-M})\mathrm{Tf}}\,\frac{\mathrm{a_M}}{\mathrm{b_N}} \cdot \left|\frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - \mathrm{q}_1\right)\cdot\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - \mathrm{q}_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - \mathrm{q_M}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - \mathrm{p}_1\right)\cdot\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - \mathrm{p}_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - \mathrm{p_N}\right)}\right|$

Mivel egy szorzat abszolút értéke egyenlő a tényezők abszolút értékének szorzatával,

$$A(\mathrm{f}) = \left|\mathrm{H}\left(z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}}\right)\right| = \left|\frac{\mathrm{a_M}}{\mathrm{b_N}}\right| \cdot \frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - \mathrm{q}_1\right|\cdot\left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - \mathrm{q}_2\right|\cdot\ldots\cdot\left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - \mathrm{q_M}\right|}{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - \mathrm{p}_1\right|\cdot\left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - \mathrm{p}_2\right|\cdot\ldots\cdot\left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - \mathrm{p_N}\right|},$$

azaz, az abszolút érték karakterisztika a gyöktényezőkhöz tartozó frekvenciafüggő tényezők szorzata, hányadosa.

Egy gyöktényező abszolút értéke az egységkör f frekvenciájú ($z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}}$) pontja és a gyöktényező közötti távolság lesz:



Ezzel a rendszer eredő abszolút érték karakterisztika értékét egy f frekvencián úgy kapjuk, hogy a számlálóban lévő gyöktényezők abszolút értékének szorzatát, azaz a zérusokhoz húzott szakaszok hosszának szorzatát elosztjuk a nevezőben lévő gyöktényezőinek abszolút értékeinek szorzatával, azaz a pólusokhoz húzott szakaszok hosszainak szorzatával.

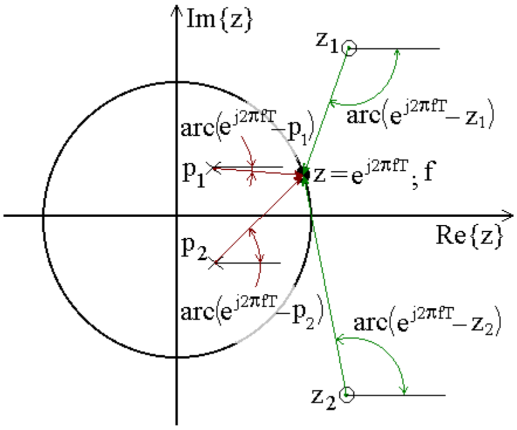
• Ha $H(z) = z^{N\text{-}M} \frac{a_M}{b_N} \frac{A(z)}{B(z)}$, akkor

$$\varphi(f) = \mathrm{arc}\left(H\left(z = e^{j2\pi fT}\right)\right) = \mathrm{arc}\left(\frac{a_M}{b_N}\right) - 2\pi\ (N - M)Tf + \mathrm{arc}\left(A\left(z = e^{j2\pi fT}\right)\right) - \mathrm{arc}\left(B\left(z = e^{j2\pi fT}\right)\right).$$

A számláló szöge a számlálóban lévő gyöktényezők szögének összege, míg a nevező szöge nevezőben lévő gyöktényezők szögének összege lesz:

$$\varphi(f) = \mathrm{arc}\left(\frac{a_M}{b_N}\right) - 2\pi\ (N - M)Tf + \sum_{i=1}^{M} \mathrm{arc}\left(e^{j2\pi fT} - q_i\right) - \sum_{j=1}^{M} \mathrm{arc}\left(e^{j2\pi fT} - p_j\right).$$

Egy gyöktényező szöge az adott gyöktényezőből húzott az egységkör f frekvenciájú ($z = e^{j2\pi fT}$) pontján áthaladó félegyenes és az abszcissza által bezárt szög:



Megjegyzés:

Azokat a rendszereket, amelyeknél a $H(z^{-1})$ számlálója 0-adfokú, vagyis

$$H(z) = \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}}$$, AR (auto-regressive) rendszereknek nevezzük.

Azokat, amelyeknek a nevezője 0-adfokú MA (moving-average) rendszereknek hívjuk:

$$H(z) = \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} = a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_M z^{-M}.$$

2.8.6 Nevezetes alappéldák ARMA rendszerekre

Példaként az eddigi meggondolások alapján végezzük el néhány egyszerű, de nevezetes alapeset analízisét.

Comb Filter

Legyen a mindenkori kimenet az aktuális bemenet és az N mintával korábbi bemenet különbsége:

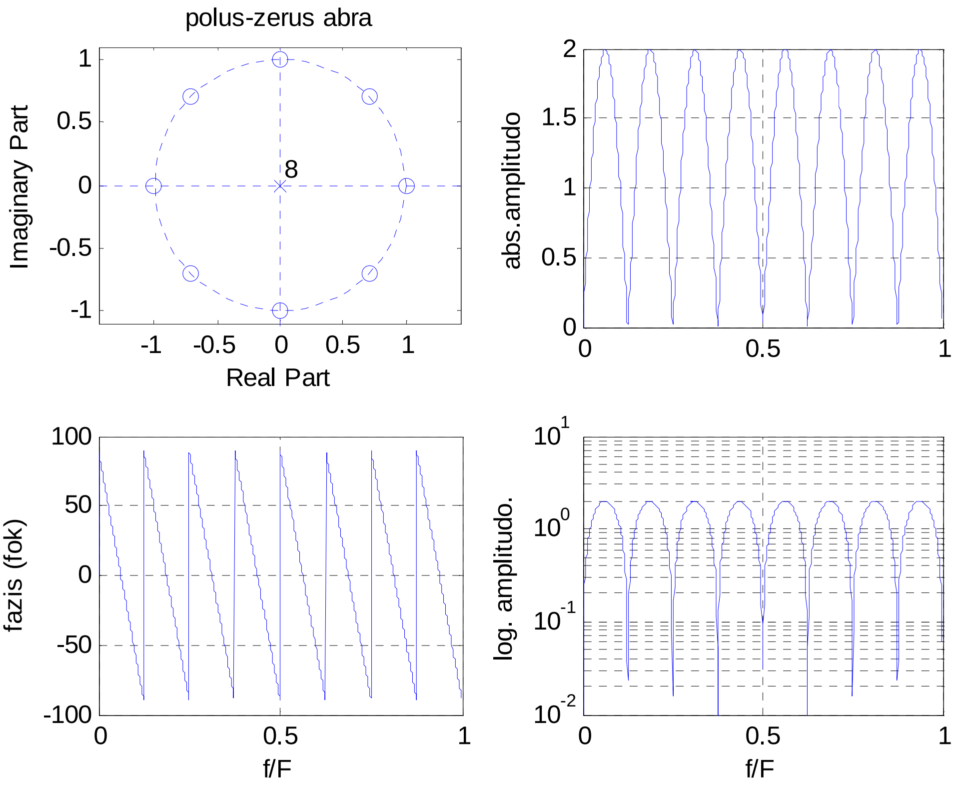
$$y_n = x_n - x_{n-N}$$

A nyilvánvalóan lineáris és invariáns ARMA és FIR rendszer transzfer függvénye:

$$H(z) = 1 - z^{-N}.$$

Legyen N=8, és rajzoljuk fel H(z) pólus-zérus elrendezését! A rendszernek csak nemtriviális zérusai vannak, melyek az N-ed rendű egységgyökök.

Ennek alapján láthatjuk, hogy az amplitúdó karakterisztikának is zérusai lesznek $f_i = i\frac{F}{N}, i = 0...(N-1)$ frekvenciáknál, továbbá a pólus-zérus elrendezés $360^o/N$ elforgatás szimmetriájából látható, hogy a frekvencia karakterisztikák F-N szerint periodikusak lesznek.



A fáziskarakterisztika egyrészt lineáris, másrészt megjelennek a π értékű ugrások, melyek a valós amplitúdó null-helyeinél tapasztalható előjelváltozásoknak felelnek meg.

Mivel az amplitúdó karakterisztika "fésű alakú" az ilyen típusú szűrőt fésűszűrőnek vagy comb filternek nevezzük.

Blokkos átlagolás:

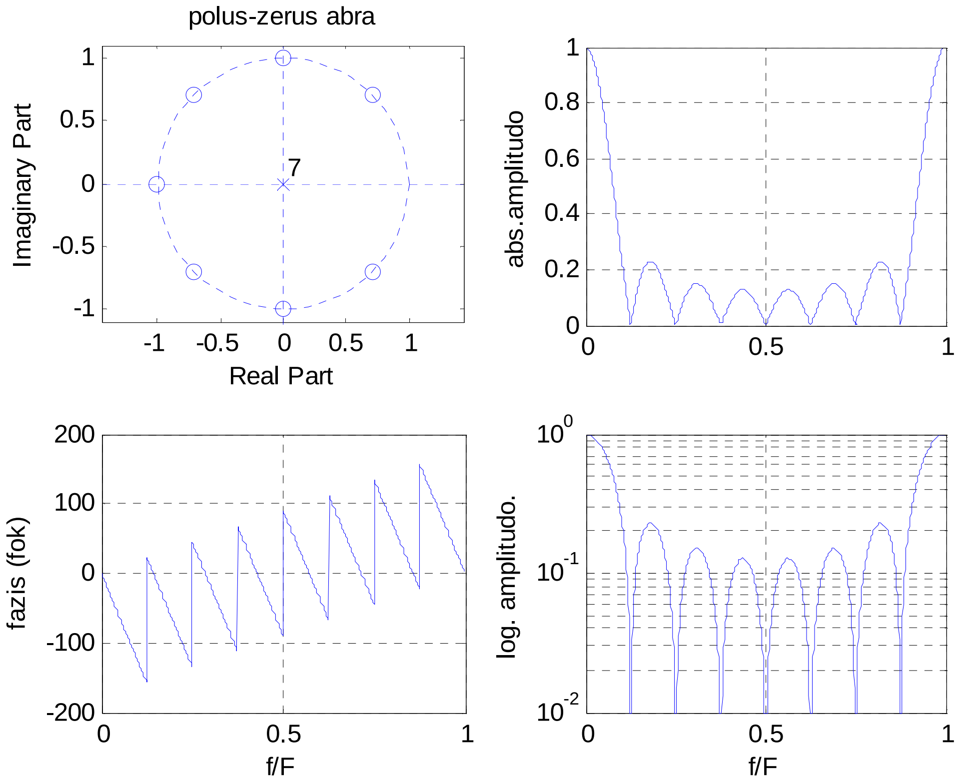
Legyen az mindenkori kimenet az utolsó N darab bemeneti minta átlaga:

$$y_n = \frac{1}{N}(x_n + +x_{n-1} + x_{n-2} \ ... + x_{n-(N-1)})$$

A nyilvánvalóan lineáris és invariáns ARMA és FIR rendszer transzfer függvénye:

$$H(z) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} = \frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \, .$$

A gyököket tekintve látjuk, hogy az N-ed rendű egységgyökök közül a z=1 kiesik, tehát marad a többi N-1 egységgyök, melyekhez tartozó amplitúdó karakterisztikának $f_i = i\frac{F}{N}, i = 1...(N-1)$ frekvenciáknál zérusa van, es f=0-ban van maximum.



Exponenciális átlagolás:

Az x_i minták w_i súlyokkal vett súlyozott átlaga az alábbit jelenti:

$$x_{atlag} = \frac{\sum_i w_i x_i}{\sum_i w_i}$$

Ha a súlyok egy w alap $w_i = w^i$ hatványai szerint i= 0...∞ adottak, akkor exponenciális átlagolásról beszélünk, ha a kimeneti minta a korábbi bemeneti minták exponenciálisan súlyozott átlaga, akkor a rendszer differencia egyenlete:

$$y_n = \frac{1}{1-w}(x_n + wx_{n-1} + w^2 x_{n-2} \ \ldots) = \frac{1}{1-w}\sum_{i=0}^{\infty} w^i x_{n-i}$$

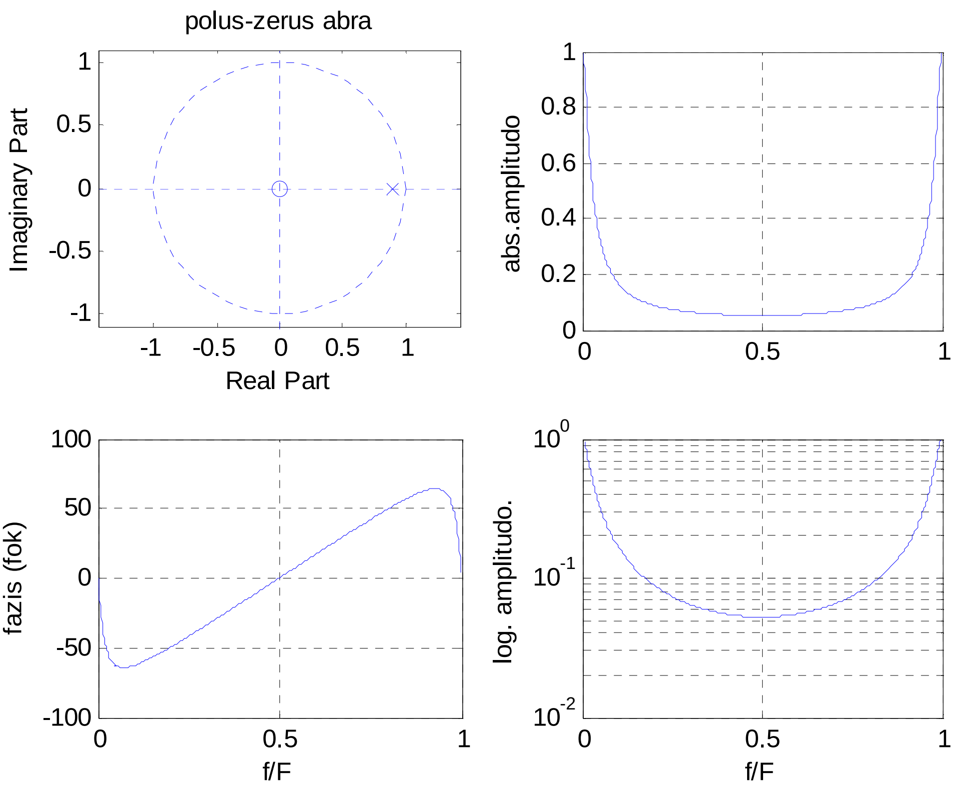
A definiciók alapján megállapítható, hogy ez a rendszer lineáris, invariáns, nem véges memóriájú (IIR). Ez a non-rekurzív differencia egyenlet nyilvánvalóan átírható az alábbi rekurzív alakba:

$$y_n = (1-w)\ x_n + w\ y_{n-1}$$

A differencia egyenletet Z-transzformálva és H(z)=Y(z)/X(z) –re megoldva kapjuk az exponenciális átlagoló transzferfüggvényét:

$$H(z) = (1-w)\frac{1}{1-wz^{-1}}.$$

Az exponenciális átlagolás, tehát egy pólust jelent z=w –nél. Az amplitúdó karakterisztika nyilvánvalóan monoton csökken (elsőfokú aluláteresztő IIR szűrő), maximuma *H*(f=0)=1 és minimuma *H*(f=F/2)=(1-w)/2.



Integrálás:

Útmutatás: A diszkrét idejű integrálás (akkumulálás) az exponenciális átlagolásnak w=1 -nél vett speciális esete (Z=1 nél, azaz f=0 –nál pólus, aluláteresztő jelleg).

Differencia képzés:

Útmutatás: A „comb filter” N=1 –re vett speciális esete (Z=1 nél, azaz f=0 –nál zérus, felüláteresztő jelleg).

Egyéb példák:

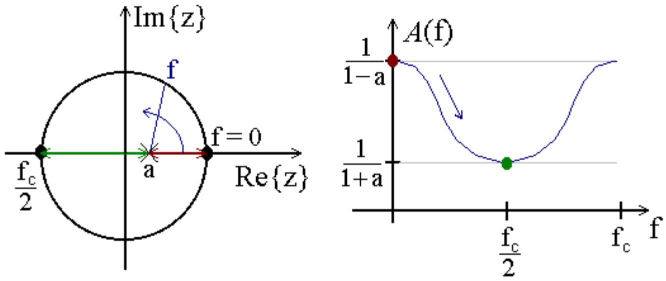
1. Vázoljuk fel a $\mathrm{H}(z)=\dfrac{1}{1-a\cdot z^{-1}}$, $|a|<1$ átviteli függvénnyel megadott rendszer amplitúdó karakterisztikáját

a, $a > 0$ és

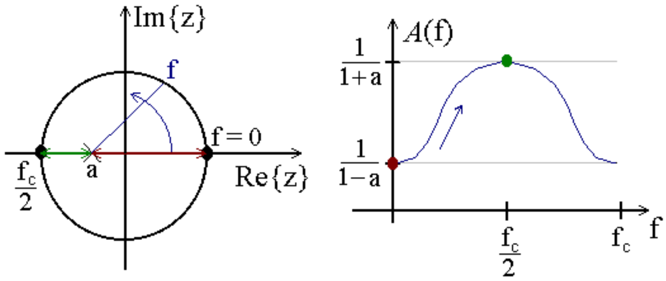
b, $a < 0$ esetén!

Megoldás:

a, Az amplitúdó karakterisztika alul-áteresztő jellegű lesz:



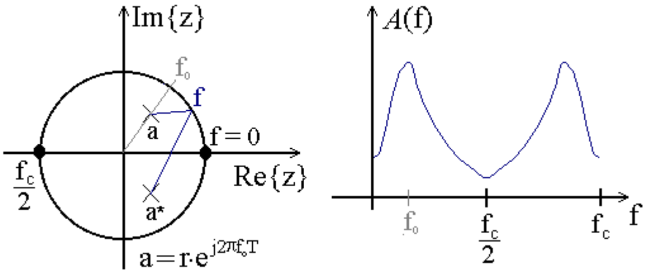
b, Az amplitúdó karakterisztika felül-áteresztő jellegű lesz:



2. Milyen a $\mathrm{H}(z)=\dfrac{1}{\left(1-a\cdot z^{-1}\right)\cdot\left(1-a^{*}\cdot z^{-1}\right)}$, $|a|<1$ átviteli függvényű rendszer amplitúdó karakterisztikája?

Megoldás:

Az amplitúdó karakterisztika sáváteresztő jellegű lesz,

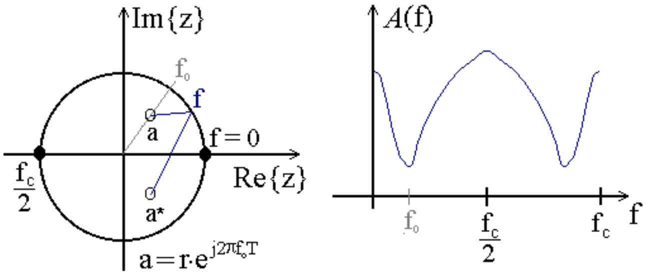


Ugyanis f_0 frekvencia környékén az *a* pólushoz tartozó gyöktényező abszolút értéke jelentősen lecsökken, míg az a^*-hoz tartozó gyöktényező abszolút értéke alig változik.

3. Hogy néz ki a $\mathrm{H}(z)=\left(1-a\cdot z^{-1}\right)\cdot\left(1-a^{*}\cdot z^{-1}\right)$ MA rendszer amplitúdó karakterisztikája?

Megoldás:

Az amplitúdó karakterisztika sávzáró (lyukszűrő) jellegű lesz:

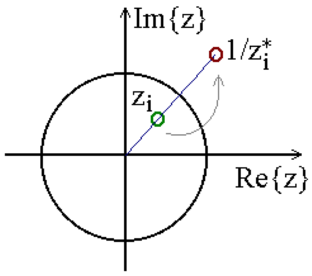


2.8.7 ARMA rendszerek gyökinverzióra vonatkozó invarianciája

Tétel:

Az ARMA rendszerek amplitúdó karakterisztikája a gyökinverzióra invariáns (egy konstans szorzótól eltekintve).
Ez azt jelenti, hogy nem változik az amplitúdó karakterisztika alakja, ha akár a pólusokat, akár a zérusokat invertáljuk.

A z_i gyök inverze alatt a $\frac{1}{z_i^*}$ -ot értjük:



Bizonyítás:

A bizonyítást végezzük úgy, hogy az eredeti $H_1(z)$-nek egy zérusát kicseréljük az inverzével:

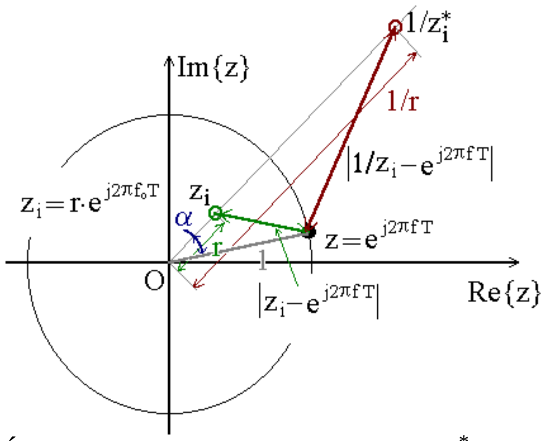
$$H_1(z) = \frac{\alpha(z)}{\beta(z)} = \frac{(z - z_i)\cdot\alpha'(z)}{\beta(z)} \quad \rightarrow \quad H_2(z) = \frac{(z - 1/z_i^*)\cdot\alpha'(z)}{\beta(z)}$$

Ekkor azt kell belátnunk, hogy

$\left|H_1(z = e^{j2\pi fT})\right| \overset{?}{=} K\cdot\left|H_2(z = e^{j2\pi fT})\right|$, vagyis behelyettesítve

$\left|e^{j2\pi fT} - z_i\right|\cdot\left|\frac{\alpha'(z = e^{j2\pi fT})}{\beta(z = e^{j2\pi fT})}\right| \overset{?}{=} K\cdot\left|e^{j2\pi fT} - \frac{1}{z_i^*}\right|\cdot\left|\frac{\alpha'(z = e^{j2\pi fT})}{\beta(z = e^{j2\pi fT})}\right|$, majd egyszerűsítve és átrendezve

$\frac{\left|e^{j2\pi fT} - z_i\right|}{\left|e^{j2\pi fT} - \frac{1}{z_i^*}\right|} \overset{?}{=} K$, ahol K konstans.



Írjuk föl a koszinusz-tételt az O-$(1/z^*_i)$-z háromszögre:

$$\left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - \frac{1}{z_i^*}\right|^2 = \left(\frac{1}{r}\right)^2 + (1)^2 - 2\frac{1}{r}\cdot 1\cdot\cos\alpha \quad \Big/ \cdot r^2$$

$$\left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - \frac{1}{z_i^*}\right|^2 \cdot r^2 = 1 + r^2 - 2r\cdot\cos\alpha\,,$$

majd az O-z_i-z háromszögre:

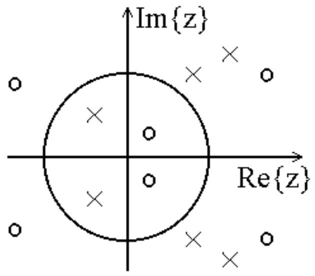
$$\left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - z_i\right|^2 = r^2 + 1 - 2r\cdot\cos\alpha\,.$$

Az előbbi két egyenletből

$$\frac{\left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - z_i\right|}{\left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}2\pi\mathrm{fT}} - \frac{1}{z_i^*}\right|} = r = K\,.$$ Tehát a két abszolút érték hányadosa valóban konstans. □

Feladat:

Tekintsük az alábbi pólus-zérus elrendezéssel definiált labilis ARMA rendszert. Mit kell tenni ahhoz, hogy stabil legyen, de amplitúdó karakterisztikája ne változzon?



Megoldás:

Az egységkörön kívül eső pólusokat tükrözzük az egységkörre. Ezzel az instabil gyököket lecseréltük stabilakká, és a gyökinverzióra vonatkozó tétel alapján az amplitúdó karakterisztika nem változik meg. (Viszont a fáziskarakterisztika igen! Egy rendszer stabilitását tehát nem az amplitúdó-, hanem a fáziskarakterisztika határozza meg.)

2.8.8 Minimál-fázisú ARMA rendszer

Legyen egy H(z) átviteli függvénnyel megadott N-edfokú stabil ARMA rendszer amplitúdó karakterisztikája A(f). Kérdés, hány olyan különböző stabil ARMA rendszert lehet megadni maximálisan, amelyeknek ugyanaz az A(f) az amplitúdó karakterisztikája.

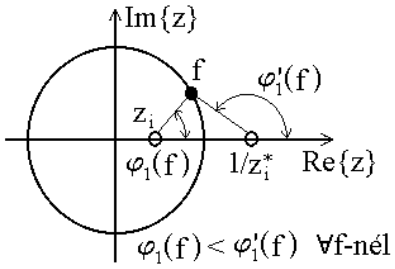
Mivel egy ARMA rendszer fokszáma a nevező- és a számlálópolinom fokszáma közül a nagyobbik, ezért egy N-edfokú rendszernek maximum N zérusa lehet. Mivel a zérusok nincsenek hatással a stabilitásra és a gyökinverzióra az amplitódó karakterisztika invariáns, ezért az N db. zéruson tetszőleges kombinációban végezhetünk gyökinverziót. Az összes kombinációk száma pedig 2^N, így maximum 2^N-féle azonos amplitúdó karakterisztikájú N-edfokú ARMA rendszer létezik Ezeknek viszont különböző a fáziskarakterisztikájuk.

Definíció:

Az azonos amplitúdó karakterisztikájú N-edfokú ARMA rendszerek közül azt, amelyiknek a legkisebb a fázisa minden f frekvencián, *minimál-fázisú* rendszernek nevezzük.

Könnyen belátható, hogy a 2^N számú rendszer közül az lesz minimál-fázisú, amelyiknek nincs zérusa az egységkörön kívül (és természetesen minden pólusa az egységkörön belül van).

Az alábbi ábra azt szemlélteti, hogy az egységkörön belüli zérusokhoz tartozó fázisszög mindig kisebb, mint az egységkörön kívüli inverzükhöz tartozó.



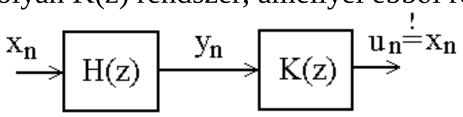
Ha H(f) minimál-fázisú ARMA rendszert ír le, akkor az $\ln(\mathrm{H}(z))$ komplex függvénynek csak az egységkörön belül lesznek szingularitásai (az eredeti H(z) pólusainál és zérusainál), vagyis az egységkörön kívüli gyűrűtartományban analitikus ⇒ olyan mintha ln(H(z) is egy kauzális rendszert írna lesz. Kauzális rendszereknél viszont a frekvenciaátviteli függvény valós és képzetes része nem független.

$\ln(z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f T}) = \ln(H(\mathrm{f})) = a(\mathrm{f}) + \mathrm{j}\cdot\varphi(\mathrm{f})$, ahol $a(\mathrm{f}) = |H(\mathrm{f})|$ és $\varphi(\mathrm{f}) = \mathrm{arc}(H(\mathrm{f}))$

Éppen ezért a minimál-fázisú kauzális ARMA rendszerek amplitúdó karakterisztikája és fáziskarakterisztikája nem független! Vagyis az amplitúdó karakterisztika meghatározza a fáziskarakterisztikát: *a minimál-fázisú rendszereket egyértelműen leírják az amplitúdó karakterisztikájuk.*

Megjegyzés:

– Tekintsünk egy négyzetesen összegezhető x_n sorozatot, amelynek z-transzformáltja X(z). Azonban ezt a jelet közvetlenül nem, csak egy H(z)-vel történő lineáris, invariáns transzformáltját. Van-e olyan K(z) rendszer, amellyel ebből rekonstruálhatjuk x_n-t?



$\mathrm{K}(z) = ?: \mathrm{u}_n = \mathrm{x}_n$. Mivel U(z) = X(z) ·H(z) ·K(z), legyen $\mathrm{K}(z) = \dfrac{1}{\mathrm{H}(z)}$ (H(z) invertáltja). Azonban ez csak akkor lesz stabil, ha H(z) zérusai az egységkörön belül helyezkednek el, azaz minimál-fázisú. (Hiszen H(z) zérusai K(z) pólusai lesznek.)
⇒ A minimál-fázisúság és az invertálhatóság ugyanazt a fogalmat jelenti.

– Foglaljuk össze a lineáris, invariáns rendszerek frekvenciatartománybeli jellemzőit:
A H(f) rendszerjellemző $H(\mathrm{f}) = A(\mathrm{f})\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\mathrm{f})}$, ahol
A(f) az amplitúdó karakterisztika, ($a(\mathrm{f}) = \ln(A(\mathrm{f}))$ a logaritmikus amplitúdó karakterisztika)
φ(f) a fáziskarakterisztika, ($\tau(\mathrm{f}) = -\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{d\varphi(\mathrm{f})}{d\mathrm{f}}$ a futásiidő-karakterisztika).

– Gyakran az $\omega = 2\pi\cdot\mathrm{f}$-et használják a frekvencia jelölésére. Ekkor

$$H(\mathrm{f}) = \boldsymbol{F}\{\mathrm{h_n}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{h_n} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\mathrm{fT}} \;\rightarrow\; H(\omega) = \boldsymbol{F}\{\mathrm{h_n}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{h_n} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega\mathrm{T}},$$

$$H(\omega) = A(\omega)\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} \rightarrow \tau(\mathrm{f}) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{d\varphi(\mathrm{f})}{d\mathrm{f}}.$$

–Az azonos amplitúdó karakterisztikájú rendszerek közül a minimál-fázisúnak nemcsak a fázisa, hanem a futási ideje is minimális minden f-nél.

– Ha az x_n sorozat X(z) z-transzformáltja felírható két polinom hányadosaként, $\mathrm{K(z)} = \dfrac{\mathrm{A(z)}}{\mathrm{B(z)}}$, akkor az x_n jelet ARMA jelnek nevezzük. Ennek a rendszerekhez hasonlóan megadható a frekvenciatartománybeli leírása: $K(\mathrm{f}) = A_x(\mathrm{f})\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\mathrm{f})}$. A jelek spektrumának abszolút érték négyzetét energiaspektrumnak nevezzük: $E(\mathrm{f}) = |X(\mathrm{f})|^2 = |A_x(\mathrm{f})|^2$ Ha K(z) n-edfokú, akkor (maximum) 2^N féle különböző lefolyású x_n sorozat létezik, amelyeknek ugyanolyan az amplitúdóspektruma.

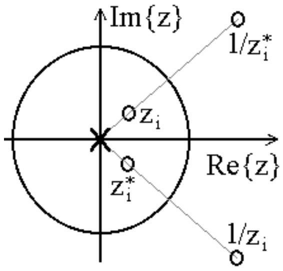
– Fontos jeljellemző a kumulatív energiafüggvény: $c_n = \sum_{m=-\infty}^{n} |\mathrm{x}_m|^2$. Véges energiájú x_m esetén a c_n kumulatív energia egy véges határértékű monoton növekvő sorozat. c_n megmondja, hogy a jel az n-edik időpillanatig mekkora energiát mutatott, azaz hogyan oszlik el a jel energiája az időben. Az azonos energiaspektrumú x_m ARMA jelek közül létezik egy olyan, amelynek kumulatív energiafüggvénye az összes többi fölött halad. Ez az amelyik az időtartomány elejére koncentrálja az energiáját, ezért ezt front-loaded v. minimum delay jelnek nevezzük. ARMA jelek esetén az ehhez tartozó X(z) összes zérusa az egységkörön belül helyezkedik el. (Maximum delay jelnél az összes zérus az egységkörön kívül helyezkedik el.)

2.8.9 Lineáris fázisú FIR rendszerek

Azokat az MA rendszereket, amelyek $\mathrm{H}(z) = a_0 + a_1\cdot z^{-1} + \ldots + a_M \cdot z^{-N}$ rendszerjellemző polinomjának együtthatóira igaz, hogy $\boxed{a_i = a_{N-i}}$, vagyis az együttható eloszlás szimmetrikus, lineáris-fázisú rendszereknek nevezzük.

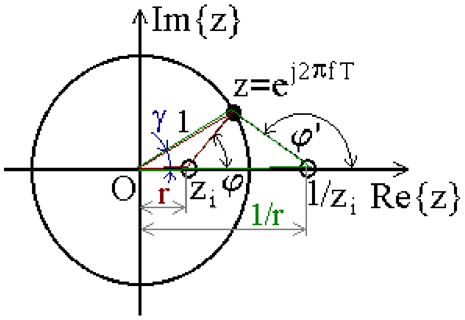
Hogy miért, ahhoz figyeljük meg a következőket:

Írjuk föl H(z) z pozitív és negatív hatványai szerint: $\mathrm{H}(z) = \mathrm{A}(z^{-1}) = \dfrac{\alpha(z)}{z^N}$, ahol az $\mathrm{A}(z^{-1})$ és az α(z) polinom együtthatói közti összefüggés: $\alpha_i = a_{N-i}$. Ha viszont $a_i = a_{N-i}$, akkor $\alpha_i = a_i$. Miután az $\mathrm{A}(z^{-1})$ és az α(z) polinom gyökei is azonosak, ezért ha z_i gyök, akkor az $1/z_i$ is gyök. (Ha valós a rendszer, akkor z^*_i is gyök.)



A pólus-zérus elrendezés az egységkörre szimmetrikus.

Az alábbi esetben vizsgáljuk meg, hogy a $z_i=r\cdot e^{j\varphi}$ zérus és az $1/z_i$ párja együttesen mekkora fáziseltolást eredményez az f frekvencián:



Mivel
az O-z_i szakaszhossz és az O-z szakaszhossz aránya r,
a O-z és az O-$1/z_i$ szakaszhosszak aránya szintén r,
és γ közös szöge az O-z-z_i és az O-$1/z_i$-z háromszögnek,
ezért a két háromszög hasonló.
$\Rightarrow \angle$O-z_i-z = $\angle$O-z-$1/z_i$, ahol $\angle$O-z_i-z = 180°–φ és $\angle$O-z-$1/z_i$ = 180°–(γ+(180°–φ')).
Behelyettesítve, 180°–φ = 180°–(γ+(180°–φ')) → φ + φ' = γ + 180°.
γ a frekvenciával lineárisan változik, tehát z_i zérus és az $1/z_i$ párja együttesen lineáris fázismenetet hoznak létre. Mivel minden z_i-nek megvan az $1/z_i$ párja, ezért a rendszer teljes fázismenete lineáris lesz, vagyis a futási idő a frekvencia függvényében állandó (átlagosan: N·T/2).

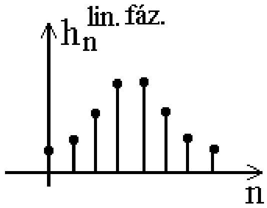
Megjegyzések:

– A lineáris-fázisú rendszer minden frekvencián azonos késleltetést okoz, tehát az átvitel nem diszperzív. Ez az alakhű jelátvitel szükséges feltétele. (Ha emellett az amplitúdó karakterisztikáról kikötjük, hogy a frekvenciától függetlenül állandó, akkor a két feltétel együtt már elégséges.)

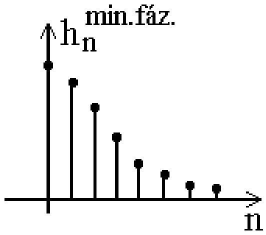
– Lineáris fáziskarakterisztikát csak FIR szűrővel lehet megvalósítani.

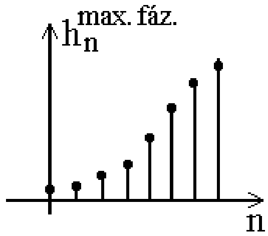
– Mivel egy lineáris fázisú rendszernek az egységkörön kívül is vannak zérusai, a rendszer nem minimál-fázisú. → A lineáris fázisú rendszer nem invertálható.

– Ha a H(z) lineáris fázisú, akkor legyen pl. h_n az alábbi véges szimmetrikus sorozat:



Ha H(z)-t gyökinverzióval minimál- ($|z_i| \le 1,\ \forall$i - re) ill. maximál-fázisúvá ($|z_i| \ge 1,\ \forall$i - re) tesszük, akkor az impulzusválaszok az alábbi módon változnak.





Ha H(z) minimál-fázisú, akkor a hozzá tartozó h_n front-loaded v. minimum delay jel.

Ha H(z) maximál-fázisú, akkor a hozzá tartozó h_n maximum delay jel.

Mindhárom esetben azonos a rendszer amplitúdó karakterisztikája.